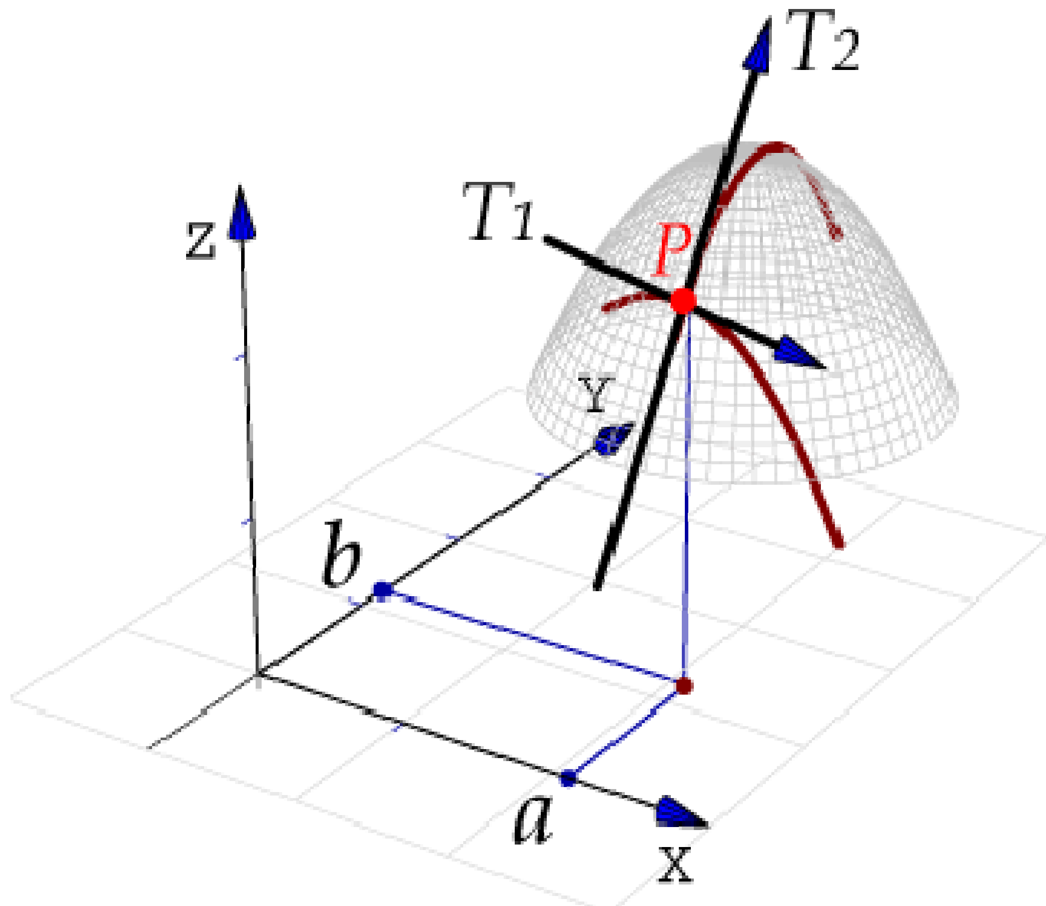
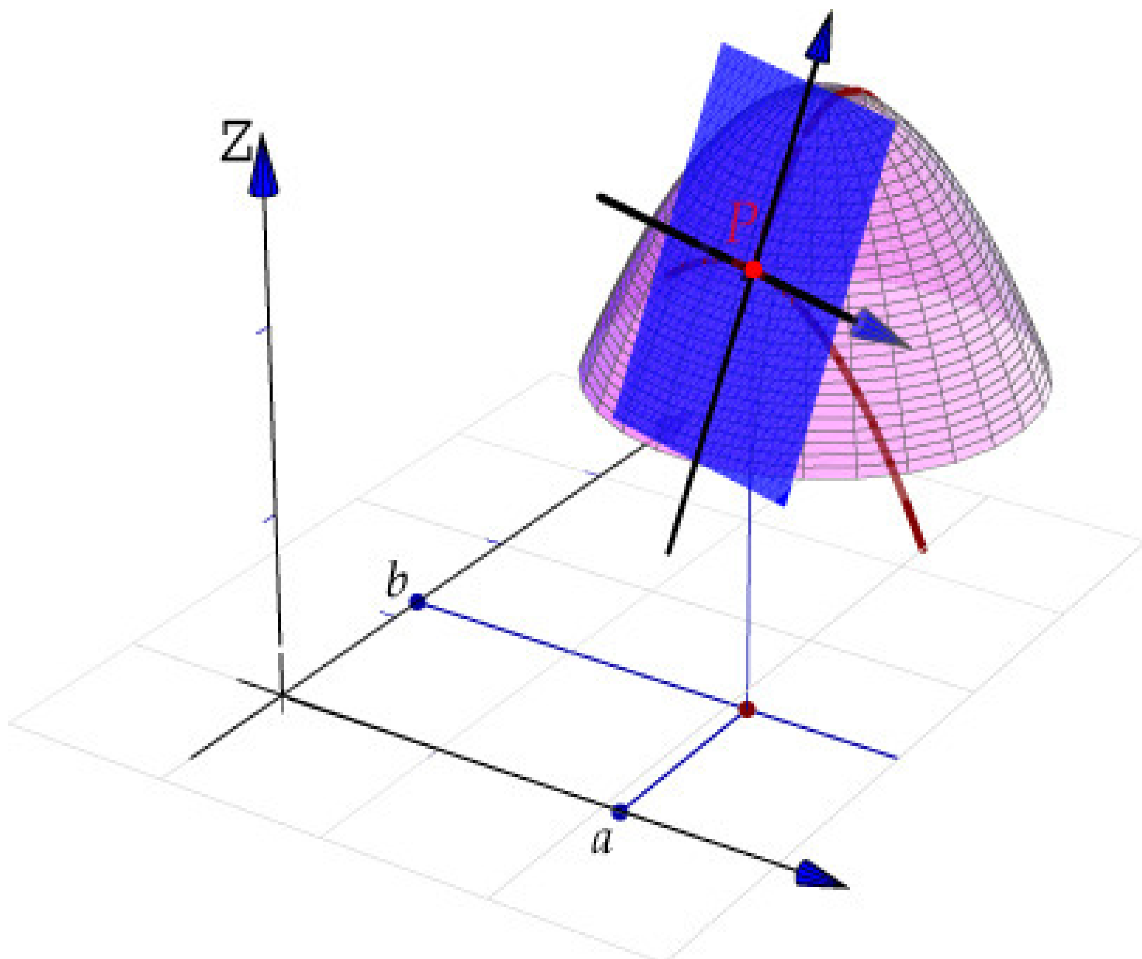
Plano Tangente a una superficie



