Sistemas Multi-Agentes

Apéndice: Lógicas Auxiliares

Dr. Alejandro Guerra-Hernández

Instituto de Investigaciones en Inteligencia Artificial
Universidad Veracruzana

Campus Sur, Calle Paseo Lote II, Sección Segunda No 112,
Nuevo Xalapa, Xalapa, Ver., México 91097

mailto:aguerra@uv.mx
https://www.uv.mx/personal/aguerra/sma

Maestría en Inteligencia Artificial 2024

Universidad Veracruzana

Aproximaciones formales a los agentes

- Lenguajes externos a los agentes. Metalenguajes de especificación de diseño y verificación de propiedades del comportamiento.
  - BDI_{CTL} [2]
  - *Lora*
  - Especificaciones en Z
- Lenguajes orientados a agentes. Son lenguajes de especificación directamente ejecutables por el agente.
  - $Agent0$
  - *Golog*
  - $3APL$
  - $AgentSpeak(L)$ [1].

Universidad Veracruzana

Componentes de un método formal

- Lenguaje. Alfabeto y reglas sintácticas definen las fórmulas bien formadas (*fbfs*) del sistema formal.
- Teoría de prueba. Axiomas $\subseteq$ *fbfs* y reglas de inferencia establecen los teoremas del sistema, expresiones rigurosamente deducibles y demostrables.
- Teoría del modelo. Establece las estructuras que dan significado a las *fbfs* del sistema, que expresiones se satisfacen: $M \models \alpha$.

Universidad Veracruzana

$\mathcal{L}_{PC}$ el lenguaje del Cálculo Proposicional

- Sea el alfabeto formado por:

  Variables proposicionales: Var
  Operadores unarios: $\neg$ (negación)
  Operadores binarios: $\vee$ (disyunción)
  Paréntesis: $(\ldots)$

- Su sintaxis es como sigue:
  - Si $\alpha \in Var$, entonces $\alpha \in \mathcal{L}_{PC}$.
  - Si $\alpha \in \mathcal{L}_{PC}$, entonces $\neg\alpha \in \mathcal{L}_{PC}$.
  - Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{PC}$, entonces $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{L}_{PC}$.

Universidad Veracruzana

Otros operadores en $\mathcal{L}_{PC}$

- $(\alpha \wedge \beta) =_{def} \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$;
- $(\alpha \Rightarrow \beta) =_{def} (\neg\alpha \vee \beta)$;
- $(\alpha \equiv \beta) =_{def} ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$;
- $\bot =_{def} \neg\alpha \wedge \alpha$;
- $\top =_{def} \neg\bot$

Universidad Veracruzana

Semántica del Cálculo Proposicional

- Abusando un poco del lenguaje, sea $M_0 =_{def} \langle L \rangle$ el modelo para el cálculo proposicional, donde $L \subseteq Var$ es una interpretación.
- La semántica se define como sigue:
  - $M_0 \models \alpha$ ssi $\alpha \in L$, donde $\alpha \in Var$
  - $M_0 \models \neg\alpha$ ssi $M_0 \not\models \alpha$
  - $M_0 \models (\alpha \vee \beta)$ ssi $M_0 \models \alpha$ o $M_0 \models \beta$
- $M_0 \models \alpha$ se lee como: alfa se satisface en el modelo M_0; o M_0 es un modelo de alfa.
- Si α se satisface en todo modelo, se dice que es válida y se escribe $\models \alpha$.

Universidad Veracruzana

Modalidades

- Operadores que expresan un modo o manera en la cual una proposición se satisface.
- Uno de estos modos es la expresión necesariamente ($L\alpha$).
- $M\alpha =_{def} \neg L \neg \alpha$ expresa posibilidad.
- En algunos textos L se representa por $\Box$, y M por $\Diamond$.
- Las proposiciones que no son necesarias o imposibles se conocen como contingentes.
- El valor de verdad en este caso no es funcional.

Universidad Veracruzana

El lenguaje de la Lógica Modal

- Sea el alfabeto compuesto por:

  Variables proposicionales: *Var*;
  Operadores unarios: $\neg$, *L*;
  Operadores binarios: $\vee$;
  Paréntesis: (,).

- La sintaxis de la Lógica Modal se define así:
  - Si $\alpha \in Var$ Entonces α es una fbf;
  - Si α es una fbf, entonces $\neg\alpha$ and $L\alpha$ son fbf;
  - Si α y β son fbf, también lo es $(\alpha \vee \beta)$.

