1. INTRODUCCIÓN A LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

SUMARIO:

INTRODUCCIÓN

OBJETIVOS

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

1.- Conjuntos y Subconjuntos.

2.- Operaciones con Conjuntos. Propiedades.

3.- Relaciones Binarias: Equivalencia y Orden.

4.- Aplicaciones.

5.-Tipos de Aplicaciones. Composición de Aplicaciones.

6.- Grupos, Anillos y Cuerpos.

PROBLEMAS RESUELTOS.

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se ha tratado de introducir el lenguaje en el que se expresan las Matemáticas por lo que inicialmente puede resultar innecesario tratar de buscar aplicaciones de algo cuya utilidad es servir de fundamento. Esto ya de por si es suficiente aplicación. Sin embargo, dado el interés eminentemente práctico de un estudiante de Ingeniería conviene utilizar algunas aplicaciones del lenguaje de la Teoría de Conjuntos como motivación para su interés. Podemos destacar algunas utilidades que vienen dadas fundamentalmente como consecuencia de su capacidad expresiva:

- La idea de correspondencia o aplicación es el modo natural de representar leyes físicas y el entender éstas como pares ordenados resulta adecuado a la hora del tratamiento informático de un problema concreto. Por ejemplo, si entendemos una aplicación que a un punto de una lámina le asigna una temperatura como una terna de números reales en la que los dos primeros representan la posición del punto y el tercero la temperatura, podremos construir un programa de ordenador que represente el calentamiento de la lámina asignando colores a distintos rangos de temperatura.

Los métodos de recuento de subconjuntos son fundamentales en el cálculo de probabilidades para poder enumerar los sucesos posibles y los favorables. Y el cálculo de probabilidades está en el fundamento de la Estadística de uso cada vez más frecuente en el mejoramiento de procesos industriales.

OBJETIVOS

- Conocer y manejar la simbología y el lenguaje matemático necesarios para realizar planteamientos y razonamientos matemáticos que va a utilizar en el desarrollo de la asignatura y de su carrera.
- Conocer y manejar con destreza las propiedades de los grupos con independencia de la naturaleza de los elementos del conjunto.
- Reconocer ejemplos de los conjuntos numéricos usuales.
- Deducir consecuencias de la definición de grupo y simplificar con soltura expresiones dentro de un grupo.
- Construir algunos grupos finitos de interés como el grupo de las permutaciones de n elementos y el grupo $\mathbb{Z}_p$.

INTRODUCCION TEORICA

1. CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

1.1. Conjunto

Un conjunto es una colección de objetos que llamaremos ”elementos”. Un elemento a que está en el conjunto U se dice que pertenece a U y se escribe $a \in U$. Si a no está o no pertenece a U se escribe $a \notin U$.

Generalmente, los elementos son denotados con letras minúsculas y los conjuntos con mayúsculas. Un conjunto puede definirse de las siguientes formas:

a) Por extensión, indicando todos los elementos del conjunto. En general, los elementos se representan entre llaves: $U = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

b) Por comprensión, dando una propiedad que caracterice a los elementos del conjunto: $U = \{números \quad naturales \;\; pares\}$.

1.2. Subconjunto

Un conjunto A es subconjunto de un conjunto B, $A \subset B$, si todo elemento de A lo es de B, es decir, $\forall a \in A \Rightarrow a \in B.$ Si $A \subset B$, se dice que A está incluido o contenido en B o que B contiene o incluye a A.

1.3. Conjunto Vacío

El conjunto vacío es un conjunto que no tiene elementos. Se simboliza por $\varnothing$.

1.4. Conjunto Universal o de Referencia

Un conjunto U se dice que es el universal de una serie de conjuntos con los que se está trabajando si cumple que cualquiera de estos conjuntos es subconjunto suyo.

2. OPERACIONES CON CONJUNTOS. PROPIEDADES

2.1. Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son iguales, y se escribe $A = B$, si tienen los mismos elementos. La igualdad de dos conjuntos se demuestra mediante la doble inclusión $A \subset B$ y $B \subset A$.

2.2. Conjunto Complementario

Dado un conjunto A de un conjunto universal U se define su conjunto complementario, y se denota por $\overline{A}$ o A^c, de la siguiente forma:

$$\overline{A} = \{x \in U \,/\, x \notin A\}.$$

2.3. Intersección de conjuntos

El conjunto formado por los elementos comunes de A y B es el conjunto intersección de ambos:

$$A \cap B = \{x \in U \,/\, x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \varnothing$, los conjuntos se llaman disjuntos.

2.4. Unión de Conjuntos

La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos de A y por todos los elementos de B:

$A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$.

2.5. Diferencia de conjuntos

La diferencia de los conjuntos A y B está definida como el siguiente conjunto:

$A - B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.

2.6. Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica de los conjuntos A y B es el conjunto:

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

También se puede expresar:

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

2.7. Propiedades

La unión, intersección y el complementario, verifican las siguientes propiedades.

a) Unión e intersección

Asociativa

$(\mathrm{A} \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Conmutativa

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Idempotente

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Simplificación

$A \cup (B \cap A) = A$

$A \cap (B \cup A) = A$

Absorción

$A \cup U = U$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

Distributiva

$$A \cup (B \cap C) =$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) =$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

b)Complementario

$(A)^c = A$

$$\left.\begin{array}{ll} (A \cup B)^c = & A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = & A^c \cup B^c \end{array}\right\} \equiv \text{Leyes de Morgan}$$

Nota: Se pueden definir las operaciones unión e intersección de un número arbitrario de conjuntos:

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i \quad (x \in A, \text{ si } x \in A_i, \forall i \in I)$$

$A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad (x \in A, \text{ si } x \in A_i, \text{ para algún } A_i)$

Definición de Conjunto de las Partes de un Conjunto

El conjunto **partes de un conjunto** A es el conjunto de todos los subconjuntos posibles de A, se denota por $P(A)$.

