ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Se ha trabajado con números complejos, polinomio y matrices y hemos efectuado con ellos ciertas operaciones: sin embargo no todas las operaciones se comportan de la misma manera, por ejemplo la conmutatividad de polinomios no se presenta en matrices.

Es posible que dos conjuntos formados por elementos de diferente naturaleza y provistos de operaciones distintas tengan, sin embargo el mismo comportamiento algebraico.

Es decir que las operaciones obedezcan a las mismas leyes. Se dice en el caso que ambos sistemas poseen la misma estructura algebraica

Tipos de Estructuras

Las estructuras algebraicas las podemos clasificar:

- Grupo
- Anillo
- Campo

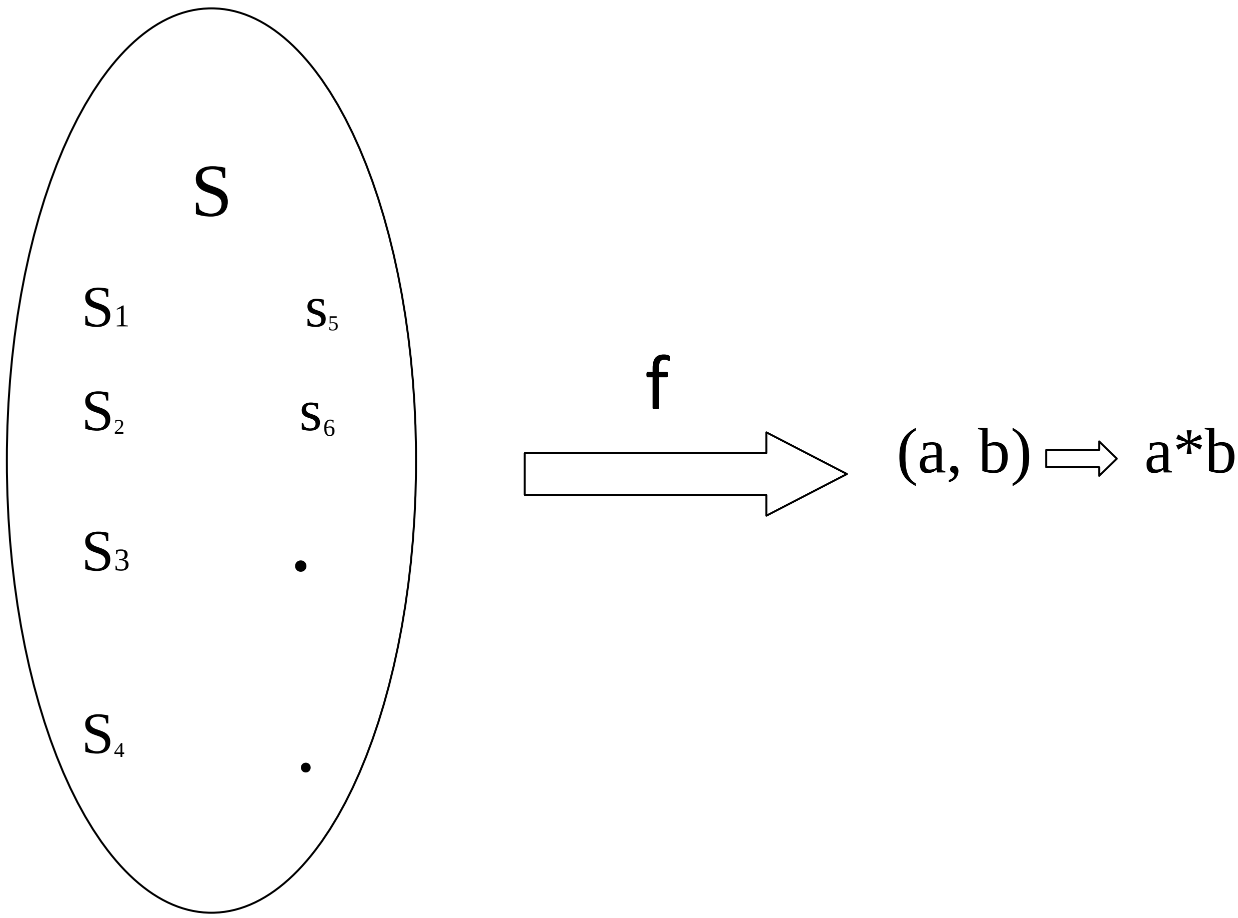
Operación Binaria y sus Propiedades

Cuando hablamos de una operación binaria nos tenemos que referir antes matemáticos dónde podemos realizar las operaciones comunes.