Plano Tangente a una superficie

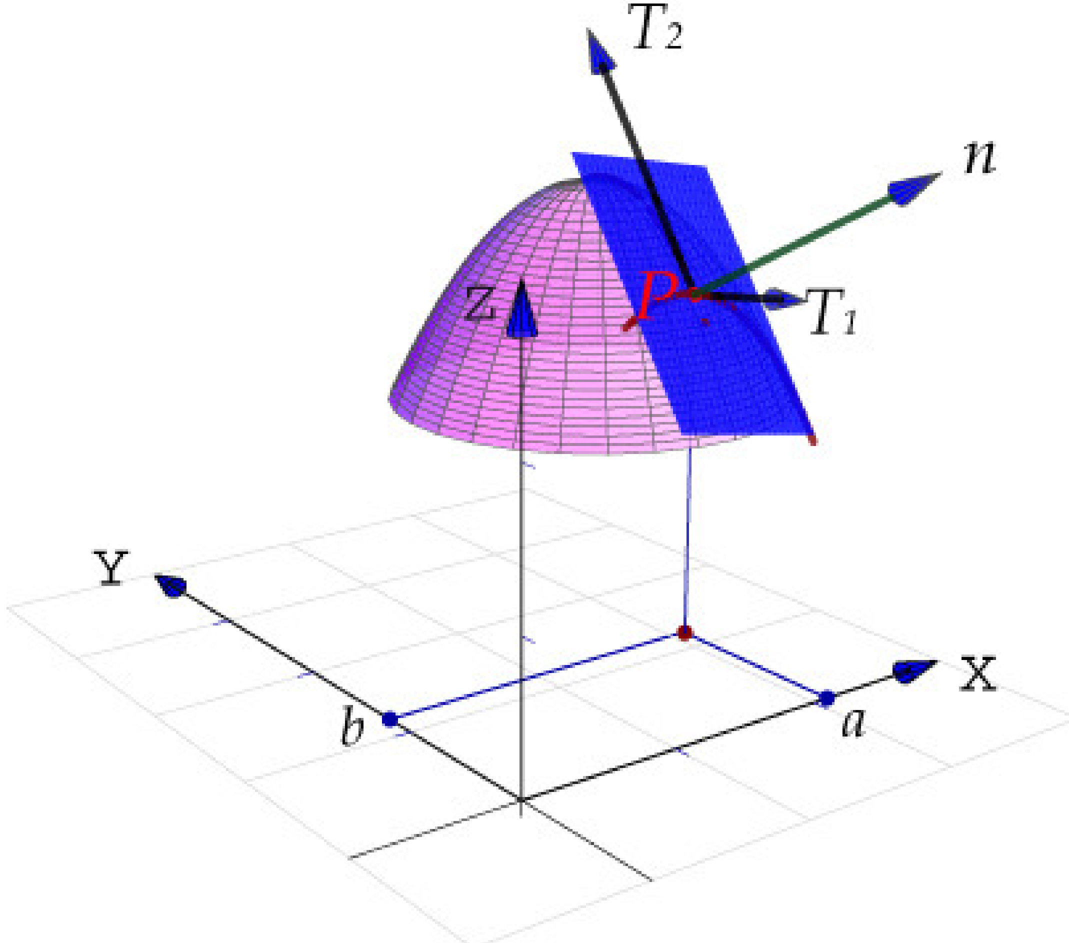


Plano Tangente a una superficie

Sea *z= f* (x , y) una función escalar con derivadas parciales continuas en *(a , b)* del dominio de f . El plano tangente a la superficie en el punto *P(a, b, f(a, b))* es el plano que pasa por *P* y contiene a las rectas tangentes a las dos curvas

$$C_1 : \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = a \end{cases} \qquad C_2 : \begin{cases} z = f(x, y) \\ y = b \end{cases}$$

Plano Tangente a una superficie



Ecuación del Plano tangente

Dirección de un vector tangente a C_1 en P

$$\vec{u} = \left(1, 0, f_x(a,b)\right)$$

Dirección de un vector tangente a C_2 en P

$$\vec{v} = \left(0, 1, f_y(a,b)\right)$$

Ecuación del Plano tangente

Dirección de un vector normal del plano tangente a la superficie en *P es:*

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(a,b) \\ 0 & 1 & f_y(a,b) \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \left(-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1 \right)$$

Ecuación del Plano tangente

Punto por donde pasa el plano: $P\left(a, b, f(a,b)\right)$

Punto genérico del plano: $X\left(x, y, z\right)$

Ecuación normal del plano:

$$\vec{n} \bullet \left(\vec{X} - \vec{P}\right) = 0$$

$$\boxed{f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-\left(z-f(a,b)\right)=0}$$

Recta normal a una superficie

Sea una función escalar con derivadas parciales continuas en *(a , b)* del dominio de *f*. La recta que pasa por el punto *P(a, b, f (a, b))* en la dirección del vector

$$\vec{n} = \left(f_x(a,b), f_y(a,b), -1\right)$$

se conoce como recta normal a la superficie en el punto *P.*

Ecuación de la recta normal

Punto por donde pasa la recta: $P\left(a,b,f(a,b)\right)$

Punto genérico de la recta: $X\left(x,y,z\right)$

Dirección de la recta: $\vec{n}=\left(f_x(a,b),f_y(a,b),-1\right)$

Ecuación simétrica de la recta normal:

$$\boxed{\frac{x-a}{f_x(a,b)}=\frac{y-b}{f_y(a,b)}=\frac{z-f(a,b)}{-1}}$$

Plano Tangente y recta normal a una superficie

Sea S una superficie de ecuación dada por:

$$F(x, y, z) = 0$$

Sea *P (a, b, c)* un punto de *S*

Sea *C* una curva contenida en *S* que pasa por *P,* definida por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Plano Tangente y recta normal a una superficie

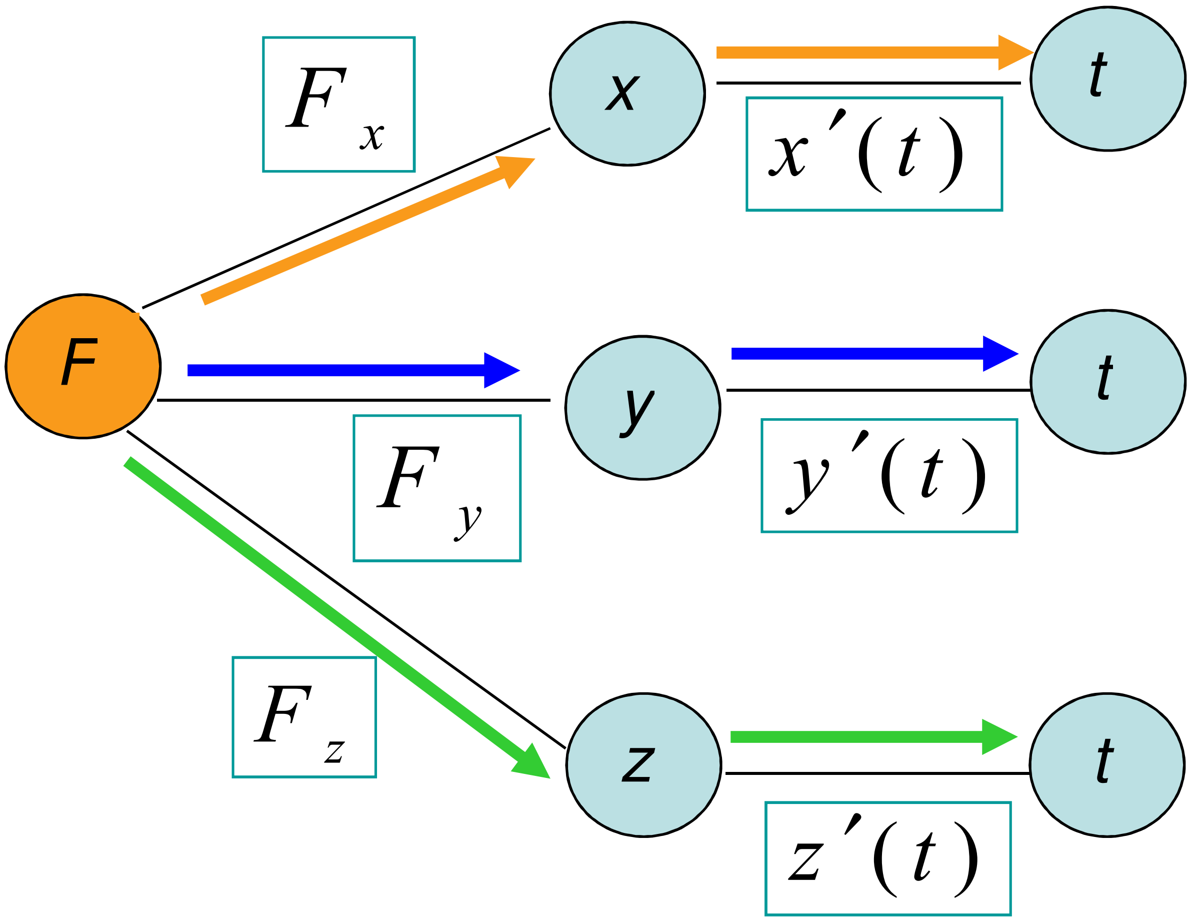
Entonces *F* sobre los puntos de la curva vale:

$$F\left(x(t), y(t), z(t)\right) = 0$$

Si *F* es diferenciable y existen las derivadas de *x*, *y* ,*z* con respecto a *t,* de la regla de la cadena se sigue :

$$F'\left(t\right) = 0$$

Plano Tangente y recta normal a una superficie



Plano Tangente y recta normal a una superficie

$$F'(t) = 0$$

$$F_x(x,y,z)\,x'(t) + F_y(x,y,z)\,y'(t) + F_z(x,y,z)\,z'(t) = 0$$

En el punto *(a, b, c),* expresado en forma vectorial sería:

$$\vec{\nabla}F(a,b,c) \bullet \vec{r}\,'(t_0) = 0$$

Gradiente

Vector tangente a la curva

Plano Tangente y recta normal a una superficie

El gradiente en *P* es ortogonal al vector tangente de toda curva contenida en *S* que pase por *P*.