$P(A) = \{B \ / \ B \subset A\}$.

Definición de Cardinal de un conjunto finito A

Es el número de elementos que tiene dicho conjunto. Se representa por $Card(A)$ o por $n(A)$.

Las siguientes fórmulas relacionan los cardinales y las operaciones entre conjuntos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

$n(A^c) = n(U) - n(A).$

3. RELACIONES BINARIAS: EQUIVALENCIA Y ORDEN

3.1. Producto Cartesiano. Relación Binaria

3.1.1. Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, el **producto cartesiano** de A y B es el conjunto de pares ordenados (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$, esto es:

$A \times B = \{(a,b) \ / \ a \in A \text{ y } b \in B\}$.

3.1.2. Relación Binaria

Una relación binaria definida en los elementos de A es un subconjunto G del producto cartesiano $A \times A$. G se dice que es el **"grafo"** de la relación.

Si el par $(a_1, a_2) \in G$, decimos que a_1 está relacionado con a_2 y se simboliza por $a_1 \Re a_2$. Si $(a_1, a_2) \notin G$, decimos que a_1 no está relacionado con a_2 y se simboliza $a_1 \overline{\Re} a_2$.

Propiedades de una Relación Binaria

Dentro de las propiedades que puede cumplir una relación binaria están las siguientes:

$\text{Re}\ \mathit{flexiva}:$

$a \Re a,\ \forall a \in A$

$\mathit{Simétrica}:$

$\mathit{Si} \quad a \Re b \quad \mathit{entonces} \quad b \Re a$

$\mathit{Antisimétrica}$

$\mathit{Si} \ \ a \Re b \ \ y \ \ b \Re a \ \ \mathit{entonces} \ \ a = b$

$\mathit{Transitiva}$

$\mathit{Si} \ \ a \Re b \ \ y \ \ b \Re c \ \ \mathit{entonces} \ \ a \Re c$

Conexa

$\forall a, b \in A: \ a \Re b \ \ o \ \ b \Re a$

Definición de las Relaciones de Equivalencia

Una relación binaria definida en un conjunto A y que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se dice que es de equivalencia.

Clases de Equivalencia

La clase de equivalencia de un elemento $a \in A$ es el conjunto de todos los elementos relacionados con él. Se representa por $\overline{a}$ ó $\left[a\right]$, es decir: $\overline{a} = \left\{x \in A \;/\; x \Re a\right\}$.

Definición de Conjunto Cociente

Es el conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Se denota por $A/\Re$.

Definición de las Relaciones de Orden

Una relación binaria definida en un conjunto A cumpliendo las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva es una **relación de orden**. Se dice entonces que A es un conjunto ordenado.

Relación de Orden Total

Una relación binaria definida en un conjunto A es una relación de orden total si además de ser de orden (es decir, verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva) posee también la propiedad conexa.

4. APLICACIONES

4.1. Primeras Definiciones

4.1.1. Definición de Correspondencia

Dados dos conjuntos A y B, una correspondencia o relación entre A y B es un subconjunto D del producto cartesiano $A \times B$, es decir, $D \subset (A \times B)$.

Decimos que dos elementos $a \in A$ e $b \in B$ se corresponden o están relacionados si $(a,b) \in D$.

A veces se hace referencia a la correspondencia con la terna (E, F, G).

El subconjunto $D \subset A \times B$ se denomina **"grafo"** de la correspondencia.

4.1.2. Definición de Aplicación

Una correspondencia entre A y B de grafo D es una aplicación de A en B si para cada $a \in A$ existe un y sólo un elemento $b \in B$ cumpliendo que $(a,b) \in D$.

Generalmente las aplicaciones se expresan por $f : A \to B$, escribiendo que $b = f(a)$ si $(a,b) \in D$ (se lee como que b es la imagen mediante f del elemento a).

A es el conjunto de partida de la aplicación.

B es el conjunto de llegada de la aplicación.

4.1.3. Definición de Dominio u Origen de una Aplicación.

El dominio de la aplicación f ($Dom(f)$ u $Or(f)$) es el conjunto de elementos de A para los cuales existe imagen, es decir:

$$Dom(f) = Or(f) = \{a \in A \ / \ \exists b \in B, \ (a,b) \in D\} = A$$

4.1.4. Definición de Imagen de una Aplicación

La imagen de la aplicación f es el subconjunto siguiente de B:

$$Im(f) = \{b \in B \ / \ \exists a \in A, \ (a,b) \in D\}$$

4.1.5. Definición de Imágenes y Antiimágenes

Dado un subconjunto X de A, la imagen de X mediante la aplicación f, llamada $f(X)$ es el subconjunto de B definido de la forma:

$$f(X) = Im(f) = \{b \in B \; / \; \exists x \in X, \; f(x) = b\}.$$

Dado un subconjunto Y de B la antiimagen de Y mediante f es el subconjunto de A, llamado $f^{-1}(Y)$ y definido por:

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \; / \; f(a) \in Y\}.$$

5. Tipos de Aplicaciones. Composición de Aplicaciones

5.1. Aplicaciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas

Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se denomina:

i) **inyectiva**, si dados $a_1, a_2 \in Or(f)$ y $f(a_1) = f(a_2)$ *entonces* $a_1 = a_2$.

ii) **sobreyectiva**, si $Im(f) = B$ (equivale a decir que $\forall b \in B, \exists a \in a \; / \; f(a) = b$).

iii) **biyectiva**, si es inyectiva y sobreyectiva.