El hablar de operaciones como debemos recordar que se aplican a elementos de la misma especie termino binario además de que el resultado no depende de los elementos de partida sino también debe importar el orden. (matrices)

Definición

Una operación binaria $*$ definida en un subconjunto de S es una operación es una función en S. la imagen del par ordenado (A, B) bajo la operación $*$ se representa de la siguiente manera:



Ejemplo de Operaciones Binarias

- Suma y multiplicación del conjunto de los números naturales.
- La unión e intersección de conjuntos
- La adición y multiplicación de matices cuadrados
- La división entre números complejos con el denominador diferente de cero

NOTA: El concepto de operación binaria no se debe de limitar a las operaciones usuales. Tenemos que tomar en cuenta que pueden admitirse nuevas operaciones binarias.

G $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ $\square$

$\square$	α	β	γ
α	α	β	γ
β	d	β	α
γ	α	β	γ

$\gamma \square \gamma = \gamma$

$\gamma \square \alpha = \alpha$

$\alpha \square \gamma = \gamma$

$\alpha \square \alpha = \alpha$

$\beta \square \gamma = \alpha$

$\gamma \square \beta = \beta$

Definición

Sea $*$ una operación binaria definida en el conjunto S, y sea t un subconjunto de S. Se dice que t es cerrado respecto a la operación asterisco y cumple lo siguiente:

$\forall$ a, b $\in t$

Se cumple que a $*$ b pertenece a t es decir un subconjunto t es cerrado respecto a la operación $*$ si al aplicar dicha operación a dos elementos cualquiera de t se obtiene como resultado otro elemento de t.

El resultado de aplicar con operaciones binarias siempre tendrá un solo resultado.

1) $F = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in I \quad a \neq 0 \text{ y } b \neq 0\}$

$$\frac{a_1}{b_2} * \frac{a_2}{b_2} = 2\,\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \quad \forall \ (\frac{a_1}{b_1}), (\frac{a_2}{b_2}) \in k$$

(F, $*$) estructura de grupo abeliano.

2) $*$ y Δ

$E = \{(2a, b) \mid a, b \in I\}$

$(x, y) * (z, w) = (xz + xw + yz + yw)$

$(x, y)\ \Delta\ (z, w) = (xz, yw)$

Determinar

a) Si la operación $*$ es cerrada

b) Demuestra que Δ es asociativa

c) Obtén si existen los elementos idénticos como para $*$ y Δ

3) $(A, +, *)$ donde $A = \{(a, b) \mid a, b \in z\}$

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \ \forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A$$

Sea el sistema algebraico $*$. Sabiendo que $(A, +)$ tiene estructura de grupo abeliano y que se cumple la cerradura. Y la asociatividad respecto a la operación $*$.

a) Determinar si el sistema $(A, +, *)$ tiene estructura de anillo.
b) En caso de que el sistema $(A, +, *)$ sea anillo determines que tipo de anillo es.

4) Sea el sistema $(B, *)$ donde

$B = (a, b, c, u)$ y la operación $*$ está definida de acuerdo a la siguiente tabla:

*	a	b	c	u
a	b	c	u	a
b	a	u	c	b
c	u	a	b	c
u	a	b	c	u

a) Determinar si para la operación $*$ existe:

1) Cerradura
2) Elemento Idéntico
3) Los Inversos
4) Asociatividad

b) ¿El sistema $(a, *)$ en grupo? ¿Por qué?

5) Sea el conjunto de funciones reales de variable real

$M = \{f, g, h\}$ cuyas reglas de correspondencia son:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $g(x) = \frac{x-1}{x}$ $h(x) = x$

Y la operación composición es definida por:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

a) Completar la siguiente tabla para la operación composición.

$\circ$	f	g	h
f		h	
g	h	f	
h			h

b) Considerando que la composición es asociativa determinar si $(m, \circ)$ es un grupo. Si lo es obtener su elemento idéntico, en caso negativo, indicar los axiomas que no satisfacen.

□	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	β	α
γ	α	β	γ

(G, □)

β□ γ = α

γ □α = α

Cerradura

Sea $*$ una operación binaria definida en un conjunto S y sea T un subconjunto de S. Se dice que T es cerrada respecto a la operación $*$ si al aplicar la operación $*$ el resultado cae dentro del conjunto T.

$$a * b \in T \quad \forall \quad a, b \in T$$

Elemento Idéntico

Sea $*$ una operación binaria definida en un conjunto S. Podremos hablar de elemento idéntico siempre y cuando cumpla con las siguientes características.