Todas las rectas tangentes en *P* están en un plano que es normal al gradiente de *F* en *P* y contiene a P.

$$\vec{\nabla} F(a,b,c) \bullet \vec{r}\,'(t_0) = 0$$

Gradiente

Vector tangente a la curva

Plano Tangente y recta normal a una superficie

Sea F diferenciable en un punto *P (a, b, c)* de la superficie *S* dada por:

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{con} \quad \vec{\nabla} F(a,b,c) \neq 0$$

El plano que pasa por ***P*** y es normal a $\vec{\nabla} F(a,b,c)$ se llama <u>el plano tangente a *S* en ***P***.</u>

La recta que pasa por ***P*** en la dirección de $\vec{\nabla} F(a,b,c)$ se llama <u>la recta normal a *S* en ***P***.</u>

Ecuación del plano tangente a una superficie

Sea *F* diferenciable en un punto ***P*** *(a, b, c),* una ecuación del plano tangente a la superficie *S* dada por $F(x, y, z) = 0$ en *(a, b, c)* es

$$\boxed{F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0}$$

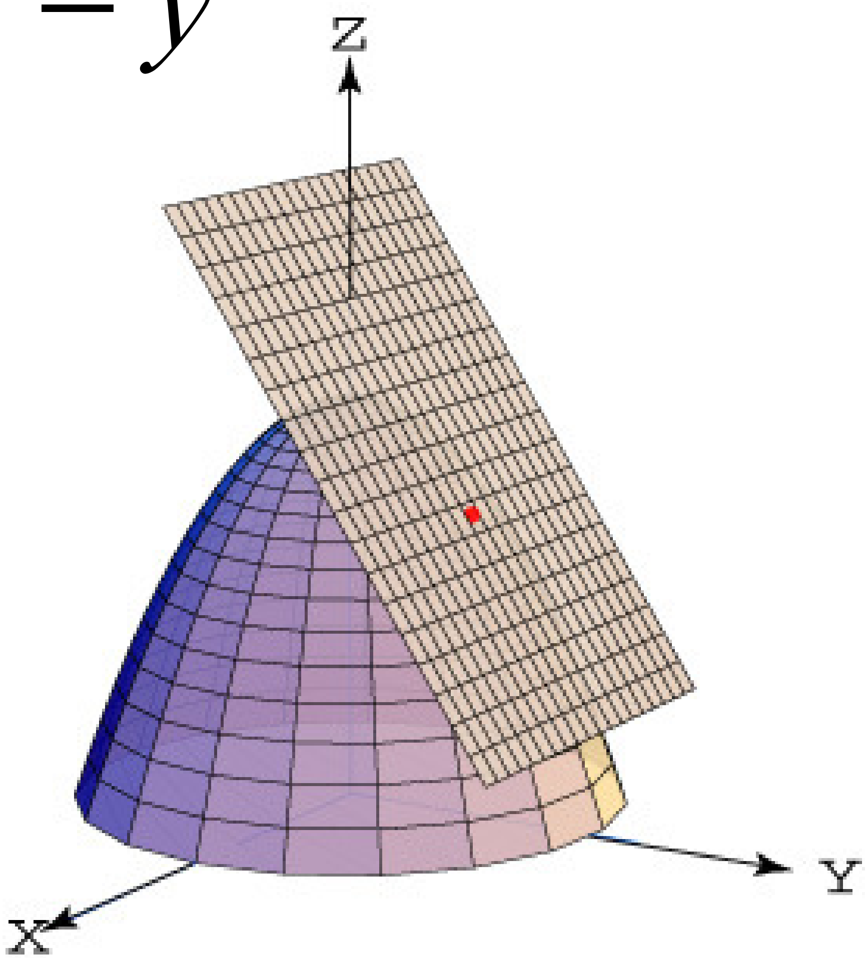
Ecuación de la recta normal a una superficie

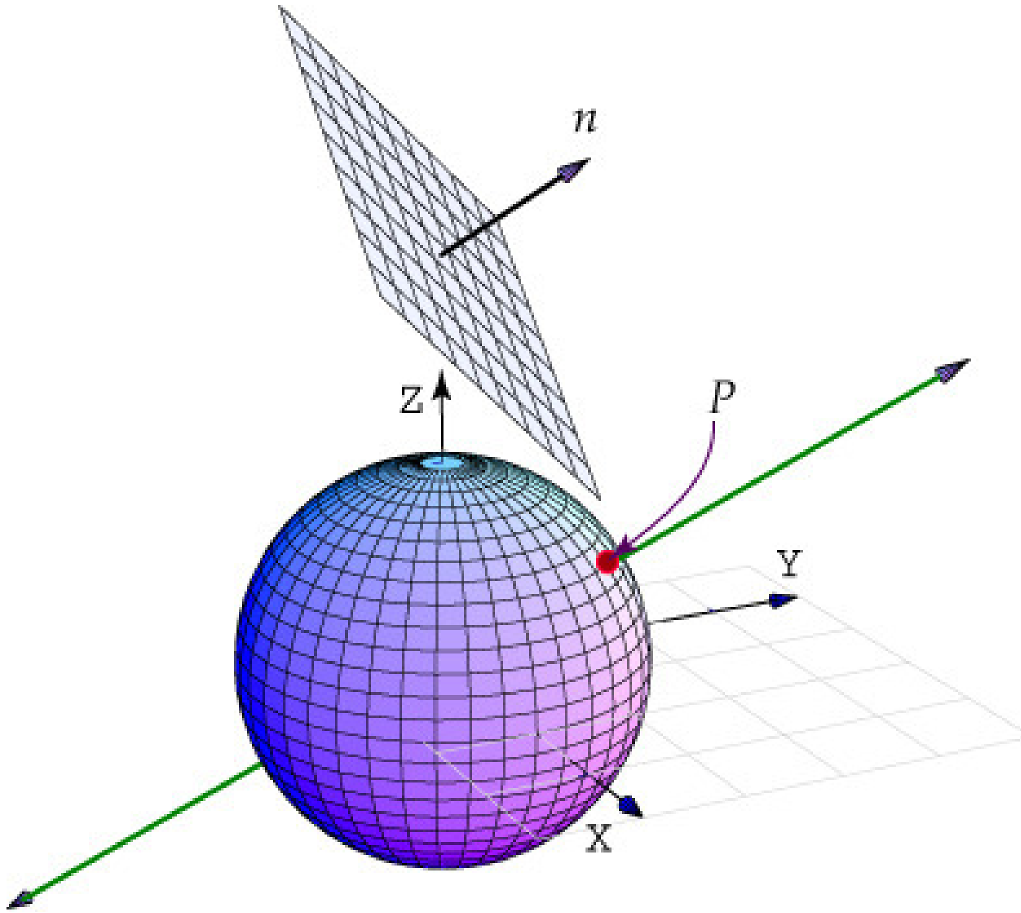
Sea *F* diferenciable en un punto ***P*** *(a, b, c)*, una ecuación de la recta normal a la superficie *S* dada por $F(x, y, z) = 0$ en *(a, b, c)* es

$$\boxed{\frac{x-a}{F_x(a,b,c)} = \frac{y-b}{F_y(a,b,c)} = \frac{z-c}{F_z(a,b,c)}}$$