5.2. Composición de Aplicaciones

Sea f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C. Si se verifica $Im(f) \subset Or(g)$, se puede definir la aplicación h composición de f y g, $h = g \circ f$, de la forma:

$$h(x) = g\left[f\left(x\right)\right], \quad \forall x \in Or(f).$$

5.3. Aplicación Identidad

Sea $i: A \rightarrow A$, una aplicación. Se dice que i es la identidad si se verifica que $\forall a \in A: i(a) = a$.

5.4. Correspondencia y Aplicación Recíproca

Sea f una aplicación de A en B. El subconjunto $D' \subset B \times A$ definido de la forma:

$$(b,a) \in D' \Longleftrightarrow (a,b) \in D$$

es una correspondencia entre B y A que se llama correspondencia recíproca de f.

Si la correspondencia recíproca es una aplicación, a dicha aplicación se la llama aplicación inversa o recíproca de f y se escribe f^{-1}.

i) $f^{-1} \circ f$ es la función identidad en el conjunto $Or(f)$.

ii) $f \circ f^{-1}$ es la función identidad en el conjunto $Im(f)$.

Nota: Hay que señalar que las dos funciones son distintas, ya que aunque la ley de obtención de imágenes es la misma:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a \qquad \left(f \circ f^{-1}\right)(a) = a$$

no están definidas en el mismo dominio.

6. GRUPOS, ANILLOS Y CUERPOS

6.1. Leyes de Composición

6.1.1. Ley de Composición Interna

Dado un conjunto A, una ley de composición interna en A (l.c.i.) es una aplicación $A \times A \to A$, esto es, dado un par de elementos de A le asocia A.

Utilizaremos la siguiente simbología para referirnos a una ley de composición interna: $*$, $\top$, $\vartriangle$, $+$ (si es ley aditiva), $\cdot$ (si es ley multiplicativa).

Al resultado de aplicar la l.c.i. al par (a,b) se le denota por $a*b$, $a \top b$, $a \vartriangle b$, $a+b$, $a \cdot b$.

Propiedades

Las propiedades que puede cumplir una ley de composición interna $*$ son:

Asociativa: $\left(a*b\right)*c = a*(b*c),\ \forall a,b,c \in A$

Conmutativa: $a*b = b*a,\ \forall a,b \in A$

Existencia de elemento neutro: $\exists e \in A \ / \ a*e = e*a = a,\ \forall a \in A$

El elemento neutro, si existe, es único. Si la ley es aditiva, el elmento neutro lo denotaremos por 0; si es multiplicativa, 1.

Existencia de elemento simétrico. Un elemento $a \in A$ admite simétrico a' si se tiene que $a*a' = a'*a = e$. Si la ley es aditiva, el simétrico se denomina opuesto y si es multiplicativa recíproco o inverso. Tenemos que $(a*b)' = b'*a'$.

Elementos regulares: Un elemento x es regular a la izquierda si $\forall a,b \in A$: $x*a = x*b \Rightarrow a = b.$

Un elemento x es regular por la derecha si: $\forall a,b \in A: a*x = b*x \Rightarrow a = b.$

Un elemento es regular si lo es a la izquierda y a la derecha.

Parte estable: Un subconjunto $B \subset A$ es parte estable para la ley de composición interna $*$, si $\forall\, a,b \in B$, $a * b \in B$.

Distributiva: Dadas dos leyes de composición interna $*$ y $\vartriangle$ en un conjunto A, la ley $*$ es distributiva respecto a la ley $\vartriangle$ si : $a*(b \vartriangle c) = (a*b) \vartriangle (a*c) \quad \forall a,b,c \in A.$

Definición de Homomorfismo

Dados dos conjuntos A y B con las leyes de composición interna $*$ y $\vartriangle$, respectivamente, una aplicación $f : A \to B$ se dice que es un homomorfismo si verifica que : $f(a*b) = f(a) \vartriangle f(b), \quad \forall a,b \in A.$

A cada tipo de homomorfismos lo nombraremos de una forma diferente. Así:

- Si $A = B$, el homomorfismo se llama endomorfismo.
- Si f es inyectivo, se llama monomorfismo.
- Si f es sobreyectiva,a se llama epimorfismo.
- Si f es biyectivo, se llama isomorfismo.
- Si f es biyectivo y $A = B$, se llama automorfismo.

Propiedades de un Homomorfismo.

Sea f un homomorfismo. Entonces, sse verifica:

Si e es el elemento neutro de $*$, $f(e)$ es el elemento neutro de $\vartriangle$.

Si a' es el elemento simétrico de a por $*$, $f(a')$ es el simétrico de $f(a)$ por $\vartriangle$.

La composición de homomorfismos es otro homomorfismo.

Definición de Ley de Composición Externa

Dados dos conjuntos A y K, una ley de composición externa (l.c.e) es una aplicación $K \times A \longrightarrow A$, es decir, a un elemento de K y a otro elemento de A les hace corresponder uno de A.

6.2. Grupos

Un conjunto G, distinto del vacío, es un grupo si tiene definida una ley de composición interna $*$ que cumple las propiedades:

Asociativa.