1) Un elemento $e \in S$ es idéntico por la izquierda para la operación $*$ si cumple con lo siguiente:

$$e \in S \begin{cases} e * a = a & \text{elemento identico por la izquierda } \forall\, a \in S \\ a * e = a & \text{elemento identico por la derecha } \forall\, a \in S \end{cases} \Big\} \; e * a = a = a * e$$

Podemos hablar de que el elemento $e \in S$ es idéntico para la operación $*$ si cumple la existencia tanto por la derecha como por la izquierda de lo antes mencionado.

□	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	β	α
γ	α	β	γ

Elemento Inverso

Sea $*$ una operación definida en un conjunto S.

1) Sea e el elemento idéntico por la izquierda para la operación $*$. Mientras que un elemento $\hat{a}$ el cual llamaremos elemento inverso que necesariamente debe de pertenecer al conjunto S. Podremos hablar del elemento inverso por la izquierda si cumple con la siguiente condición:

$\hat{a} \in S$ { $\hat{a} * a = e$ elemento inverso por la izquierda $\forall\, \hat{a} \in S$

Elemento inverso

Sea e un elemento idéntico por la derecha para la operación $*$. Podemos hablar de un elemento inverso "$\hat{a}$ "que pertenece al conjunto S si cumple con la siguiente condición.

$\hat{a} \in S$ {$a * \hat{a} = e$ elemento inverso por la derecha $\forall\, \hat{a} \in S$

Podemos hablar de la existencia del elemento inverso siempre y cuando se de la existencia de dicho elemento tanto por la izquierda como por la derecha.

En resumen $\hat{a} * a = e = a * \hat{a}$

NOTA: Para poder hablar M elemento inverso se requiere la existencia necesariamente de un elemento idéntico.

$\square$	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	β	α
γ	γ	β	α

Inverso por la izquierda

$\alpha \square \alpha = \alpha$

$\alpha \square \beta = \beta$

$\alpha \square \gamma = \gamma$

Inverso por la derecha

$\alpha \square \alpha = \alpha$

$\beta \square \alpha = \beta$

$\gamma \square \alpha = \gamma$

α Idéntico

__ $\square$ $\alpha = \alpha$

__ $\square$ $\beta = \alpha$

__ $\square$ $\gamma = \alpha$

$\alpha \square$ __ $= \alpha$

$\beta \square$ __ $= \alpha$

$\gamma \square$ __ $= \alpha$

Ejercicio extra: Serie.

1) Sea el conjunto $F = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ y las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ definidas de la siguiente manera:

$$(x, y) \oplus (m, n) = (x+m, y+n)$$

$$\forall (x, y), (m, n) \in F$$

$$(x, y) \otimes (m, n) = (0, yn)$$

Considerando que el sistema $(F, \oplus)$ es un grupo, determinar si el sistema $(F, \oplus, \otimes)$ es un anillo en caso afirmativo determina si $(F, \oplus, \otimes)$ es un anillo con unidad, en caso negativo indicar los axiomas que no satisfacen.

2) Sea H un conjunto de por los menos dos elementos con $K_0 \in H$ y Δ como operación binaria de H tal que $a \, \Delta \, b = K_0 \;\; \forall \;\; a, b \in H$ .Determinar si dicha operación cumple con lo siguiente:

a) Es conmutativa

b) Es asociativa

c) Tiene elemento idéntico

□	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	β	α
γ	γ	β	α

$\alpha \, \square \, \alpha = \alpha$ α es elemento inverso.

$\alpha \, \square \, \alpha = \alpha$

$\beta \, \square \, \gamma = \alpha$ β no es elemento inverso.

$\gamma \, \square \, \beta = \beta$

$\gamma \, \square \, \gamma = \alpha$ γ es elemento inverso.

$\gamma \, \square \, \gamma = \alpha$

Asociatividad

Sea $*$ una operación binaria definida en un conjunto S se dice que la operación $*$ es asociativa si cumple con lo siguiente:

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall \quad a, b, c \in S$$

□	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	β	α
γ	γ	β	α

$\alpha \, \square \, (\beta \, \square \, \gamma) = (\alpha \, \square \, \beta) \, \square \, \gamma$

$\alpha \, \square \, \alpha = \beta \, \square \, \gamma$

$\underline{\alpha = \alpha}$ **se cumple**

$\beta \, \square \, (\beta \, \square \, \gamma) = (\beta \, \square \, \beta) \, \square \, \gamma$

