Representación del Conocimiento

Deducción Natural

Dr. Alejandro Guerra-Hernández

Instituto de Investigaciones en Inteligencia Artificial
Universidad Veracruzana

Campus Sur, Calle Paseo Lote II, Sección Segunda No 112,
Nuevo Xalapa, Xalapa, Ver., México 91097

mailto:aguerra@uv.mx
https://www.uv.mx/personal/aguerra/rc

Maestría en Inteligencia Artificial 2024

Universidad Veracruzana

Razonamiento, Cálculo y Computo

- Lenguajes para modelar las situaciones computacionales, y razonar formalmente acerca de ellas [1].
- Razonar acerca de estas situaciones, significa construir argumentos acerca de ellas.
- Construcción formal, de manera que los argumentos sean válidos y puedan ser defendidos rigurosamente;
- o ejecutados por una máquina.

Universidad Veracruzana

Validez

- ¿Es válido el siguiente argumento?
- Si el autobus llega tarde y no hay taxis en la estación, llegaré tarde a clase. No llegué tarde a clase. El autobus llegó tarde. Por lo tanto, había taxis en la estación.

Universidad Veracruzana

Otro caso válido

- Si está lloviendo y Ana no trae su paraguas, se mojará. Ana no está mojada. Está lloviendo. Por lo tanto, Ana trae su sombrilla.

Universidad Veracruzana

Patrones

- Observen las similitudes:

Ejemplo 1	Ejemplo 2
Si el autobus llega tarde y no hay taxis en la estación entonces llegaré tarde a clase	Si está lloviendo y Ana no trae su paraguas entonces se mojará
El autobus llegó tarde	Está lloviendo
No llegué tarde	No se mojó
Había taxis en la estación	Traía su paraguas

- No nos concierne que es lo que los enunciados realmente significan, sino su estructura lógica.

Universidad Veracruzana

Enunciados declarativos

- Los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:
  1. La suma de 2 y 3 es 5.
  2. Mariano reaccionó violentamente ante las acusaciones.
  3. Todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos [1].
  4. François-Marie Banier était un écrivain français.

Universidad Veracruzana

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Goldbach

Enunciados no declarativos

- Los siguientes enunciados no tienen valor de verdad:
  1. Pásame la sal.
  2. Listo, ¡vamonos!
  3. Más vale pájaro en mano, que cien volando.

Universidad Veracruzana

Enunciados atómicos

- Aquellos que no son descomponibles en otros enunciados.
- Ejemplo: El número 5 es impar.
- Serán denotados por los símbolos $p, q, r, \ldots$ o a veces por $p_1, p_2, p_3, \ldots$.

$$
\begin{aligned}
p &: \text{Gané la lotería la semana pasada.}\\
q &: \text{Compré un boleto de lotería.}\\
r &: \text{Gané en los caballos la semana pasada.}
\end{aligned}
$$

Universidad Veracruzana

Enunciados complejos

- $\neg$ La negación $\neg p$. Ej. No gané la lotería la semana pasada.
- $\vee$ La disyunción $p \vee r$. Ej. Gané la lotería la semana pasada o gané en los caballos la semana pasada.
- $\wedge$ La conjunción $p \wedge r$. Ej. La semana pasada gané la lotería y en los caballos.
- $\implies$ La implicación $p \implies q$. Ej. Si gané la lotería la semana pasada, entonces compré un boleto de lotería.

Universidad Veracruzana

Precedencias de operadores

- Ahora podemos formar la proposición:

$$p \wedge q \implies \neg r \vee q$$

- Solemos eliminar la ambigüedad con el uso de paréntesis:

$$(p \wedge q) \implies ((\neg r) \vee q)$$

- Precedencia de los operadores. $\neg$ liga más fuerte que $\vee$ y $\wedge$; que a su vez ligan más fuerte que $\implies$.
- La implicación es asociativa a la derecha. De modo que:

$$p \implies q \implies r \equiv p \implies (q \implies r)$$

Universidad Veracruzana

Consecuencia I

- Supongamos que tenemos un conjunto de fórmulas

$$\Delta = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$$

a las que llamaremos premisas.