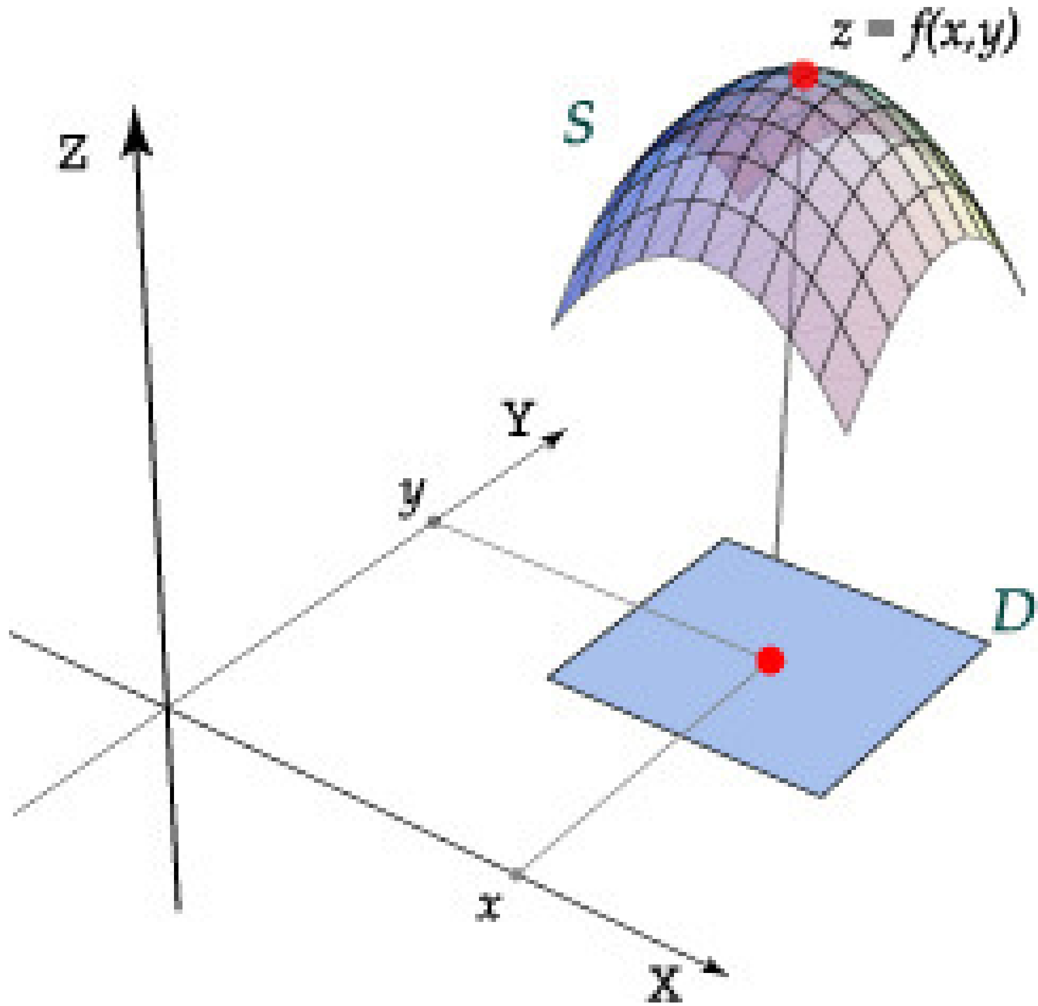
Plano tangente a un paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$




n
P
Z
Y
X

Extremos absolutos y extremos relativos



Extremos absolutos

Sea *f (x, y)* una función de dos variables definida y continua en una región cerrada y acotada *D* del plano *xy*

Existe al menos un punto en *D* donde *f* alcanza un valor mínimo.

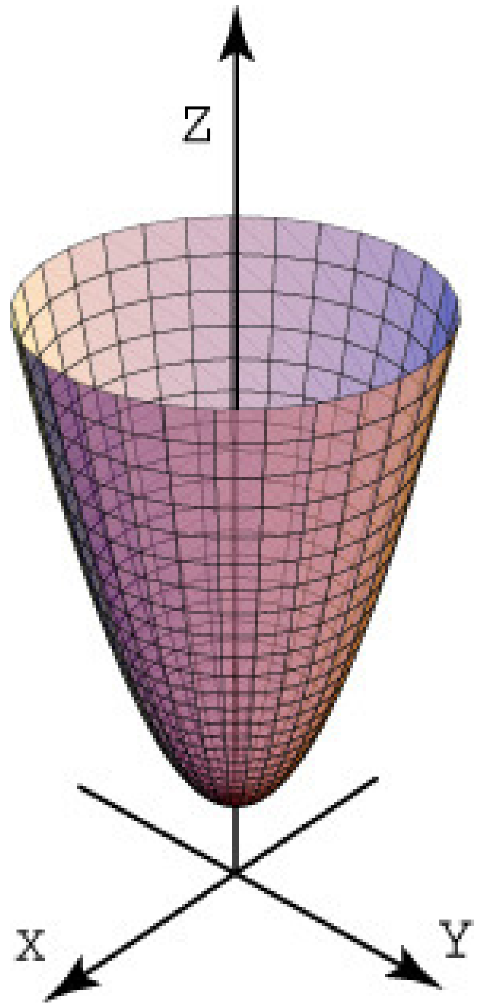
Existe al menos un punto en *D* donde *f* alcanza un valor máximo.

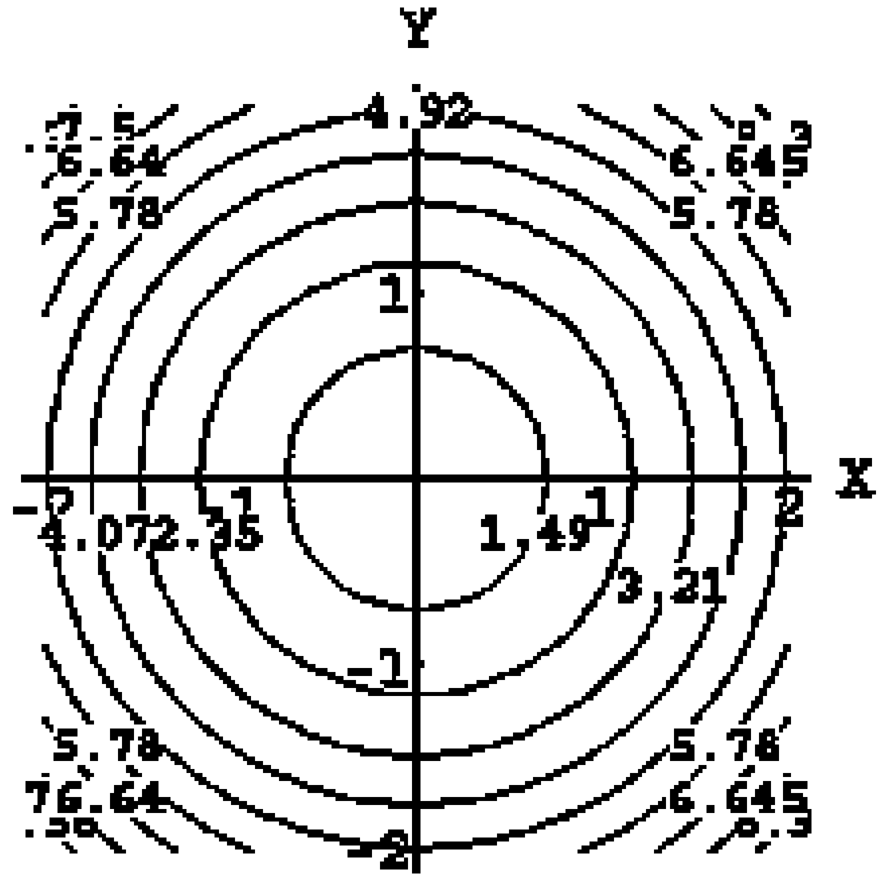
$$f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d)$$

Mínimo absoluto de f en D

Máximo absoluto de f en D

Mínimo absoluto



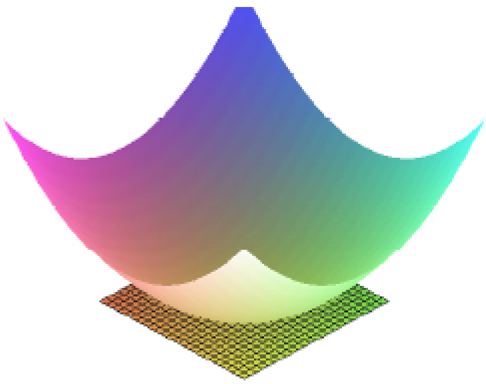


Extremos relativos

Sea *f (x,y)* definida y continua en una región *D* que contiene el punto *(a, b)*

La función *f* tiene <u>un mínimo relativo</u> en *(a, b)* si

$$f(x,y) \geq f(a,b)$$



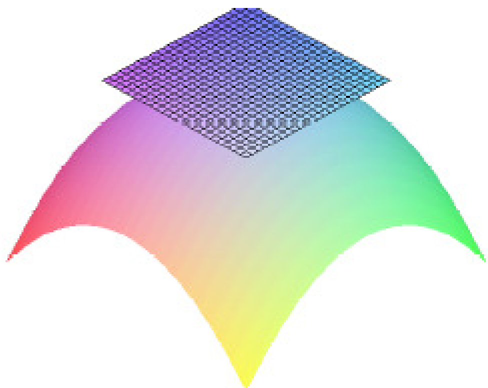
para todo *(x,y)* en un disco abierto que contiene a *(a, b).*

Extremos relativos

Sea *f (x,y)* definida y continua en una región *D* que contiene el punto *(a, b)*

La función *f* tiene un máximo relativo en *(a, b)* si

$$f(x,y) \leq f(a,b)$$



para todo *(x,y)* en un disco abierto que contiene a *(a, b)*.