Existe elemento neutro e. ($a * e = e * a = a, \ \forall a \in G$).

Todo elemento tiene simétrico. $\forall a \in G, \exists a' \in G \ / \ a * a' = a' * a = e$

Nota:

- Un grupo con la propiedad conmutativa, se llama conmutativo o abeliano.

- Si la ley $*$ es multiplicativa, el neutro se suele simbolizar por 1 y al simétrico se le denomina inverso, y se denota por a^{-1}.

- Si la ley es aditiva, el elemento neutro se simboliza por 0 y el simétrico por $-a$, llamándole opuesto.

6.3. Anillos

Un anillo A es un conjunto con dos leyes de composición interna $*$ y $\vartriangle$, tal que, respecto de la primera tiene estructura de grupo abeliano y respecto de la segunda es asociativa y distributiva respecto de la primera, es decir: $a \vartriangle (b * c) = (a \vartriangle b) * (a \vartriangle c), \ \forall a, b, c \in A$ y $(b * c) \vartriangle a = (b \vartriangle a) * (c \vartriangle a), \ \forall a, b, c \in A$

Si la segunda operación es conmutativa, el anillo se llama conmutativo, y unitario si la segunda operación tiene elemento neutro.

La notación habitual de un anillo es $(A,+,\cdot)$, denotándose por 0 el elemento neutro de la primera ley (ley suma) y por 1 al elemento neutro de la segunda ley (ley producto), en caso de que exista. Utilizaremos dicha notación habitualmente.

6.4. Cuerpos

Un cuerpo K es un anillo unitario $(A,+,\cdot)$ en el que todo elemento distinto de 0 tiene inverso.

Si la segunda ley es conmutativa, el cuerpo es conmutativo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Siendo A, B, C **subconjuntos de** U **(conjunto universal), simplificar la siguiente expresión** $\left(A\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap C^{c}\right)\cup\left(A^{c}\cap B\right)$.

SOLUCIÓN:

$$\left(A\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap C^{c}\right)\cup\left(A^{c}\cap B\right)\overset{(distributiva)}{=}$$

$$=\left[\left(A\cap B\right)\cap\left(C\cup C^{c}\right)\right]\cup\left(A^{c}\cap B\right)\overset{(C\cup C^{c})=U}{=}$$

$$=\left[\left(A\cap B\right)\cap U\right]\cup\left(A^{c}\cap B\right)\overset{((A\cap B)\cap U=(A\cap B))}{=}\left(A\cap B\right)\cup\left(A^{c}\cap B\right)=$$

$$\overset{(distributiva)}{=}(A\cup A^{c})\cap B\overset{(A\cup A^{c})=U}{=}$$

$$=U\cap B=B.$$

2.- Siendo A, B, C **subconjuntos de** U **, y dado el conjunto** $D=[\left(A^{c}\cap B\right)^{c}\cap C]\cup\left(A\cap B\cap C\right)$ **, razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:**

a) $D=A$ **b)** $D=A\cap B$ **c)** $D=A\cup B.$

SOLUCIÓN:

Se realizarían las siguientes operaciones de conjuntos para simplificar la anterior expresión.

$$D=\left[\left(A^{c}\cap B\right)^{c}\cap C\cup\left(A\cap B\cap C\right)\right]=\left[\left(A\cup B^{c}\right)\cap C\right]\cup\left(A\cap B\cap C\right)=$$

$$=\left[\left(A\cup B^{c}\right)\cup\left(A\cap B\right)\right]\cap C\overset{(1)}{=}\left(A\cup B^{c}\right)\cap C$$

Sabemos que se cumple lo siguiente:

(1) $A \cap B \subset A \Rightarrow A \cap B \subset A \cup B^C \Rightarrow \left(A \cup B^c\right) \cup \left(A \cap B\right) = A \cup B^C$

De aquí se puede concluir que las opciones a), b) y c) son todas falsas. No obstante se puede llegar a la misma conclusión con un ejemplo en concreto:

Sea $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{1,2,6\}$, y el conjunto total

$U = \{1,2,3,4,5,6\}$

Entonces se tendría que: $\left(A^c \cap B\right)^c = \{1,2,3,5,6\}$, por lo tanto

$\left(A^c \cap B\right)^c \cap C = \{1,2,6\} = C,$

y también se tiene que $\left(A \cap B \cap C\right) = \{2\}$, por lo que se concluye que :

$\left[\left(A^c \cap B\right)^c \cap C\right] \cup \left(A \cap B \cap C\right) = \{1,2,6\} = C$, que efectivamente no se corresponde ni con la opción a), ni con la b), ni con la c).

3.- Siendo A, B, C subconjuntos de U, simplificar la siguiente expresión conjuntista $\left(A \cup B\right) \cup \left(A \cap C\right) \cup \left(A^C \cap B^C\right)^C$.