- Y otra fórmula ψ a la que llamaremos conclusión
- Podemos formar una consecuencia:

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$$

ó

$$\Delta \vdash \psi$$

Universidad Veracruzana

Consecuencia II

- Una consecuencia es válida si se puede encontrar prueba de ello.
- La consecuencia para los ejemplos 1 y 2 tiene la forma:

$$p \wedge \neg q \implies r, \neg r, p \vdash q$$

Universidad Veracruzana

Prueba

- Se basa en un conjunto de reglas de prueba ρ.
- Construir estas pruebas es un ejercicio creativo, semejante a programar.
- No es necesariamente obvio que regla aplicar, ni en qué orden.
- Las reglas de prueba deben ser cuidadosamente elegidas, de lo contrario podemos "probar" argumentaciones inválidas,
- Ej. Es deseable que no seamos capaces de probar que la consecuencia $p, q \vdash_\rho p \wedge \neg q$ es válida.
- Si ρ es conocida, se omite en la notación.

Universidad Veracruzana

Introducción de la conjunción

- Esta regla permite concluir $\phi \wedge \psi$ dado que ya hemos concluido ϕ y ψ por separado.
- Se escribe así:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \; (\wedge i)$$

Universidad Veracruzana

Eliminación de la conjunción

- Existen también dos reglas sobre la eliminación de la conjunción:

$$\frac{\phi \land \psi}{\phi}\ (\land e_1) \qquad \frac{\phi \land \psi}{\psi}\ (\land e_2)$$

Universidad Veracruzana

Inicio de una prueba

- Usemos las reglas definidas para probar que $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ es válida.
- Comenzamos escribiendo las premisas, una por línea y, dejando espacio vacío, escribimos la conclusión:

$$\begin{array}{r} p \wedge q \\ r \\ \\ \\ q \wedge r \end{array}$$

Universidad Veracruzana

Continuación de la prueba

- Aplicamos la secuencia adecuada de reglas de prueba.
- Numeramos las líneas a la izquierda para referenciar los resultados parciales obtenidos.
- Etiquetamos las líneas a la derecha con su origen, i.e., premisa ó regla aplicada a n argumentos.

1.	$p \wedge q$	premisa
2.	r	premisa
3.	q	$(\wedge e_2)$ 1
4.	$q \wedge r$	$(\wedge i)$ 3,2

Universidad Veracruzana

Representación alternativa

- Usando directamente el formato de las reglas de inferencia:

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\ (\wedge e_2) \qquad r}{q \wedge r}\ (\wedge i)$$

Universidad Veracruzana

Ejercicio

- Pruebe ahora que $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge r \vdash q \wedge s$:

Universidad Veracruzana

Ejercicio

- Pruebe ahora que $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge r \vdash q \wedge s$:

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	premisa
2.	$s \wedge r$	premisa
3.	$p \wedge q$	$(\wedge e_1)$ 1
4.	q	$(\wedge e_2)$ 3
5.	s	$(\wedge e_1)$ 2
6.	$q \wedge s$	$(\wedge i)$ 4,5

Universidad Veracruzana

Introducción y eliminación de la doble negación

- De forma que las reglas de eliminación e introducción de la doble negación son como sigue:

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ (\neg\neg i)$$

- Ej. Si expresamos, no es cierto que no está lloviendo; estamos expresando que está lloviendo.

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- La prueba de la consecuencia $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$ usa la mayoría de las reglas introducidas hasta ahora:

1.	p	premisa
2.	$\neg\neg(q \wedge r)$	premisa
3.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ 1
4.	$q \wedge r$	$(\neg\neg e)$ 2
5.	r	$(\wedge e_2)$ 4
6.	$\neg\neg p \wedge r$	$(\wedge i)$ 3,5

Universidad Veracruzana

Eliminación de la implicación

- El modus ponens se introduce con la siguiente regla de prueba:

$$\frac{\phi \quad \phi \implies \psi}{\psi} \; (\implies e)$$

Significado intuitivo

- Consideren los siguientes enunciados declarativos:

  p : Llueve
  q : La calle está mojada
- Entonces $p \implies q$ expresa que si llueve la calle está mojada.
- Si es el caso que p, podemos combinar esas dos piezas de información con nuestra regla de eliminación de la implicación, para concluir que q.
- p es importante, si no se satisface, no podemos concluir q.

Universidad Veracruzana

Un ejemplo más computacional

- Consideren los siguientes enunciados declarativos:

$$\begin{aligned} p &: \text{ La entrada del programa es un entero} \\ q &: \text{ La salida del programa es un entero.} \end{aligned}$$

- $p \implies q$ expresa que si la entrada del programa es un entero, entonces su salida es un entero.
- Si p se satisface, la entrada del programa es un entero, entonces podemos concluir q: que su salida es un entero.
- Type Checking!