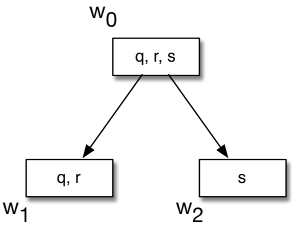
Universidad Veracruzana

Semántica Modal: Ideas centrales

- El valor de verdad de una expresión modal debe tomar en consideración estados alternativos a los que realmente se han dado: ¿Cómo podrían haber sido las cosas?
- Para cada estado alternativo existe un conjunto de estados posibles.
- En un estado alternativo dado, $M\alpha$ es verdadero si y sólo si α es verdadero en al menos uno de los estados alternativos posibles; y $L\alpha$ es verdadero si y sólo si α es verdadero en todos los estados alternativos posibles.

Universidad Veracruzana

Semántica Modal: Mundos posibles



- W es el conjunto de mundos posibles. R es la relación de accesibilidad: Que mundos alternativos son posibles.
- Ambos definen un marco.

Universidad Veracruzana

Semántica Modal : Función de asignación de verdad

- $V(\alpha, w) = \top$ ssi $V(\alpha)$ se satisface en el mundo w. $V(\alpha, w) = \bot$ ssi $V(\alpha)$ no se satisface en el mundo w.
- $V : W \mapsto 2^{Var}$ denota el conjunto de variables proposicionales que se satisfacen en un mundo dado.
- Observen que V es análoga a la interpretación I usada en el Cálculo Proposicional.

Universidad Veracruzana

Semántica de la Lógica Modal

- Sea $M_2 = \langle W, R, V \rangle$ el modelo de la Lógica Modal.
- Su semántica se define como sigue:
  - $M_2 \models_w \alpha$ ssi $\alpha \in V(w)$, cuando $\alpha \in Var$;
  - $M_2 \models_w \neg\alpha$ ssi $M_2 \not\models_w \alpha$;
  - $M_2 \models_w (\alpha \vee \beta)$ ssi $M_2 \models_w \alpha$ ó $M_2 \models_w \beta$;
  - $M_2 \models_w L\alpha$ ssi, para todo w', tal que $(w, w') \in R$, $M_2 \models_{w'} \alpha$;
  - $M_2 \models_w M\alpha$ ssi, existe algún w', tal que $(w, w') \in R$, $M_2 \models_{w'} \alpha$;

Universidad Veracruzana

Validez en la Lógica Modal

- Una fbf es válida en el marco $\langle W, R \rangle$ ssi, para cada modelo $\langle W, R, V \rangle$ basado en este marco, y para cada $w \in W$, α se satisface.
- Existen algunas fbf que son válidas en cualquier arreglo de mundos posibles, y se conocen como fbf K-válidas.
- Todas las fbf válidas de la lógica proposicional, son K-válidas.
- En especial, una fbf modal que es K-válida es la siguiente:

$$L(p \Rightarrow q) \Rightarrow (Lp \Rightarrow Lq)$$

Universidad Veracruzana

Sistema K

- Los axiomas de este sistema son las fbf proposicionales válidas y:

  K: $L(p \Rightarrow q) \Rightarrow (Lp \Rightarrow Lq)$

- Reglas de inferencia:

  Substitución uniforme, SU:

$$\frac{\alpha}{\alpha[\beta_1/p_1, \ldots \beta_n/p_n]}$$

  Modus ponens, MP:

$$\frac{\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

  Necesidad, N:

$$\frac{\alpha}{L\alpha}$$

Universidad Veracruzana

Sistema T

- Se agrega al sistema K:

  T: $Lp \Rightarrow p$

- Expresa que lo que necesariamente es, es.
- T es válida únicamente en marcos donde R es reflexiva.
- El sistema T es consistente con respecto a todos los marcos reflexivos.

Universidad Veracruzana

Sistema D

- Se agrega al sistema K:

  D: $Lp \Rightarrow Mp$
- Lo que necesariamente es, es permisible.
- Interpretación deóntica.
- D es válida en todo marco serial (sin punto muertos); el sistema es consistente con respecto a la clase de todos los marcos seriales.
- En puntos muertos D no es válida porque $L\alpha$ y $M\alpha$ son verdadera y falsa, respectivamente, sin tomar en cuenta α.

Universidad Veracruzana

Sistemas S4 y S5

- ¿Qué significa necesariamente necesario?
- Se agregan al sistema K y T:

  4: $Lp \Rightarrow LLp$ ó

  5: $Mp \Rightarrow LMp$
- Introducen reglas de reducción para operadores modales anidados.
- El axioma 4 es válido con respecto a marcos transitivos. El axioma 5 es válido en todo marco que es reflexivo, transitivo y simétrico.