SOLUCIÓN:

Utilizando las leyes de las operaciones entre conjuntos, la anterior expresión se puede simplificar de la siguiente forma:

$$\left(A \cup B\right) \cup \left(A \cap C\right) \cup \left(A^C \cap B^C\right)^C \overset{(1)}{=} \left(A \cup B\right) \cup \left(A \cap C\right) \cup \left(A \cup B\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= \left(A \cup B\right) \cup \left(A \cap C\right) \overset{(3)}{=} A \cup B$$

(1) Aquí se han usado las Leyes de Morgan de conjuntos:

$\left(A\cap B\right)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$, al mismo tiempo también se ha usado la propiedad que nos dice que $(A^{C})^{C}=A$

(2) Aquí únicamente se ha tenido en cuenta que $A\cup A=A$

(3)

$$\left(A\cap C\right)\subset A\Rightarrow (A\cap C)\subset (A\cup B)\Rightarrow \left(A\cup B\right)\cup\left(A\cap C\right)=A\cup B.$$

4.- Siendo A, B y C subconjuntos de U entonces el conjunto $(A^{c}\cap B)\cup[(A\cap B)\cap C^{c}]\cup(A\cap B\cap C)$ **¿con cuál de los siguientes se corresponde?**

a) B **b)** C **c)** A **d)** $\varnothing$

SOLUCIÓN:

$$(A^{c}\cap B)\cup[(A\cap B)\cap C^{c}]\cup(A\cap B\cap C)=$$

$$=(A^{c}\cap B)\cup(A\cap B\cap C^{c})\cup(A\cap B\cap C)\overset{(1)}{=}$$

$$=(A^{c}\cap B)\cup[(A\cap B)\cap(C^{c}\cup C)]\overset{(2)}{=}(A^{c}\cap B)\cup[(A\cap B)\cap U]\overset{(3)}{=}$$

$$=(A^{c}\cap B)\cup(A\cap B)=$$

$$=(A^{c}\cup A)\cap B\overset{(2)}{=}U\cap B\overset{(3)}{=}B.$$

(1) Distributiva : $(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)=A_1\cap(A_2\cup A_3)$

(2) $A\cup A^{c}=U$

(3) $A\cap U=A$

5.- De 100 **ordenadores,** 80 **tienen un virus A,** 35 **tienen un virus B, y** 12 **no tienen ningún virus. ¿Cuántos ordenadores poseen los dos virus?**

SOLUCIÓN:

Si llamamos:

$A = \{ordenadores\ que\ tienen\ el\ virus\ \text{A}\}$ y si llamamos:

$B = \{ordenadores\ que\ tienen\ el\ virus\ \text{B}\}$

Como sólo hay 12 ordenadores sin virus, entonces $100 - 12 = 88$ ordenadores tienen algún 7 virus, es decir el cardinal de $A \cup B$ es 88: $n(A \cup B) = 88.$

Por otro lado, $n(A) = 80$ y $n(B) = 35$

Sabemos, por otro lado que: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

Luego: $n(A \cap B) == 80 + 35 - 88 = 27$

Es decir hay 27 ordenadores que poseen los virus A y B.

6.- Sea la relación binaria definida entre elementos de $\mathbb{R}$: $x \Re y \Longleftrightarrow x \leq y.$ **Estudiar qué tipo de relación es** $\Re$ **(equivalencia, orden total u orden parcial).**

SOLUCIÓN:

Veamos qué propiedades son las que cumple la relación $\Re$.

$i)$ **Reflexiva**.

$\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x = x$, por lo tanto se puede decir que $x \leq x$ (no se cumple la condición de $<$, pero sí la del $=$).

Luego sí es reflexiva.

ii) **Simétrica**.

Si $x\Re y \overset{?}{\Longrightarrow} y\Re x$

Si $x\Re y \Rightarrow x \leq y$, pero de aquí no se obtiene que $y \leq x$.Las dos condiciones sólo se darán cuando $x = y$.

Por ejemplo, sea $x = 3$ e $y = 4$, se tiene que $3 \leq 4 \Rightarrow 3\Re 4$. Sin embargo $43 \Rightarrow 4\overline{\Re}3$.

Luego, no es simétrica.

iii) **Antisimétrica.**

Lo que tendríamos que ver es que: $x\Re y$ y $y\Re x \Longrightarrow x = y$

$$\left.\begin{array}{l} x\Re y \Rightarrow x \leq y \\ y\Re x \Rightarrow y \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

Luego sí es antisimétrica.

iv) **Transitiva**.

Tendríamos que ver que: $\left.\begin{array}{r} x\Re y \\ \text{e } y\Re z \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} x\Re z$

Tenemos que $\left.\begin{array}{c} x\Re y \Rightarrow x \leq y \\ \text{e} \\ y\Re z \Rightarrow y \leq z \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x\Re z$

Por lo tanto sí es transitiva.

v) **Conexa**.

Habría que ver que dados $x, y \in R$, se tiene que: $x\Re y$ ó $y\Re x$.

Ahora bien, si $x, y \in \mathbb{R}$, lo que podemos asegurar es que o $x \leq y$ o $y \leq x$, es decir, efectivamente se tiene que o $x \Re y$ o $y \Re x$. Por lo tanto, la relación es conexa.

i) Para que la relación sea de **equivalencia** es necesario que se cumplan las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En este caso en particular no se cumple la simétrica por lo que $\Re$ **no es de equivalencia**.

ii) Para que la relación sea de orden tiene que cumplir las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. $\Re$ cumple todas estas propiedades, por lo que $\Re$ es una **relación de orden**. Además como se cumple la propiedad conexa, será de **orden total.**

7.- Sea la relación binaria definida en el conjunto de los triángulos del plano por "dos triángulos T_1 y T_2 están relacionados si y sólo sí tienen al menos un ángulo igual". Estudiar qué propiedades de las relaciones binarias cumple.

