Fracciones parciales

Una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede ser llevada a otra equivalente dependiendo del divisor $Q(x) \neq 0$ de la misma, de tal modo que el divisor puede presentar términos que permitan factorizarlo atendiendo a :

a) Factores lineales distintos.
b) Factores lineales repetidos o iguales.
c) Factores cuadráticos distintos.
d) Factores cuadráticos repetidos.

Cada caso de los indicados permite formar una fracción racional equivalente a la dada del modo siguiente:

a) Factores lineales distintos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)..(a_nx+b_n)}$$

O sea que: $Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)..(a_nx+b_n)$

Vamos a formar varias fracciones, una para cada factor distinto de $Q(x)$. El numerador de la fracción tendrá una constante a determinar: A,B,C,…,N

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{a_1x+b_1} + \frac{B}{a_2x+b_2} + \frac{C}{a_3x+b_3} + \ldots + \frac{N}{a_nx+b_n} \qquad \textbf{I}$$

Multiplicando la expresión anterior por el mínimo común múltiplo $Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)..(a_nx+b_n)$ formamos una expresión sin denominadores:

$$P(x) = A(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)..(a_nx+b_n) + B(a_1x+b_1)(a_3x+b_3)..(a_nx+b_n) +$$
$$+ C(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)..(a_nx+b_n) + \ldots + N(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)..(a_{(n-1)}x+b_{(n-1)})$$

En éste caso, determinamos A, B, C,…, N mediante igualdad de polinomios, previa multiplicación de los binomios indicados. Podemos utilizar la parte derecha de la función racional **I** : $\frac{A}{a_1x+b_1} + \frac{B}{a_2x+b_2} + \frac{C}{a_3x+b_3} + \ldots + \frac{N}{a_nx+b_n}$ como equivalente de la dada $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

b) Factores lineales repetidos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax+b)(ax+b)(ax+b)..(ax+b)}$$

Es decir: $Q(x) = (ax+b)(ax+b)(ax+b)..(ax+b) = (ax+b)^n$

Formamos varias fracciones, una para cada factor de $Q(x)$. El numerador de la fracción tendrá una constante a determinar: A,B,C,…,N

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + ... + \frac{N}{(ax+b)^n} \qquad \mathbf{I}$$

Multiplicando la expresión anterior por el mínimo común múltiplo $Q(x) = (ax+b)^n$ formamos una expresión sin denominadores:

$$P(x) = A(ax+b)^{(n-1)} + B(ax+b)^{(n-2)} + C(ax+b)^{(n-3)} + ... + N$$

En la expresión anterior, determinamos A,B, C,…, N mediante igualdad de polinomios, previo desarrollo de los binomios. Ahora podemos utilizar la parte derecha de la función racional **I** como equivalente de la dada $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

c) Factores cuadráticos distintos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)(a_3x^2+b_3x+c_3)..(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

Ahora: $Q(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)(a_3x^2+b_3x+c_3)..(a_nx^2+b_nx+c_n)$

Formamos varias fracciones, una para cada factor de $Q(x)$. El numerador de la fracción tendrá dos constantes a determinar: A,B,C,…,N, M

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{Cx+D}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \frac{Ex+F}{(a_3x^2+b_3x+c_3)} + ... + \frac{Nx+M}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

Multiplicando la expresión anterior por el mínimo común múltiplo $Q(x)=\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)..\left(a_nx^2+b_nx+c_n\right)$ formamos una expresión sin denominadores:

$$P(x)=(Ax+B)\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)..\left(a_nx^2+b_nx+c_n\right)+$$
$$(Cx+D)\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)..\left(a_nx^2+b_nx+c_n\right)+$$
$$(Ex+F)\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)..\left(a_nx^2+b_nx+c_n\right)+\ldots+$$
$$(Nx+M)\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)..\left(a_{(n-1)}x^2+b_{(n-1)}x+c_{(n-1)}\right)$$

Encontramos A,B, C,…, N,M mediante igualdad de polinomios, previa multiplicación de los factores planteados en P(x) . Ahora podemos utilizar la parte derecha de la función racional **I** como equivalente de la dada $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

d) Factores cuadráticos repetidos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+bx+c\right)..\left(ax^2+bx+c\right)}=$$