Universidad Veracruzana

Meta variables

- Cabe mencionar que los parámetros como ϕ y ψ en estas reglas, pueden recibir proposiciones compuestas, además de atómicas:

1.	$\neg p \wedge q$	premisa
2.	$\neg p \wedge q \implies r \vee \neg p$	premisa
3.	$r \vee \neg p$	$(\implies e)$ 1,2

Universidad Veracruzana

Repetición de reglas

- Evidentemente, podemos aplicar estas reglas tantas veces queramos:

1.	$p \implies (q \implies r)$	premisa
2.	$p \implies q$	premisa
3.	p	premisa
4.	$q \implies r$	$(\implies e)$ 3,1
5.	q	$(\implies e)$ 3,2
6.	r	$(\implies e)$ 5,4

Universidad Veracruzana

Modus tollens

- Supongan que $p \implies q$ y $\neg q$ son el caso.
- Si p se satisface, podríamos concluir que q ($\implies e$).
- Pero esto resulta contradictorio con $\neg q$ que es el caso. Por lo tanto, debemos inferir que $\neg p$ se satisface.
- Generalizando:

$$\frac{\phi \implies \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi} \; (MT)$$

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Pruebe que la consecuencia $p \implies (q \implies r), p, \neg r \vdash \neg q$ es válida.

1.	$p \implies (q \implies r)$	premisa
2.	p	premisa
3.	$\neg r$	premisa
4.	$q \implies r$	$(\implies e)$ 2,1
5.	$\neg q$	(MT) 4,3

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Probar que $\neg p \implies q, \neg q \vdash p$ es válida:

1.	$\neg p \implies q$	premisa
2.	$\neg q$	premisa
3.	$\neg\neg p$	(MT) 1,2
4.	p	$(\neg\neg e)$ 3

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Probar que $p \implies \neg q, q \vdash \neg p$ es válida:

1.	$p \implies \neg q$	premisa
2.	q	premisa
3.	$\neg\neg q$	$(\neg\neg i)$ 2
4.	$\neg p$	(MT) 1,3

Universidad Veracruzana

Introducción de la implicación

- Asumamos que $p \implies q$ es el caso.
- Si asumimos temporalmente que $\neg q$ es válida, entones podríamos usar (MP) para inferir $\neg p$.
- Por lo tanto, asumiendo $p \implies q$, podemos probar que $\neg q \implies \neg p$:

1.	$p \implies q$	premisa
2.	$\neg q$	supuesto
3.	$\neg p$	(MT) 1,2
4.	$\neg q \implies \neg p$	$(\implies i)$ 2-3

Universidad Veracruzana

La regla

- La formula de introducción de la implicación computa precisamente esto:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \implies \psi} (\implies i)$$

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Una prueba usando la introducción de la implicación y otras reglas definidas anteriormente:

1.	$\neg q \implies \neg p$	premisa
2.	p	supuesto
3.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ 2
4.	$\neg\neg q$	(MT) 1,3
5.	q	$(\neg\neg e)$ 4
6.	$p \implies q$	$(\implies i)$ 2-5

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- La siguiente prueba es válida:

1.	p	supuesto
2.	$p \implies p$	$(\implies i)$ 2

Universidad Veracruzana

Teoremas

- Podemos decir que la prueba no necesita argumentación, es decir, no tenemos premisas.
- Esto suele escribirse $\vdash \ p \implies p$.
- Las fórmulas lógicas con una consecuencia válida $\vdash \phi$ se conocen como teoremas.

Universidad Veracruzana

Ejemplo

1.	$q \implies r$	supuesto
2.	$\neg q \implies \neg p$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ 3
5.	$\neg\neg q$	(MT) 2,4
6.	q	$(\neg\neg e)$ 5
7.	r	$(\implies i)$ 6,1
8.	$p \implies r$	$(\implies i)$ 3-7
9.	$(\neg q \implies \neg p) \implies (p \implies r)$	$(\implies i)$ 2-9
10.	$(q \implies r) \implies ((\neg q \implies \neg p) \implies (p \implies r))$	$(\implies i)$ 1-10

Universidad Veracruzana

In other words...

- La consecuencia $\vdash (q \implies r) \implies ((\neg q \implies \neg p) \implies (p \implies r))$ es válida.
- Mostrando que $(q \implies r) \implies ((\neg q \implies \neg p) \implies (p \implies r))$ es un teorema.