Puntos críticos

Sea *f* definida en una región abierta *D* que contiene a *(a, b).* El punto *(a, b)* es un punto crítico de *f* si en él se da alguna de estas circunstancias:

1. $f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$

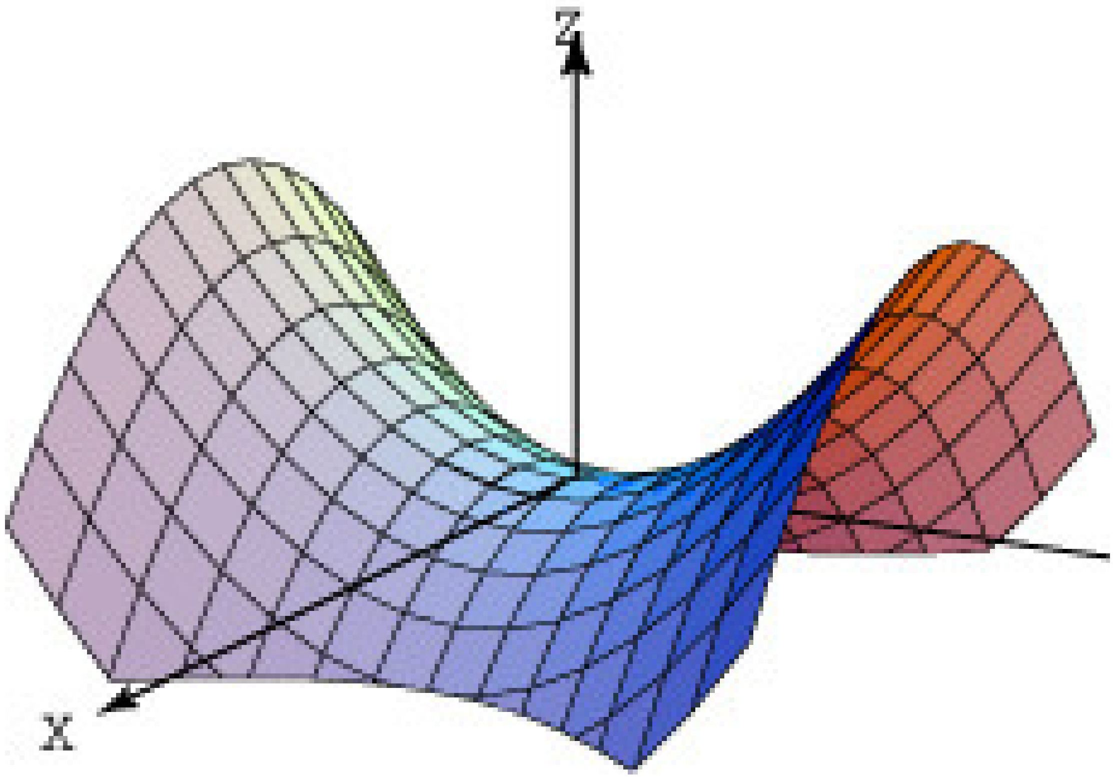
2. $f_x(a,b)$ o $f_y(a,b)$ no existen

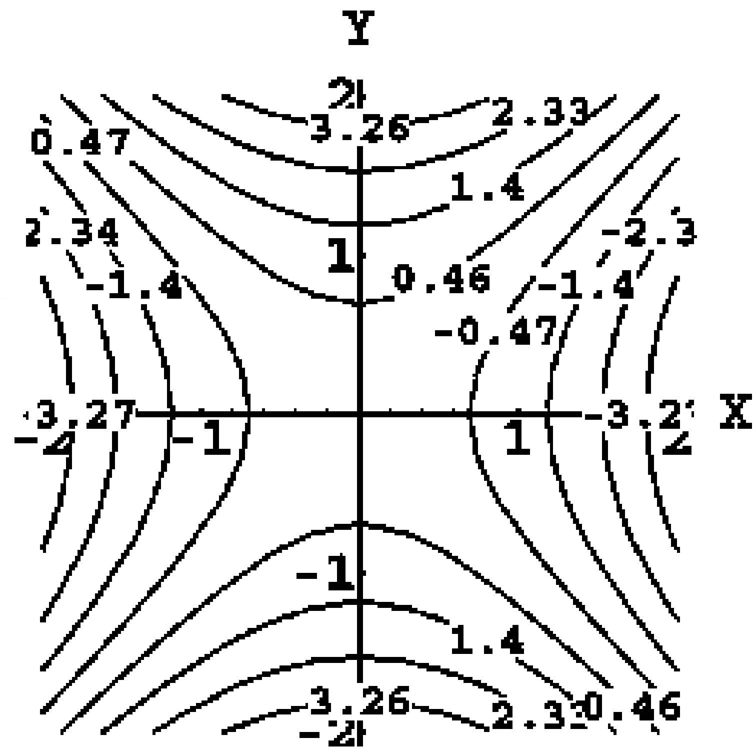
Los extremos relativos sólo pueden ocurrir en puntos críticos

Si f está definida en una región abierta D y tiene en (a, b) un extremo relativo, entonces (a, b) es un punto crítico de f.

Si f está definida en una región abierta D y tiene en (a, b) un punto crítico de f, entonces (a, b) puede ser o no un extremo relativo de f.