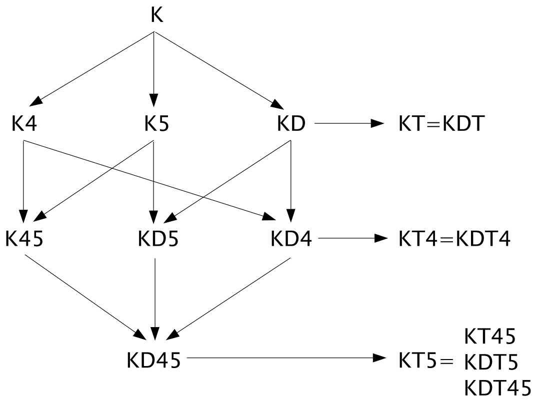
Universidad Veracruzana

Teoría de correspondencia

A	Esquema	R	Cálculo de Predicados
T	$L\alpha \Rightarrow \alpha$	reflexiva	$\forall w \in W,\ (w, w) \in R$
D	$L\alpha \Rightarrow M\alpha$	serial	$\forall w \in W\ \exists w' \in W,\ (w, w') \in R$
4	$L\alpha \Rightarrow LL\alpha$	transitiva	$\forall w, w', w'' \in W,\ (w, w') \in R \wedge (w', w'') \in R \Rightarrow (w, w'') \in R$
5	$M\alpha \Rightarrow LM\alpha$	euclidiana	$\forall w, w', w'' \in W,\ (w, w') \in R \wedge (w, w'') \in R \Rightarrow (w', w'') \in R$

Universidad Veracruzana

Sistemas Modales



Universidad Veracruzana

Naturaleza del tiempo y contenido

- Diferentes lógicas pueden definirse dependiendo del lenguaje no temporal y la naturaleza del tiempo asumidos:
  - LT proposicionales vs LT primer orden
  - LT globales vs LT modulares
  - LT arborescentes vs LT lineales
  - Puntos temporales vs Intervalos
  - LT discretas vs LT continuas
  - LT con pasado vs LT con futuro

Universidad Veracruzana

$\mathcal{L}_{LTLP}$ el lenguaje de la lógica temporal lineal

- Sea el alfabeto compuesto por los símbolos:

  Variables proposicionales: *Var*;
  Operadores unarios: $\neg$, $\bigcirc$;
  Operadores binarios: $\vee$, U;
  Paréntesis: (,).

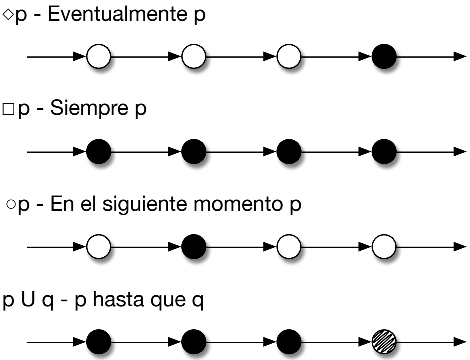
- El lenguaje $\mathcal{L}_{LTLP}$ se define como sigue:
  - Si $\alpha \in Var$ entonces α es una fbf;
  - Si α es una fbf, también lo son $\neg\alpha$ y $\bigcirc\alpha$;
  - Si α y β son fbf, también lo son $\alpha \vee \beta$ y $\alpha \ \mathsf{U} \ \beta$.

Universidad Veracruzana

Otros operadores temporales en $\mathcal{L}_{LTLP}$

Eventualmente: $\Diamond\alpha =_{def} \top \; \mathsf{U} \; \alpha$

Siempre: $\Box\alpha =_{def} \neg(\Diamond\neg\alpha)$



Estructuras de Kripke y líneas de tiempo

- Una línea de tiempo se modela como una estructura de Kripke $M_3 = \langle S, R, I \rangle$, donde:
  - S es el conjunto de momentos en el tiempo;
  - R es una relación de accesibilidad sobre S (lineal, discreta, y con pasado finito)
  - $I : S \mapsto 2^{Var}$ mapea cada momento al conjunto de proposiones verdaderas.
- $x = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ se usan para denotar la línea de tiempo x.
- La expresión $M_3 \models_x \alpha$ denota que la estructura M_3 satisface a la fórmula α en la línea de tiempo x.
- En algunos casos se asume que el marco es isomorfo a $\mathbb{N}$ y $M_3 = \langle \mathbb{N}, I \rangle$, $x = (1, 2, \dots)$.