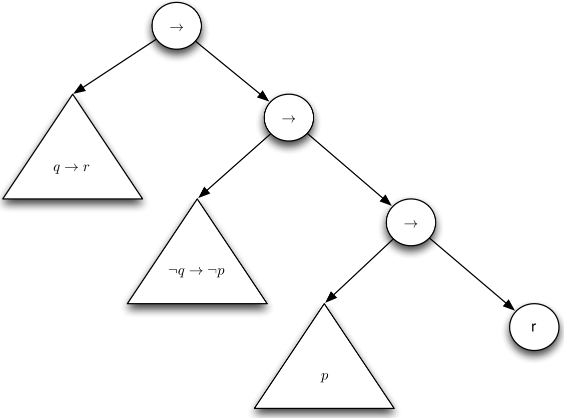
Universidad Veracruzana

Más patrones

- Es posible transformar toda consecuencia de la forma $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ en una prueba de un teorema de la forma $\vdash \phi_1 \implies (\phi_2 \implies (\cdots \implies (\phi_n \implies \psi \ldots)))$, gracias a la introducción de la implicación.
- Basta con agregar n líneas de la regla $\implies i$ aplicada a $\phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi_1$, en ese orden.

Universidad Veracruzana

Estructura lógica



Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Utilizando la regla $(\wedge i)$ prueba la validez de la consecuencia $p \wedge q \implies r \vdash p \implies (q \implies r)$:

1.	$p \wedge q \implies r$	premisa
2.	p	supuesto
3.	q	supuesto
4.	$p \wedge q$	$(\wedge i)$ 2,3
5.	r	$(\implies e)$ 4,1
6.	$q \implies r$	$(\implies i)$ 3-5
7.	$p \implies (q \implies r)$	$(\implies i)$ 2-6

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Utilice las reglas de eliminación de la conjunción para probar el converso del ejemplo anterior: $p \implies (q \implies r) \vdash p \wedge q \implies r$:

1.	$p \implies (q \implies r)$	premisa
2.	$p \wedge q$	supuesto
3.	p	$(\wedge e_1)$ 2
4.	q	$(\wedge e_2)$ 2
5.	$q \implies r$	$(\implies e)$ 3,1
6.	r	$(\implies e)$ 4,5
7.	$p \wedge q \implies r$	$(\implies i)$ 2-6

Universidad Veracruzana

Equivalencia lógica

- Lo anterior quiere decir que estas fórmula son equivalentes en el sentido que pueden ser probadas a partir de la otra:

$$p \land q \implies r \dashv\vdash p \implies (q \implies r)$$

- Como sólo podemos tener una fórmula a la derecha de $\vdash$, cada ocurrencia de $\dashv\vdash$ sólo puede relacionar dos fórmulas.

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Aquí hacemos uso de la introducción y eliminación de la conjunción para probar la validez de la consecuencia $p \implies q \vdash p \land r \implies q \land r$:

1.	$p \implies q$	premisa
2.	$p \land r$	supuesto
3.	p	$(\land e_1)$ 2
4.	r	$(\land e_2)$ 2
5.	q	$(\implies e)$ 3,1
6.	$q \land r$	$(\land i)$ 5,4
7.	$p \land r \implies q \land r$	$(\implies i)$ 2-6

Universidad Veracruzana

Introducción de la disyunción

- A partir de la premisa ϕ podemos concluir $\phi \vee \psi$, sea cual sea la elección de ψ. De igual manera podemos concluir ϕ si hemos probado ψ:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

Universidad Veracruzana

Eliminación de la disyunción

1. Primero asumimos que ϕ es verdadera y obtenemos la prueba de χ.
2. Entonces asumimos que ψ es verdadera y que da una prueba para χ también.
3. Dadas las dos pruebas anteriores, podemos inferir χ de la verdad de $\phi \vee \psi$, puesto que el análisis de casos ha sido exhaustivo.

- La regla se escribe como sigue:

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Probar que la consecuencia $p \vee q \vdash q \vee p$ es válida:

1.	$p \vee q$	premisa
2.	p	supuesto
3.	$q \vee p$	$(\vee i_2)$ 2
4.	q	supuesto
5.	$q \vee p$	$(\vee i_1)$ 4
6.	$q \vee p$	$(\vee e)$ 1,2-3,4-5

Universidad Veracruzana

Ejemplo

1.	$q \implies r$	premisa
2.	$p \vee q$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$p \vee r$	$(\vee i_1)$ 3
5.	q	supuesto
6.	r	$(\implies e)$ 5,1
7.	$p \vee r$	$(\vee i_2)$ 6
8.	$p \vee r$	$(\vee e)$ 2,3-4,5-7
9.	$p \vee q \implies p \vee r$	$(\implies i)$ 2,8

Universidad Veracruzana

Ejemplo

1.	$p \land (q \lor r)$	premisa
2.	p	$(\land e_1)$ 1
3.	$q \lor r$	$(\land e_2)$ 1
4.	q	supuesto
5.	$p \land q$	$(\land i)$ 2,4
6.	$(p \land q) \lor (p \land r)$	$(\lor i_1)$ 5
7.	r	supuesto
8.	$p \land r$	$(\land i)$ 2,7
9.	$(p \land q) \lor (p \land r)$	$(\lor i_2)$ 8
10.	$(p \land q) \lor (p \land r)$	$(\lor e)$ 3,4-6,7-9