$\beta \, \square \, \alpha = \beta \, \square \, \gamma$

$\underline{\beta = \alpha}$ **no se cumple**

Conmutatividad

Sea $*$ una operación binaria definida para el conjunto S se dice que la operación $*$ es conmutativa si cumple con lo siguiente:

$$a * b = b * a \quad \forall \quad a, b \in S$$

Ejemplo:

Sea el sistema $(B,*)$ donde B es le conjunto formado por $B= \{a, b, c, u\}$ y la operación $*$ definida de acuerdo a la siguiente tabla:

*	a	b	c	u
a	b	c	u	a
b	a	u	c	b
c	u	a	b	c
u	a	b	c	u

1) Determinar si la siguiente operación cumple con cerradura

2) Elemento idéntico

3) Los inversos

4) Asociatividad

5) Conmutatividad

1) $a * b = b * a \;\; \forall \;\; a, b, c, u \in B \quad \therefore$ se cumple la cerradura

2)
$$\left.\begin{array}{ll} u * a = a & u * c = c \\ a * u = a & c * u = c \\ & \\ u * b = b & u * u = u \\ b * u = b & u * u = u \end{array}\right\} \therefore \; u \text{ es el elemento idéntico}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} a * c &= u \\ c * a &= u \end{aligned}\right\} \therefore$$ para el elemento a su inverso es c

$$\left.\begin{aligned} b * b &= u \\ b * b &= u \end{aligned}\right\} \therefore$$ b es el inverso de b

$$\left.\begin{aligned} c * a &= u \\ a * c &= u \end{aligned}\right\} \therefore$$ a es el inverso de c

$$\left.\begin{aligned} u * u &= u \\ u * u &= u \end{aligned}\right\} \therefore$$ u es el inverso de u

4)

$b * (a * c) = (b * a) * c$

$b * u = a * c$

$b \neq u$ $\therefore$ **por lo tanto no es asociativa**

5)

$a * b = b * a$

$c \neq a$ $\therefore$ **no es conmutativa**

Ejemplo:

Considerando las siguientes operaciones binarias $(*, \Delta)$ definidas en un conjunto E.

$E = \{(2a, b) \mid a, b \in I\}$

Definida de la siguiente manera:

$(a, b) * (c, d) = (ac + ad + bc, bd)$

$(a, b)\ \Delta\ (c, d) = (ac, bd)\quad \forall\ (a, b), (c, d) \in E$

a) Determinar si la operación $*$ es cerrada

$$\left.\begin{matrix}(2a_1, b_1)\\ \\ (2a_2, b_2)\end{matrix}\right\}\quad \begin{aligned}(2a_1, b_1) * (2a_2, b_2) &= (2a_1 2a_2 + 2a_1 b_2 + b_1 2a_2, b_1 b_2)\\ &= [2(2a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1), b_1 b_2)]\end{aligned}$$

b) Determinar si es asociativa

$$\left.\begin{matrix}(2a, b)\\ (2c, d)\\ (2e, f)\end{matrix}\right\}\quad \begin{gathered}(2a, b)\ \Delta\ [(2c, d)\ \Delta\ (2e, f)] = [(2a, b)\ \Delta\ (2c, d)]\ \Delta\ (2e, f)\\ (2a, b)\ \Delta\ (4ce, df) = (4ac, bd)\ \Delta\ (2e, f)\\ (2(4aec), b\ (df)) = (2(4ace), b\ (df))\end{gathered}$$

∴ Es asociativa

c) Obtener si existen los idénticos tanto para la operación $*$ y Δ

$(2a, b) * (2u_1, u_2) = (2a, b)$

$(2a2u_1 + 2au_2 + 2bu_1, bu_2) = (2a, b)$

$(2(2au_1 + au_2 + bu_1) = 2a$

$bu_2 = b$

$u_2 = 1$

$2(2au_1 + a + bu_1) = 2a$

$(2au_1 + a + bu_1) = a$

$2au_1 + bu_1 = 0$

$u_1(2a + b) = 0$

$u_1 = 0$ $\therefore$ $(2u_1, u_2) \Longrightarrow (0, 1)$

$(2a, b)\ \Delta\ (2u_1, u_2) = (2a, b)$

$(4au_1, bu_2) = (2a, b)$

$$\left.\begin{array}{ll} 4au_1 = 2a & \therefore\ u_1 = \frac{1}{2} \\ bu_2 = b & \therefore\ u_2 = 1 \end{array}\right\} \quad (2u_1, u_2) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Anexar a serie

1) En el conjunto de los números reales se define la operación binaria $*$ como:

$a*b = k^2a + (2k^2-1)b$

El conjunto de valores de K que hacen a $*$ conmutativa es:

2) Sea el conjunto $W = \{2n \mid n \in Z\}$ y las operaciones $+$ y $*$ la adición y multiplicación usuales en los enteros. El sistema $(W, +, *)$ es anillo de que tipo:

Estructura de grupo

Se emplea el nombre de grupo para designar la estructura que posean los sistemas formados por un conjunto y una operación binaria cuando dicha operación es:

-Asociativa

-Tiene elemento idéntico y

-Todos los elementos del conjunto tienen inverso.