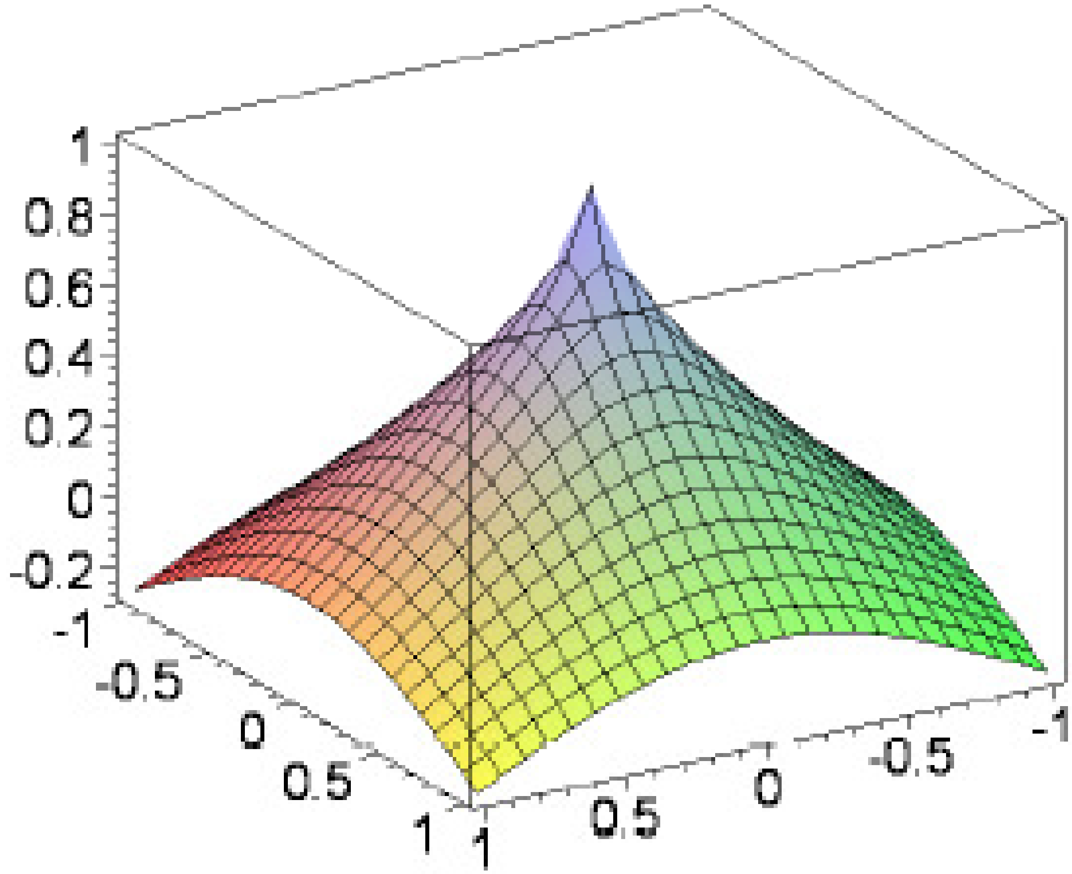
Función sin máximo ni mínimo





$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Función con máximo sin derivadas



El criterio de las segundas derivadas parciales

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene al punto (a, b) en el cual

$$f_x(a,b)=0 \quad \text{y} \quad f_y(a,b)=0$$

Para buscar los extremos relativos de *f*, utilizamos la cantidad

$$d = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

Si $d > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0, f$ tiene un mínimo relativo en (a,b).

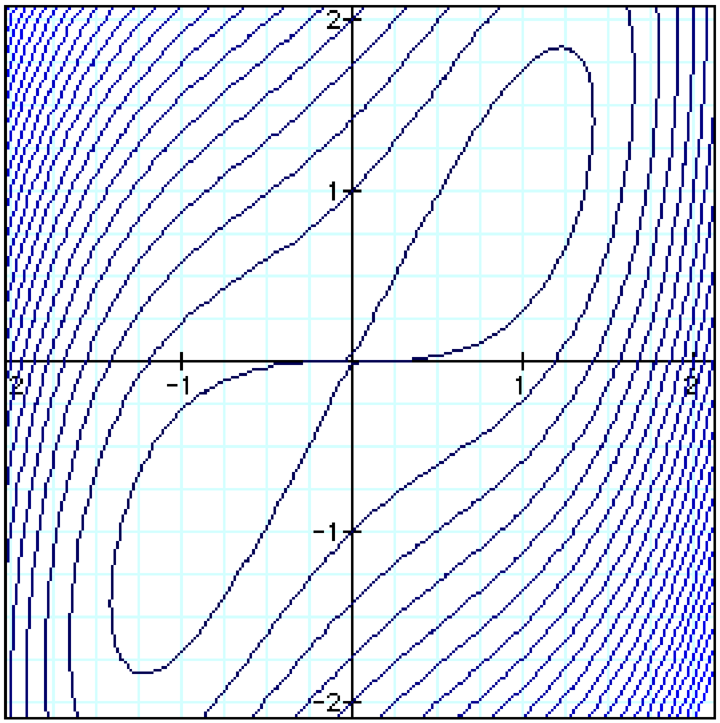
Si $d > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0, f$ tiene un máximo relativo en (a,b).

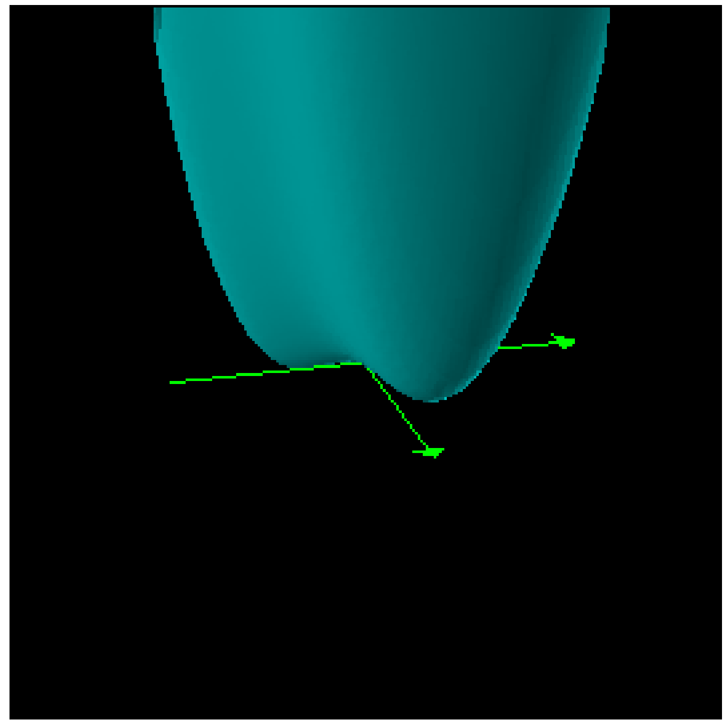
Si $d < 0$ entonces $\left(a,b,f(a,b)\right)$ es un punto silla.

Si $d = 0$ entonces el criterio no es concluyent e.

Valores extremos de

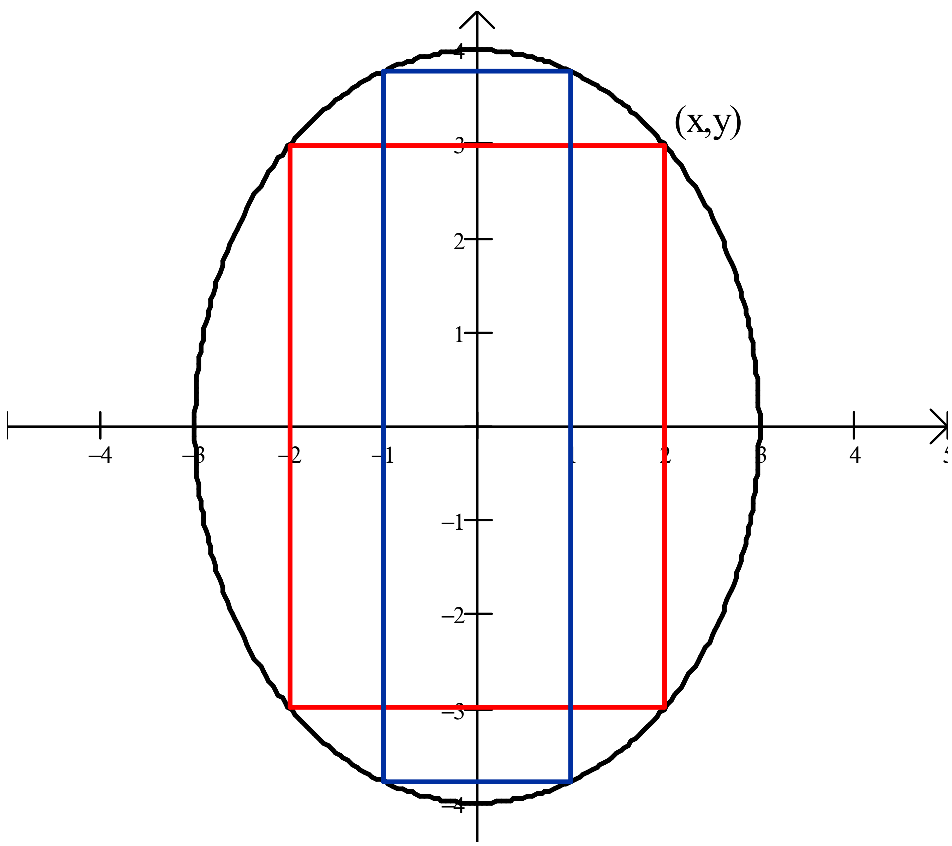
$$f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 4xy$$