Siendo: $Q(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+bx+c\right)..\left(ax^2+bx+c\right)=\left(ax^2+bx+c\right)^n$

Formamos varias fracciones, una para cada factor de $Q(x)$. El numerador de la fracción tendrá dos constantes a determinar: A,B,C,…,N, M

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)}+\frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}+\ldots+\frac{Nx+M}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} \qquad \mathbf{I}$$

Multiplicando la expresión anterior por el mínimo común múltiplo
$Q(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax^2+bx+c\right)..\left(ax^2+bx+c\right)=\left(ax^2+bx+c\right)^n$
formamos una expresión sin denominadores:

P(x) = (Ax+B) $\left(ax^2+bx+c\right)^{(n-1)}+$ (Cx+D) $\left(ax^2+bx+c\right)^{(n-2)}+$ (Ex+F) $\left(ax^2+bx+c\right)^{(n-3)}+$

+…+ (Nx+M)

Hallamos A,B, C,…, N,M mediante igualdad de polinomios, previo desarrollo de los factores indicados.

Utilizamos la parte derecha de la función racional **I** como equivalente de la expresión dada $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Ejemplos de Fracciones Parciales

Primer Caso. Factores de primer grado distintos.

Sea la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$

Esta función racional puede ser llevada a otra equivalente, dependiendo del divisor $Q(x) \neq 0$ de la misma, de tal modo que el divisor presenta dos factores lineales distintos $(x+1)$ y $(x+3)$.

A partir de la fracción dada $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$ podemos construir dos fracciones cuya suma sea equivalente a la fracción conocida: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

Es decir: $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$ Multiplicando ésta ecuación por el mínimo común múltiplo $(x+1)(x+3)$, tenemos: $5x-3 = A(x-3) + B(x+1)$

Multiplicando a la derecha de la igualdad nos queda: $5x-3 = Ax - 3A + Bx + B$

Asociando en la derecha los términos semejantes***:*** $5x-3 = (A+B)x + (-3A+B)$

Igualando los términos semejantes:
En x: $5x = (A+B)x$ (I)
Términos independientes: -3 = -3 A + B (II)
De I Dividiendo entre x la expresión: 5 = A + B (I)
-3 = -3 A + B (II)

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones I y II mediante reducción:
Multiplicando la ecuación I por 3: 15 = 3A+ 3B
-3 = -3A+ B

Sumando las dos ecuaciones anteriores 12 = 4B $\rightarrow$ B = $\frac{12}{4} = 3$ $\rightarrow$ **B = 3**

Sustituyendo B en la ecuación I: 5 = A + 3 $\rightarrow$ A= 5-3= 2 $\rightarrow$ **A = 2**

Con los valores de A, B encontrados tenemos: $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$

La suma de las dos fracciones de la derecha son equivalentes a la fracción inicial conocida.

Segundo Caso. Factores de primer grado repetidos.

Sea la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{6x+7}{(x+2)^2}$

Esta función racional puede ser llevada a otra equivalente dependiendo del divisor $Q(x) \neq 0$ de la misma, de tal modo que el divisor presenta dos factores lineales iguales $(x+2)(x+2)$.

A partir de la fracción dada $\frac{6x+7}{(x+2)^2}$ podemos construir dos fracciones cuya suma sea equivalente a la fracción conocida : $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$

Es decir: $\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} - \frac{B}{(x+2)^2}$ Multiplicando ésta ecuación por el mínimo

común múltiplo $(x+2)^2$, tenemos:

$$6x+7 = A(x+2) + B$$

Multiplicando a la derecha de la igualdad nos queda:

$$6x+7 = Ax + (2A+B)$$

Igualando términos semejantes:

En x : 6 x = A x Dividiendo entre x, tenemos que : A = 6
Términos independientes: $7 = 2A + B \rightarrow$ 7= 2(6) +B

Despejando B: B = 7-12 = -5 $\rightarrow$ $B = -5$

Sustituyendo los valores de A y B en la fracción inicial:

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$$

La suma de las dos fracciones de la derecha son equivalentes a la fracción inicial conocida.

Tercer Caso. Factores de segundo grado distintos.