SOLUCIÓN:

i) Reflexiva. Sí lo es porque un triángulo T_1, tiene todos los ángulos iguales consigo mismo, obviamente.

ii) Simétrica. Si un triángulo T_1 está relacionado con otro triángulo T_2 ambos tienen al menos un ángulo igual, por lo tanto también podemos decir que T_2 tiene al menos un ángulo igual a T_1, o lo que es lo mismo, T_2 está relacionado con T_1. Es decir si $T_1 \Re T_2 \Rightarrow T_2 \Re T_1$

iii) Transitiva. Si $T_1 \Re T_2$ entonces sabemos que T_1 y T_2 tienen al menos un ángulo igual. Por otro lado si se cumple que T_2 $\Re$

T_3, lo que sabemos es que T_2 tiene al menos un ángulo igual con T_3, pero en ningún momento eso implica que T_1 tenga algún ángulo igual con T_3, es decir, no podemos concluir que T_1 esté relacionado con T_3. Por lo tanto la relación no es transitiva.

iv) Antisimétrica. ¿Si $T_1 \Re T_2$ y $T_2 \Re T_1$ entonces podemos concluir que $T_1 = T_2$? La respuesta es evidentemente que no, ya que lo único que podemos asegurar es que al menos tienen un ángulo igual, pero de los demás ángulos no sabemos nada. Por lo tanto no es antisimétrica.

No puede ser una relación de equivalencia porque para ello tendría que ser reflexiva, simétrica y transitiva y en este caso en particular no se cumple la transitividad.

Por otro lado tampoco puede ser de orden porque para ello se exige la reflexiva, antisimétrica y transitiva y en esta relación fallan la antisimetría y la transitividad.

8.- Sea la relación binaria definida en $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$, **por** $a \Re b \Longleftrightarrow a + b = \dot{2}$. **Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados.**

a) El conjunto cociente tiene un único elemento.

b) El conjunto cociente sólo tiene 2 elementos.

c) El conjunto cociente sólo tiene 3 elementos.

d) La relación no es de equivalencia.

SOLUCIÓN:

Veamos en primer lugar que se trata de una relación de equivalencia:

$i)$ Reflexiva.

Tendríamos que comprobar que $\forall a \in \mathbb{N}$ se cumple que $a \Re a$

Ahora bien, $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + a = 2a = \dot{2} \Rightarrow a \Re a$

$ii)$ Simétrica.

Tendríamos que comprobar que $a \Re b \Rightarrow b \Re a$.

Sabemos que $a \Re b \Rightarrow a + b = \dot{2} \overset{(+ \, es \, conmutativa)}{\Longrightarrow} b + a = \dot{2} \Rightarrow b \Re a$

$iii)$ Transitiva.

Lo que habría que ver es que $a \Re b$ y $b \Re c \Rightarrow a \Re c$

Sabemos que $a \Re b \Rightarrow a + b = \dot{2}$ y $b \Re c \Rightarrow b + c = \dot{2}$

Con estos datos podemos escribir que $a + c = (a + b) + (b + c) - 2b =$

$= \dot{2} + \dot{2} - 2b \overset{(2b = \dot{2})}{=} \dot{2} \Rightarrow a \Re c$

Como la relación es reflexiva, simétrica y transitiva entonces se trata de una relación de equivalencia.

Veamos cuál es la clase de equivalencia de un elemento $a \in \mathbb{N}$.

$[a] = \overline{a} = \left\{ b \in \mathbb{N} / \, a + b = \dot{2} \right\}$. Para que al sumar dos números naturales entre sí nos de una cantidad par, sólo hay dos opciones:

$i)$ que ambos números sean pares.

$ii)$ que ambos números sean impares.

Al sumar un número par con un número impar siempre obtendremos un impar.

Por lo tanto, sólo habrán dos clases de equivalencias: la de los números pares y la de los números impares.

$$\mathbb{N}/\Re = \left\{\overline{a}, \overline{b} \ / \ a \ es \ \ par \ \ \text{y} \ \ \ b \ es \ \ impar\right\},$$

como cada clase de equivalencia está representada por un elemento de su clase, si tomamos el 2 como representante de los pares y el 1 como representante de los impares, obtenemos que:

$$\mathbb{N}/\Re = \left\{\bar{1}, \bar{2}\right\}.$$

a) Falso.

b) Verdadero.

c) Falso.

d) Falso.

9.- En $\mathbb{R}$ definimos la relacion binaria $a\Re b \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b.$ Comprobar que esta relación binaria induce una partición en $\mathbb{R}$, en la que cada clase contiene dos elementos.

SOLUCIÓN:

Veamos en primer lugar que se trata de una relación de equivalencia:

i) **Reflexiva**

$\forall a \in R$ se cumple que $a^2 + a = a^2 + a$ por lo tanto $a\Re a.$

ii) **Simétrica**

$a\Re b \Rightarrow a^2 + a = b^2 + b \Rightarrow b^2 + b = a^2 + a \Rightarrow b\Re a$

iii) **Transitiva**

$$\left.\begin{array}{c} a\Re b \Rightarrow a^2+a=b^2+b \\ \text{y} \\ b\Re c \Rightarrow b^2+b=c^2+c \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+a=c^2+c \Rightarrow a\Re c.$$

Como se cumplen $i)$, $ii)$ y $iii)$, tenemos que la relación es de equivalencia. El conjunto cociente de esta relación $\mathbb{R}/\Re = \left\{ \overline{a} \ / \ a \in R \right\}$ nos da una partición de $\mathbb{R}$.