Universidad Veracruzana

Semántica de la Lógica Temporal Lineal Proposicional

1. $M_3 \models_{x_i} \alpha$ ssi $\alpha \in I(x_i) \wedge \alpha \in Var$;
2. $M_3 \models_{x_i} \neg\alpha$ ssi $M_3 \not\models_{x_i} \alpha$;
3. $M_3 \models_{x_i} \alpha \vee \beta$ ssi $M_3 \models_{x_i} \alpha$ ó $M_3 \models_{x_i} \beta$;
4. $M_3 \models_{x_i} \bigcirc\alpha$ ssi $M_3 \models_{x_{i+1}} \alpha$.
5. $M_3 \models_{x_i} \alpha \; \mathrm{U} \; \beta$ ssi $\exists j \geq i \; M_3 \models_{x_j} \beta$ y $\forall k < j \; M_3 \models_{x_k} \alpha$;

Universidad Veracruzana

Ejemplos de validez y satisfacción

- $\alpha \Rightarrow \Diamond\beta$ es satisfacible, pero no es válida.
- $\Box(\alpha \Rightarrow \Diamond\beta)$ es satisfacible, pero no válida.
- $\Box(\alpha \Rightarrow \Diamond\beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \Diamond\beta)$ es válida, pero su inverso es sólo satisfacible.
- $\alpha \wedge \Box(\alpha \Rightarrow X\alpha) \Rightarrow \Box\alpha$ es válida y corresponde a la formulación de la inducción matemática.

Universidad Veracruzana

Lógicas Temporales arborescentes: CTL y CTL*

- Sea el alfabeto:

  Variables proposicionales: Var;
  Operadores unarios : $\neg$, $\bigcirc$;
  Operadores binarios: $\vee$, U ;
  Cuantificadores: A;
  Paréntesis: (,).

- El cuantificador de trayectorias existencial (E) se define como $\mathsf{E}\alpha =_{def} \neg \mathsf{A} \neg \alpha$.

Universidad Veracruzana

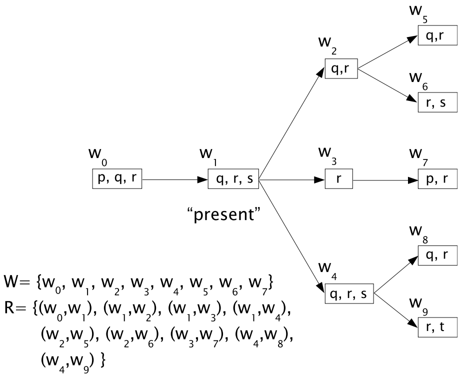
Sintáxis de la Lógica Temporal *CTL*

- Si $\alpha \in Var$, entonces α es una fbf de estado;
- Si α es una fbf de estado, también lo es $\neg\alpha$;
- Si α y β son fbf de estado, también lo es $(\alpha \vee \beta)$;
- Si α es una fbf de trayectoria, entonces $\mathsf{E}\alpha$ y $\mathsf{A}\alpha$ son fbf de estado;
- Si α es una fbf de estado, entonces también es una fbf de trayectoria;
- Si α es una fbf de estado, entonces $\bigcirc\alpha$ es una fbf de trayectoria;
- Si α y β son fbf de estado, entonces $\alpha \; \mathsf{U} \; \beta$ es una fbf de trayectoria.

Universidad Veracruzana

Mundos posibles de *CTL*

- $M_4 = \langle W, R, I \rangle$



Universidad Veracruzana

Reglas semánticas de *CTL*

- $M_4 \models_{x_i} \alpha$, ssi $\alpha \in I(x_i) \wedge \alpha \in Var$;
- $M_4 \models_{x_i} \neg\alpha$, ssi $M_4 \not\models_{x_i} \alpha$;
- $M_4 \models_{x_i} \alpha \vee \beta$, ssi $M_4 \models_{x_i} \alpha$ ó $M_4 \models_{x_i} \beta$;
- $M_4 \models_{x_i} \mathrm{A}\alpha$, ssi para toda trayectoria $j, M_4 \models_j \alpha$;
- $M_4 \models_{x_i} \mathrm{E}\alpha$, ssi existe una trayectoria j tal que $M_4 \models_j \alpha$;
- $M_4 \models_{x_i} \bigcirc\alpha$, ssi $M_4 \models_{x_{i+1}} \alpha$.
- $M_4 \models_{x_i} \alpha \ \mathrm{U}\ \beta$, ssi $\exists j \geq i \ M_4 \models_{x_j} \beta$ and $\forall k < j \ M_4 \models_{x_k} \alpha$;

Universidad Veracruzana

Referencias I

[1] A Rao. "AgentSpeak(L): BDI Agents Speak Out in a Logical Computable Language". En: *Seventh European Workshop on Modelling Autonomous Agents in a Multi-Agent World*. Ed. por R van Hoe. Eindhoven, The Netherlands, 1996.

[2] A Rao y M Georgeff. *Formal Models and Decision Procedures for Multi-Agent Systems*. Technical Report 61. Carlton, Victoria: Australian Artificial Intelligence Institute, 1995.

Universidad Veracruzana