Sea la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)(x^2+2)}$

Esta función racional puede ser llevada a otra equivalente dependiendo del divisor $Q(x) \neq 0$ de la misma, de tal modo que el divisor presenta dos factores de segundo grado diferentes $(x^2+1)(x^2+2)$.

A partir de la fracción dada $\frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)(x^2+2)}$ podemos construir dos fracciones cuya suma sea equivalente a la fracción conocida : $\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$

Es decir: $\frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$ Multiplicando ésta ecuación por el mínimo común múltiplo $(x^2+1)(x^2+2)$,

Tenemos: $x^3 + x^2 + 2x + 1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$

Multiplicando a la derecha de la igualdad nos queda:
$x^3 + x^2 + 2x + 1 = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$

Factorizando a la derecha de la igualdad:
$x^3 + x^2 + 2x + 1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$

Igualando términos semejantes:
En x^3 : $x^3 = (A+C)x^3$ Dividiendo entre x^3 , tenemos que : 1 = A + C (I)
En x^2 : $x^2 = (B+D)x^2$ Dividiendo entre x^2 , tenemos que : 1 = B + D (II)
En x : $2x = (2A+C)x$ Dividiendo entre x , tenemos que : 2 = 2A + C (III)
Términos independientes: $1 = (2B+D)$ o sea que: 1= 2B + D (IV)

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones I , II , III, IV :
De I: 1 = A + C multiplicando por -1 $\rightarrow$ -1 = -A - C
Sumando con III: <u>2 = 2A + C</u>
1= **A** $\rightarrow$ **A = 1**

Sustituyendo A en I tenemos que 1 = 1 + C por tanto **C = 0**

Seleccionando ahora las ecuaciones II y IV
1 = B + D multiplicando por -1 $\rightarrow$ -1 = -B - D
Sumando con IV: <u>1= 2B + D</u>
0 = B por tanto **B = 0**

En la Ecuación II encontramos a D: 1 = B+ D $\rightarrow$ 1 = 0 + D $\rightarrow$ **D = 1**

Sustituyendo los valores de A, B, C, D en la fracción inicial:

$$\frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{(1)x+0}{x^2+1}+\frac{(0)x+1}{x^2+2}$$

Efectuando la operación en la expresión de la derecha nos queda:

$$\frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+2}$$

La suma de las dos fracciones de la derecha son equivalentes a la fracción inicial conocida.

Cuarto Caso. Factores de segundo grado repetidos.

Sea la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2}$

Esta función racional puede ser llevada a otra equivalente dependiendo del divisor $Q(x) \neq 0$ de la misma, de tal modo que el divisor presenta dos factores de segundo grado repetidos $(x^2+9)(x^2+9)$.

A partir de la fracción dada $\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2}$ podemos construir dos fracciones cuya suma sea equivalente a la fracción conocida : $\frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$

Es decir: $\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$

Multiplicando la ecuación anterior por el mínimo común múltiplo $(x^2+9)^2$ tenemos:

$x^2 - x + 9 = (Ax+B)(x^2+9) + Cx + D$

$x^2 - x + 9 = Ax^3 + 9Ax + Bx^2 + 9B + Cx + D$

Completando el polinomio de tercer grado en la derecha y factorizando los términos semejantes a la izquierda:

$0x^3 + x^2 - x + 9 = Ax^3 + Bx^2 + (9A+C)x + (9B+D)$

Igualando términos semejantes.

En x^3: $0x^3 = Ax^3$ $\rightarrow$ **A = 0**

En x^2 : $x^2 = Bx^2$ $\rightarrow$ **B = 1**

En x : $-x = (9A+C)x$ $\rightarrow$ -1= 9 A + C $\rightarrow$ -1 = 9(0) + C $\rightarrow$ **C = -1**

Términos independientes: 9 = 9B + D $\rightarrow$ 9 = 9(1) + D $\rightarrow$ **D = 0**

En la expresión: $\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$

Sustituyendo A, B, C y D tenemos:

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{(0)x+1}{x^2+9} + \frac{(-1)x+0}{(x^2+9)^2}$$

Efectuando la operación en la expresión de la derecha nos queda:

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{x^2+9} + \frac{-x}{(x^2+9)^2}$$

La suma de las dos fracciones de la derecha son equivalentes a la fracción inicial conocida.