$\overline{a} = \{b \in R \ / \ a\Re b\}, a \in \overline{a},$ vamos a ver si hay algún otro elemento en la clase de a.

$$a\Re b \Leftrightarrow a^2+a=b^2+b \Leftrightarrow a^2-b^2=b-a \Leftrightarrow (a+b)(a-b)=-(a-b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+b=-1 \Leftrightarrow b=-1-a, \text{ luego } \overline{a}=\{a,-1-a\}.$$

10.- En el conjunto de los números reales definimos la relación binaria, $x\Re y \Leftrightarrow e^x = e^y$, analizar las propiedades de esta relación binaria.

SOLUCIÓN:

Reflexiva.

$\Re$ si es reflexiva ya que $\forall\ x \in \mathbb{R}, e^x = e^x \Rightarrow x\Re x$

Simétrica

$$x\Re y \Leftrightarrow e^x = e^y \Leftrightarrow e^y = e^x \Leftrightarrow y\Re x$$

Antisimétrica.

$$\left.\begin{array}{c} x\Re y \\ y\Re x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} e^x = e^y \\ e^y = e^x \end{array}\right\} \Leftrightarrow e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

Transitiva.

$$\left.\begin{array}{l} x\Re y \\ y\Re z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} e^x = e^y \\ e^y = e^z \end{array}\right\} \Leftrightarrow e^x = e^z \Leftrightarrow x\Re y$$

Por tanto, se trata de una relación binaria que es de equivalencia y de orden al mismo tiempo.

11. Analizar qué subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, hace inversible a la aplicación

f: $\mathbb{R}$ **-** $\{1\} ------ X$

$x ------ f(x) = \frac{x-3}{2x-2}$.

SOLUCIÓN:

Para poder definir f^{-1} tenemos que tener una biyección. Para ello en primer lugar vamos a asegurarnos de que f es inyectiva.

$$f(x) = f(y) \overset{?}{\Longrightarrow} x = y$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x-3}{2x-2} = \frac{y-3}{2y-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2xy - 2x - 6y + 6 = 2xy - 2y - 6x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = 4y \Rightarrow x = y \Rightarrow f \text{ es inyectiva}$$

Para conseguir que f sea también sobreyectiva tenemos que restringir el conjunto de llegada a $\text{Im}(f)$, es decir, tenemos que ver qué valores de $\mathbb{R}$, no tienen antiimagen, la imagen de f será todo $\mathbb{R}$, menos dichos puntos:

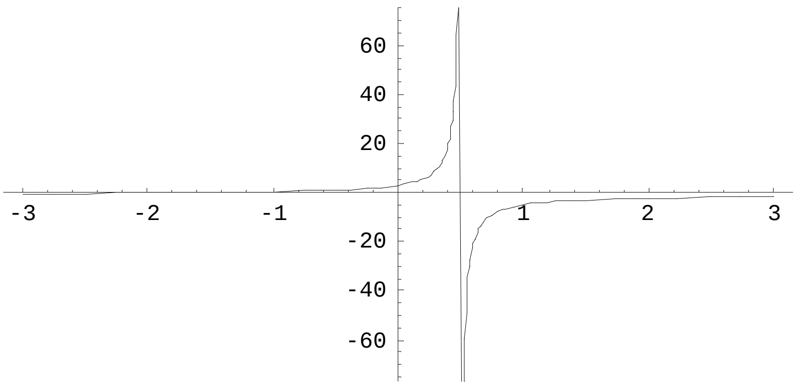
$$y = \frac{x-3}{2x-2} \Rightarrow y(2x-2) = x-3 \Rightarrow 2xy - 2y = x-3 \Rightarrow x(2y-1) = -2y-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2y-3}{2y-1}$$

Si $y=\frac{1}{2}$, es imposible encontrar un valor para x, ya que daría $x=\frac{-4}{0}$.

Luego $\forall\ y\neq\frac{1}{2}$, podemos encontrar un valor para x de manera que $f(x)=y$.

La gráfica de la función es:



en ella se puede ver que la función tiene una asíntota horizontal en $y=\frac{1}{2}$, pero que no corta a dicha asíntota, es decir, ningún punto tiene como imagen el $\frac{1}{2}$. Por tanto, el conjunto pedido es $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$.

12.- Sean los conjuntos $A=\{1,2,3,4,5\}$ y $B=\{a,b,c,d,e\}$ y la aplicación f cuyo grafo es: $G=\{(1,a),(2,a),(3,c),(4,d),(5,e)\}$. ¿Es f inyectiva?¿Es f sobreyectiva?¿Es f biyectiva?

SOLUCIÓN:

f no es inyectiva porque los elementos $1,2\in A$ tienen la misma imagen en B: $f(1)=f(2)=a$

f tampoco es sobreyectiva porque $Im(f)=\{a,c,d,e\}\neq B.$

f no puede ser biyectiva porque no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.

13.- Si la aplicación $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva razonar la veracidad o falsedad de los siguientes apartados:

a) $n(A) \leq n(B)$

b) $n(A) > n(B)$

c) f **tiene inversa.**

d) $A \subseteq B$

SOLUCIÓN:

a) Verdadero.

Si f es inyectiva quiere decir que a cada elemento de A, f le asocia un elemento en B, pero cualquier elemento de B será a lo sumo imagen de sólo un elemento de A. Por tanto B tiene que tener al menos tantos elementos como A.

b) Falso.

Por el razonamiento hecho en el apartado a).

c) Falso.