Subgrupos

Cuando un sistema tiene estructura de grupo es posible que algunos subconjuntos de dicho sistema tengan por sí mismo estructura de grupo en tal caso los llamamos **subgrupos**.

Sea el conjunto formado por el conjunto G y la operación $*$, recordando que la operación $*$ es una operación binaria al cual podemos conformar un subconjunto S y podemos decir que dicho subconjunto S tiene estructura de grupo bajo la operación $*$ si y solo si cumple con lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a * b \in S \\ 2)\ \text{Si existe elemento inverso } \hat{a} \end{array}\right\} \quad a, b \in S$$

Grupo Abeliano

Grupo Conmutativo

Un grupo se dice que es Abeliano si cumple con la de propiedad de conmutatividad es decir que: $a * b = b * a \quad \forall \ a, b \in G$

Estructura de Anillo y de Campo

Estructura tipo Anillo

Sea A un conjunto no vacío y sean los operadores binarios $+ \ \cdot$ definidos precisamente para el conjunto A diremos que dicho sistema $(A, +, \cdot)$ tiene estructura tipo anillo si cumple con:

- Asociatividad

- Conmutatividad

- Elemento idéntico

- Elemento inverso

para lo que es la adición mientras para lo que es la multiplicación revisaremos la asociatividad entre dichos elementos así como trabajaremos tanto con la operación adición(+) y multiplicación(·) a la vez.

$(A, +, \cdot)$

$a, b, c \in A$

1) $a + (b + c) = (a, b) + c$ **Asociatividad**

2) $a + b = b + a$ **Conmutatividad**

3) $a + 0 = a$ **Donde 0 es mi elemento idéntico**

4) $a + (-a) = 0$ **Donde –a es mi elemento inverso**

5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ **Asociatividad para el producto**

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

Ejemplos de estructura tipo Anillo

Números enteros, números racionales, números reales así como las matrices cuadradas de orden n, los ejemplos antes mencionados serán validos tanto como para la adición y la multiplicación.

Estructuras tipo Anillo Conmutativo y Anillo con Unidad

El hablar de estructuras que se comportan como anillo conmutativo, así como estructuras tipo anillo con unidad, es porque precisamente estas propiedades se presentan en el producto (como operación binaria) de dicha estructura.

Debe de cumplir las propiedades anteriores mas la conmutatividad para el producto y si cumple con el elemento idéntico es un anillo conmutativo con unidad.

+ Cerradura
Asociatividad
Conmutatividad
Elemento idéntico
e inverso

Estructura de anillo

· Cerrada
Asociativa
Distributiva

Anillo conmutativo

Conmutatividad

Elemento idéntico

Anillo conmutativo con unidad

Estructura tipo Campo

Un campo es un anillo conmutativo con unidad, cuyos elementos distintos de cero tienen un inverso para la operación producto.

Ejemplos

Números enteros inversos complejos tanto para la suma como para el producto por mencionar alguno.

Sea K un conjunto de por lo menos dos elementos así como las operaciones binarias de suma y producto definido en el conjunto K.

Estaremos hablando de una estructura tipo campo si cumple con lo siguiente:

$(K, +, \cdot)$ a, b, c $\in$ K

Para la operación **(+)**

1) a + b **Cerradura**

2) a + (b + c) = (a + b) + c **Asociatividad**

3) (a + b) = (b + a) **Conmutatividad**

4) a + 0 = a **Existencia del elemento idéntico**

5) a + (-a) = 0 **Existencia del elemento inverso**

Para la operación $(\cdot)$

6) $a \cdot b$ **Cerradura**

7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ **Asociatividad**

8) $a \cdot b = b \cdot a$ **Conmutatividad**

9) $a \cdot 1 = a$ **Existencia del elemento idéntico**

10) $a \cdot a^{-1} = 1$ **Existencia del elemento inverso**

11) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$