Multiplicadores de Lagrange

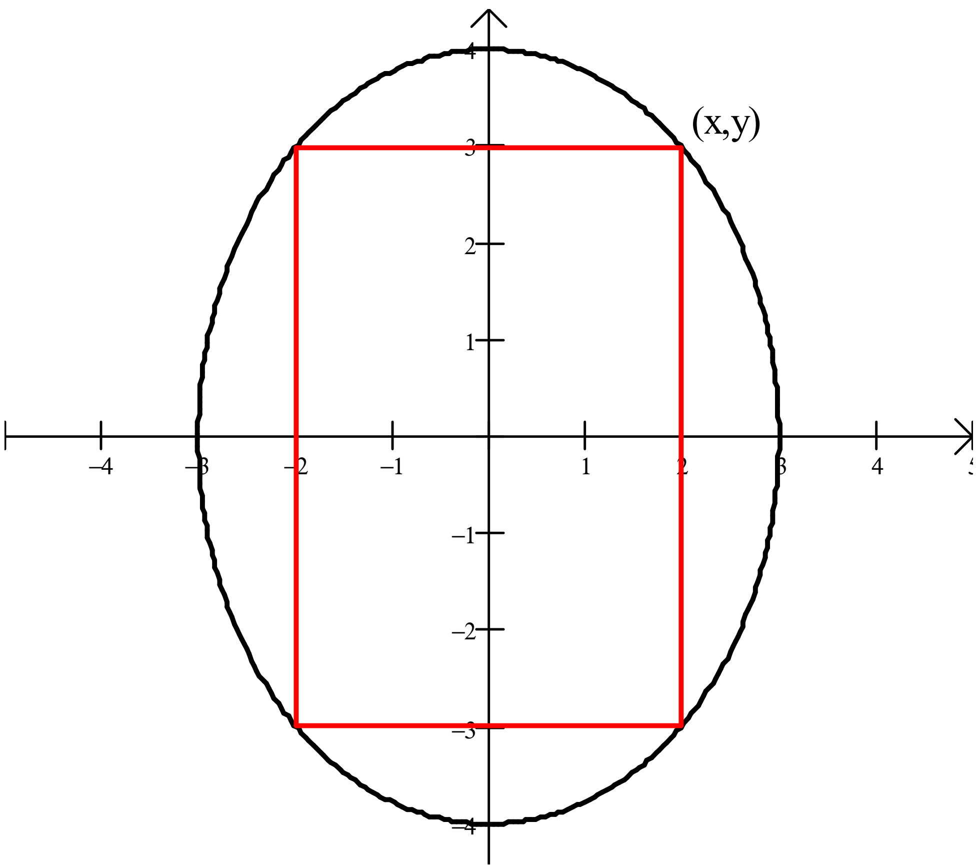
Deseamos hallar el rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en la elipse



$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Multiplicadores de Lagrange