Veámoslo con un ejemplo: $f : \mathbb{N} - - - - - \mathbb{R}$

$$x - - - - - f(x) = x$$

Es evidente que no existe antiimagen para cualquier número real no perteneciente a los naturales.

d) Falso.

La aplicación $f : \mathbb{R} - - - - - \mathbb{R}^2$

$x-----f(x)=(x,x)$ es inyectiva y sin embargo $\mathbb{R}\neq\mathbb{R}^2$

14.- En $\mathbb{R}$ se define la ley de composición interna dada por: $x*y=2xy-3x-3y+3$. Comprobar si esta ley posee neutro y en caso afirmativo decir qué elemento sería.

SOLUCIÓN:

Sea el elemento neutro buscado e, dicho elemento tiene que cumplir que $\forall x\in\mathbb{R}: x*e=e*x=x$.

Pero,

$x*e=2xe-3x-3e+3=x\Longleftrightarrow 2xe-2x-3e+3=0\Rightarrow e(2x-3)=2x-3\Rightarrow e=1,$ siempre que $(2x-3)\neq 0$, es decir, cuando $x\neq 3/2$

Si $x=\frac{3}{2}$, veamos si $e=1$ funciona como neutro:

$\frac{3}{2}*1=2.\frac{3}{2}.1-3.\frac{3}{2}-3.1+3=-\frac{3}{2}\neq\frac{3}{2}$. Como no existe un e que funcione como neutro para todos los elementos de R, entonces $*$ no tiene neutro.

15.- En $\mathbb{Z}$ consideramos las dos leyes de composición internas definidas por:

$a\bullet b=a+b-8$ **y** $a*b=a+b-ab$

¿Cual de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) $\bullet$ es asociativa en $\mathbb{Z}$ **b) $(\mathbb{Z},\bullet)$ posee elemento neutro.**

c) Cada elemento de $\mathbb{Z}$ tiene simétrico con la Ley $\bullet$

d) $*$ es distributiva respecto de $\bullet$

SOLUCIÓN:

a) Esta afirmación es correcta.

$$\left.\begin{array}{r}(a\bullet b)\bullet c=(a+b-8)\bullet c=(a+b-8)+c-8=a+b+c-16\\ a\bullet(b\bullet c)=a\bullet(b+c-8)=a+(b+c-8)-8=a+b+c-16\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)$$

b) Esta afirmación es correcta.

El elemento neutro, e, tiene que cumplir que $a\bullet e=e\bullet a=a, \forall a\in\mathbb{Z}$. Por la definicion de "$\bullet$", $a\bullet e=e\bullet a$. Faltaría ver si hay algun valor fijo "e" que verifique $a\bullet e=a, \forall a\in\mathbb{Z}$

$$a\bullet e=a\Leftrightarrow a+e-8=a\Leftrightarrow e-8=0\Leftrightarrow e=8$$

Efectivamente, $a\bullet 8=a+8-8=a, \forall a\in\mathbb{Z}$

c) Esta afirmacion es correcta.

$\forall a\in\mathbb{Z}$, vamos a ver que existe, $a'\in\mathbb{Z}$, tal que $a\bullet a'=a'\bullet a=e$, (ya sabemos que $e=8$).

$$a\bullet a'=e\Leftrightarrow a+a'-8=8\Leftrightarrow a+a'=16\Leftrightarrow a'=16-a.$$

Efectivamente,
$$a\bullet(16-a)=a+(16-a)-8=a-a+16-8=8=e, \forall a\in\mathbb{Z}$$

d) Veamos que esta afirmación es falsa:

Tenemos que ver que existen valores de a,b y c tales que

$$a\bullet(b*c)\neq(a\bullet b)*(a\bullet c).$$

$$\left.\begin{array}{r}2*(3\bullet 4)=2*(3+4-8)=2*(-1)=2+(-1)-2(-1)=3\\ (2*3)\bullet(2*4)=(2+3-6)\bullet(2+4-8)=(-1)\bullet(-2)=\\ =-1+(-2)-(-1)(-2)=-5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 3\neq -5$, luego, $*$ no es distributiva respecto de $\bullet$.

BIBLIOGRAFIA

ANZOLA, M.; CARUNCHO, J.; PÉREZ-CANALES, G. (1981). *Problemas de Álgebra (Tomos 1-7)*. Madrid. SSAG.

BURGOS, J. (1999). *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. Madrid. McGraw-Hill.

CARBO, R.; DOMINGO, LL. (1987). *Álgebra Matricial y Lineal*. España. McGraw-Hill.

DE LA VILLA, A. (1994). *Problemas de Álgebra*. Madrid. Clagsa.

ESPADA BROS, E. (1984). *Problemas resueltos de Álgebra*. Barcelona. EUNIBAR.

FLAQUER, J; OLAIZOLA, J; OLAIZOLA, J. (1996*). Curso de Álgebra Lineal*. Navarra EUNSA.

FRALEIGH, J.B.; BEAUREGARD, R.A. (1989). *Álgebra Lineal*. U.S.A. Addison-Wesley Iberoamericana.

GARCÍA, J.; LÓPEZ, M. (1990). *Álgebra Lineal y Geometría*. Alcoy. Marfil.

GRANERO, F. (1994). *Álgebra y Geometría Analítica*. Madrid . McGraw-Hill. GROSSMANN, S.I. (1996). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México. McGraw-Hill.

GUERRA, N.; LÓPEZ, B. (1999). Problemas resueltos tipo test de Álgebra Lineal (Con esquemas teóricos). Las Palmas de G.C. El Libro Técnico.