RAICES DE POLINOMIOS

- El teorema fundamental del Algebra
- Evaluación
- Aproximación y recuento de raíces

Generalidades

Polinomio de grado *n*:

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x_{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

⇩ r es raíz de P(x) si P(r)=0.

⇩ r es raíz de multiplicidad m de P(X) si existe un polinomio Q(x) con $P(X) = (x-r)^m Q(x)$ y $Q(r) \neq 0$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(r) = 0,\ P'(r) = 0,\ \ldots ,\ P^{(m-1}(r) = 0,\ P^{(m}(r) = 0$$

⇩ *Teorema fundamental del Algebra*: Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas contadas con multiplicidad.

Regla de Horner

Teorema del resto:

P(a) es el resto de la división de P(x) por (x – a)

$$P(x) = Q(x)(x-a) + R(x); \quad \text{grado}(R(x)) = 0; \quad P(a) = R$$

Consecuencia: P'(a) es el valor del cociente anterior en x = a

$$P'(x) = Q'(x)(x-a) + Q(x)\ ; \quad P'(a) = Q(a)$$

Algoritmo de Horner:

$q_{n-1} = a_n$

for $k = n-2, n-3, \ldots, 0$ **do**

$\qquad b_k = a_{k+1} + a q_{k+1}$

end

$P(a) = a_0 + a q_0$

Aplicaciones del algoritmo de Horner

- Cálculo del cociente y el resto de dividir un polinomio P(x) por (x-a): Q(x) y R con

  P(x)= Q(x)(x-a)+R.
- Evaluación de un polinomio P(x) en un valor real a: P(a).
- Deflacción de un polinomio: si a es raíz de P(x), P(x) es divisible por (x-a) y Q(x) = P(x)/(x-a) es una deflacción.
- Método de Newton para polinomios

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

Ejemplo

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -5 & 4 & -3 & 2 \\
2 & & 2 & -6 & -4 & -14 \\
\hline
 & 1 & -3 & -2 & -7 & \vert\ -12
\end{array}$$

Resto = p(2)

Cociente

$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 7$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & -2 & -7 \\
2 & & 2 & -2 & -8 \\
\hline
 & 1 & -1 & -4 & \vert\ -15
\end{array}$$

p'(2)

Paso de Newton

$x - p(x)/p'(x) =$

$2 - 12/15 = 6/5$

Acotación de raíces reales

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x_{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ \mathbf{a_n \neq 0}$$

- **Cota general (Mc Laurin):** Sean $A = \max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$, $M = \{|a_n/a_0|, \ldots, |a_1/a_0|\}$, y sea $r \in \mathbb{R}$ con $P(r) = 0$, entonces

$$1/(1+M) < |r| < 1+(A/|a_n|)$$

- **Regla de Newton:** Un número natural *k* es cota superior de las <u>raíces positivas</u> de P(x) si

$$P(k)\geq 0,\ P'(k)\geq 0,\ \ldots,\ P^{(n-1}(k)\geq 0,\ P^{(n}(k)>0.$$

- **Regla de Laguerre:** *k* es cota superior de las <u>raíces positivas</u> de P(x) si al dividir P(x) por (x-*k*) todos los coeficientes del cociente son ≥0 y el resto es >0.

Recuento de raíces reales

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$v(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ = nº de cambios de signo en la suc. sin ceros

- **Regla de los signos de Descartes:**

$$v(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \equiv \text{nº raíces reales positivas (mod 2)}$$

- **Regla de Sturn:** Si $P(x)$ no tiene raíces multiples y $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Entonces el número de raíces reales de $P(x)$ en el intervalo (a, b) coincide con

$$v(P_0(a), \ldots, P_m(a)) - v(P_0(b), \ldots, P_m(b)),$$

siendo $P_0(x) = P(x)$, $P_1(x) = P'(x)$,

$P_2(x) = -R_2(x)$ con $P(x)=P'(x)Q_2(x)+R_2(x), \ldots,$

$P_k(x) = -R_k(x)$ con $P_{k-2}(x)=P_{k-1}(x)Q_k(x)+R_k(x), \ldots, P_m(x)=\text{cte}.$