El rectángulo tiene lados 2x y *2y*



Función objetivo

$$f(x,y) = 4\,x\,y$$

Vínculo o ligadura

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Multiplicadores de Lagrange

Interpretamos la ecuación de ligadura

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

como una curva de nivel fija de

$$g(x,y)=\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}$$

Multiplicadores de Lagrange

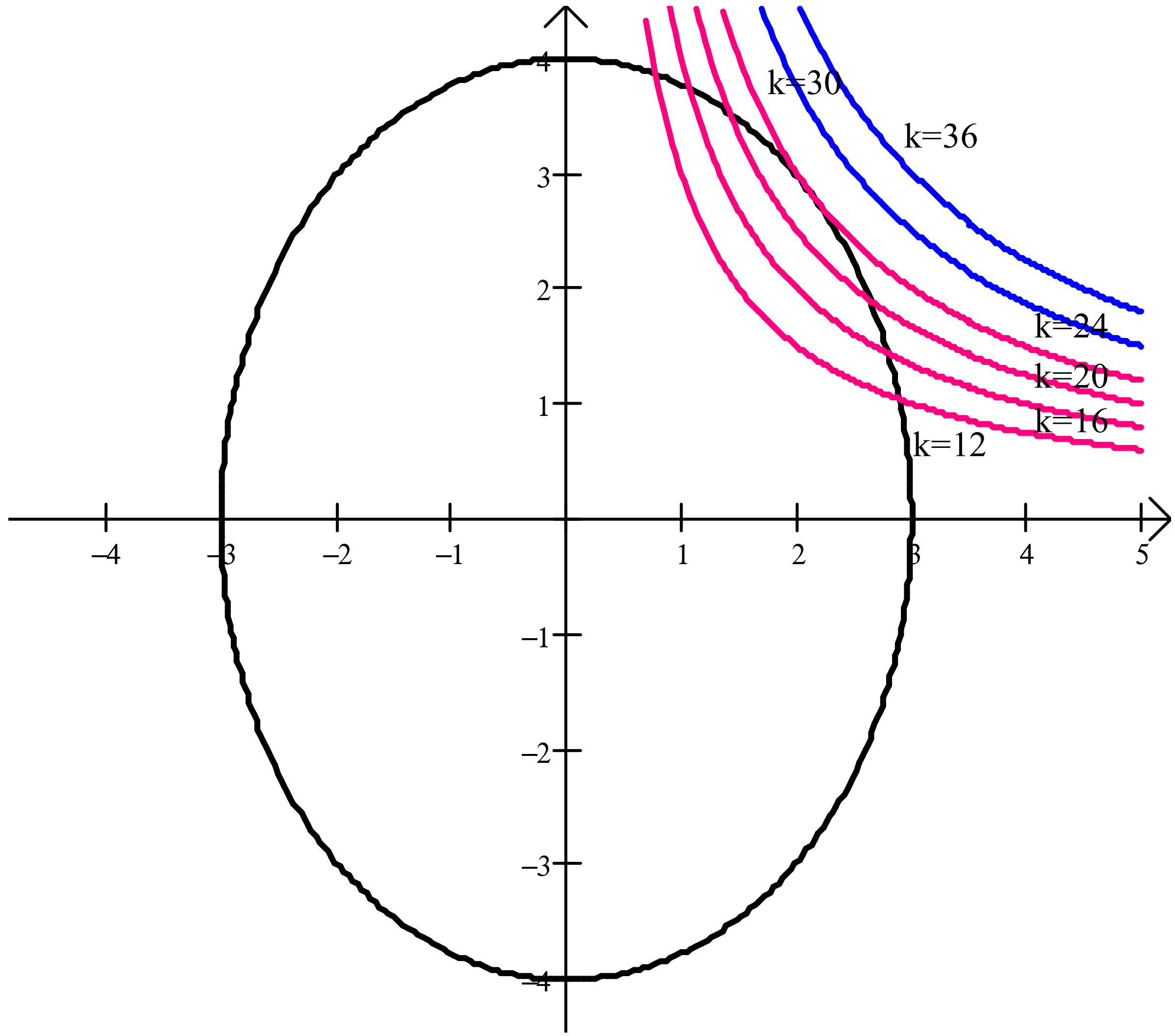
Las curvas de nivel de *f*

$$f(x, y) = 4\,x\,y = k$$

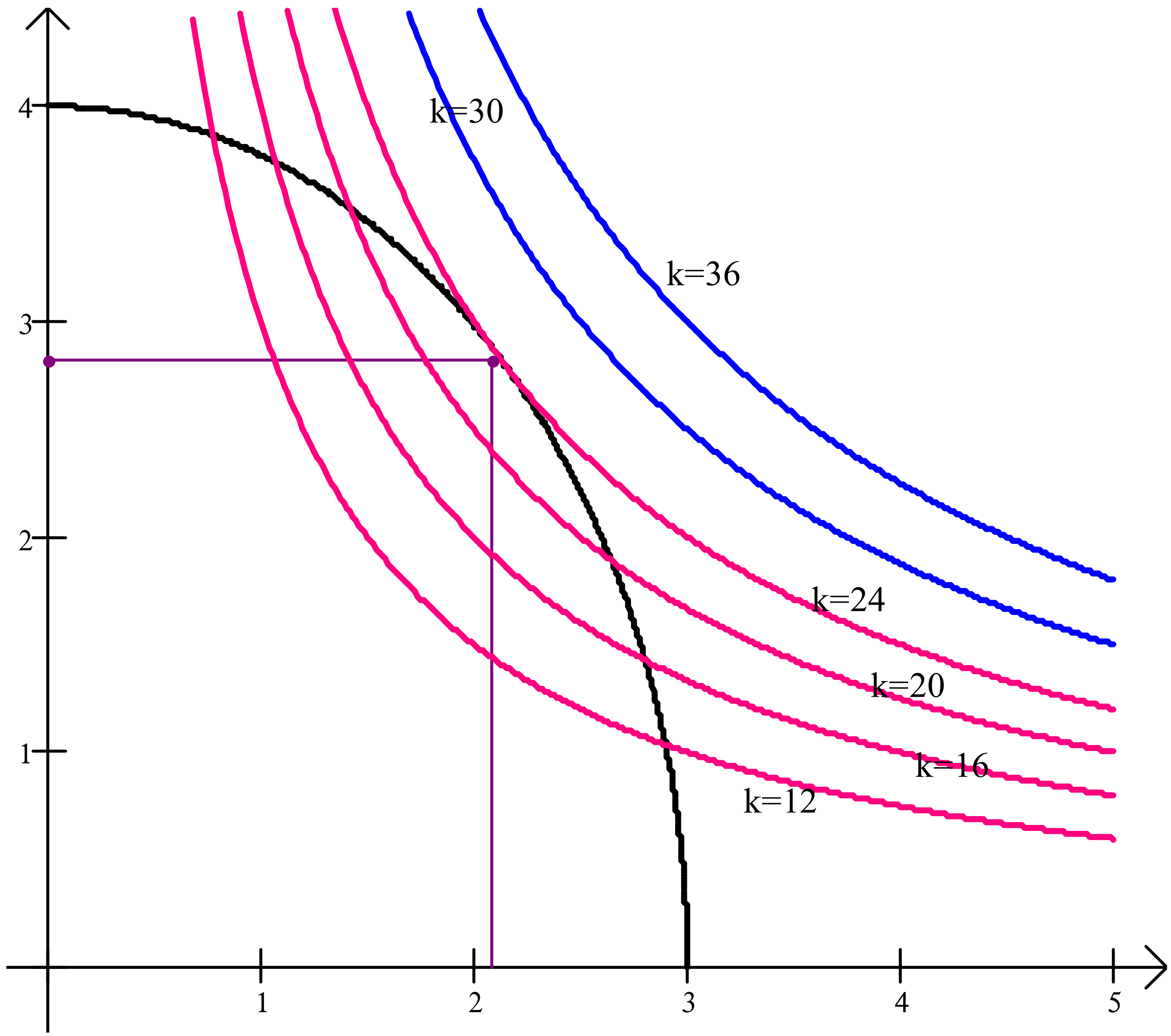
es una familia de hipérbolas.

Las curvas de nivel de *f* en las que hay puntos que satisfacen la ligadura o el vínculo corresponden a las hipérbolas que cortan a la elipse.

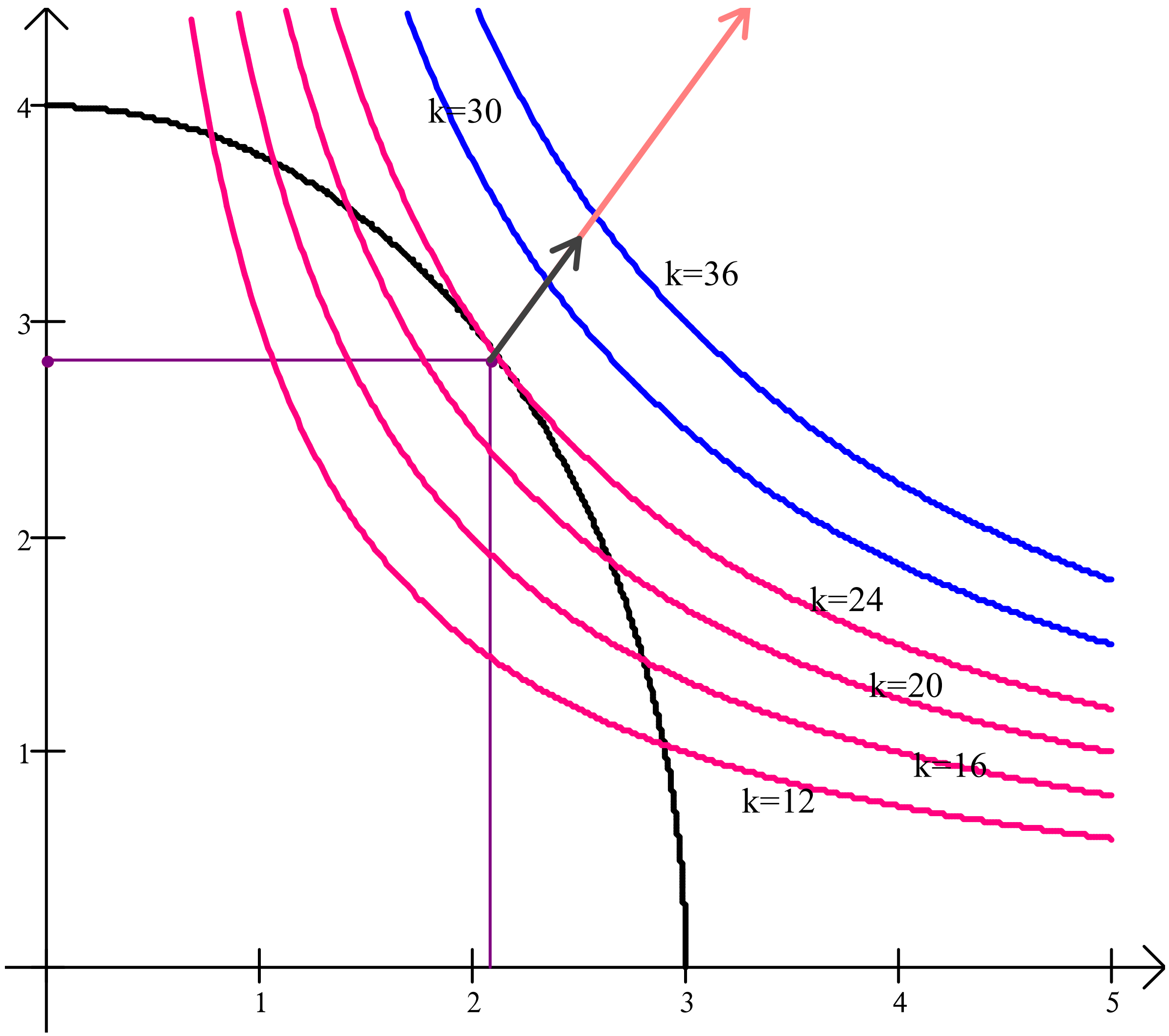
Multiplicadores de Lagrange



Multiplicadores de Lagrange



Multiplicadores de Lagrange



Teorema de Lagrange

Sean *f* y *g* funciones con primeras derivadas parciales continuas, tales que *f* tiene un extremo en el punto *(a, b)* sobre la curva suave de ligadura g (x, y)=c.

Si $\vec{\nabla} g(a,b) \neq 0$ existe un número λ tal que

$$\vec{\nabla} f(a,b) = \lambda \vec{\nabla} g(a,b)$$

Método de los multiplicadores de Lagrange

Sean *f* y *g* que satisfacen el teorema de Lagrange, tales que *f* tiene un extremo sujeto a la condición g (x, y)=c. Para hallar el mínimo o el máximo de *f*, basta proceder como sigue.

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \qquad \text{y}$$

$$g(x, y) = c$$

Método de los multiplicadores de Lagrange

O sea resolver el sistema de ecuaciones en *x*, *y* y *λ*

$$f_x(x,y)=\lambda\, g_x(x,y)$$

$$f_y(x,y)=\lambda\, g_y(x,y)$$

$$g(x,y)=c$$

2. Evaluar *f* en cada uno de los puntos solución obtenidos en el paso anterior. El mayor de esos valores da el máximo de *f* sujeta a la ligadura y el menor da el mínimo de *f* sujeta a la ligadura.

Cálculo de los extremos absolutos

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables definida y continua en una región cerrada y acotada *D* del plano *xy* entonces *f* alcanza su máximo y mínimo absoluto

En los puntos fronteras de *D*.

En los puntos críticos de *f* en el interior de D.

Comparando los valores se determinan el valor máximo absoluto y el mínimo absoluto de *f* en *D*.