Universidad Veracruzana

La regla Copia

- Una regla final es extra lógica. Nos permite reutilizar resultados obtenidos previamente en cualquier parte donde sean visibles:

1.	p	supuesto
2.	q	supuesto
3.	p	copia 1
4.	$q \implies p$	$(\implies i)$ 2-3
5.	$p \implies (q \implies p)$	$(\implies i)$ 1-4

Universidad Veracruzana

Contradicción

- Las contradicciones son expresiones de la forma $\phi \land \neg\phi$ ó $\neg\phi \land \phi$, donde ϕ es cualquier fórmula.
- $p \land \neg p$ es una contradicción; y también lo es $(p \implies q) \land \neg(p \implies q)$
- Todas son equivalentes:

$$\neg(r \lor s \implies q) \land (r \lor s \implies q \dashv\vdash (p \implies q) \land \neg(p \implies q)$$

- Se denotan como $\bot$.

Universidad Veracruzana

Eliminación de la negación

- ¡Cualquier fórmula puede derivarse de una contradicción! *ex contradictione sequitur quodlibet* (ECQ).
- El hecho de que $\perp$ pueda probar lo que sea, se expresa en la regla de eliminación de la contradicción:

$$\frac{\perp}{\phi}\ (\perp e)$$

- El hecho de que $\perp$ mismo representa una contradicción queda expresado en la regla de eliminación de la negación:

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp}\ (\neg e)$$

Universidad Veracruzana

Ejemplo

1.	$\neg p \vee q$	premisa
2.	$\neg p$	supuesto
3.	p	supuesto
4.	$\perp$	$(\neg e)$ 3,2
5.	q	$(\perp e)$ 4
6.	$p \implies q$	$(\implies i)$ 3-5
7.	q	supuesto
8.	p	supuesto
9.	q	copia 7
10.	$p \implies q$	$(\implies i)$ 8-9
11.	$p \implies q$	$(\vee e)$ 1, 2-10

Universidad Veracruzana

Introducción de la negación

- Supongamos que asumimos un supuesto que nos lleva a una contradicción.
- Entonces, nuestro supuesto no puede ser verdadero, de forma que debería ser falso.
- Esta intuición es la base de la introducción de la negación:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ (\neg i)$$

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Demuestre que la inferencia $p \implies q, p \implies \neg q \vdash \neg p$ es válida:

1.	$p \implies q$	premisa
2.	$p \implies \neg q$	premisa
3.	p	supuesto
4.	q	$(\implies e)$ 3,1
5.	$\neg q$	$(\implies e)$ 3,2
6.	$\bot$	$(\neg e)$ 4,5
7.	$\neg p$	$(\neg i)$ 3-6

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Pruebe que la inferencia $p \implies \neg p \vdash \neg p$ es válida:

1.	$p \implies \neg p$	premisa
2.	p	supuesto
3.	$\neg p$	$(\implies e)$ 2,1
4.	$\bot$	$(\neg e)$ 2,3
5.	$\neg p$	$(\neg i)$ 2-4

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Pruebe que la inferencia $p \implies (q \implies r), p, \neg r \vdash \neg q$ es válida (sin usar *modus tollens*):

1.	$p \implies (q \implies r)$	premisa
2.	p	premisa
3.	$\neg r$	premisa
4.	q	supuesto
5.	$q \implies r$	$(\implies e)$ 2,1
6.	r	$(\implies e)$ 4,5
7.	$\bot$	$(\neg e)$ 6,3
8.	$\neg q$	$(\neg i)$ 4-7

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Pruebe que la inferencia $p \land \neg q \implies r, \neg r, p \vdash q$ es válida:

1.	$p \land \neg q \implies r$	premisa
2.	$\neg r$	premisa
3.	p	premisa
4.	$\neg q$	supuesto
5.	$p \land \neg q$	$(\land i)$ 3,4
6.	r	$(\implies e)$ 5,1
7.	$\bot$	$(\neg e)$ 6,2
8.	$\neg\neg q$	$(\neg i)$ 4-7
9.	q	$(\neg\neg e)$ 8

Universidad Veracruzana

Modus tollens

- He aquí su demostración:

1.		$\phi \implies \psi$	premisa
2.		$\neg\psi$	premisa
3.		ϕ	supuesto
4.		ψ	$(\implies e)$ 3,1
5.		$\bot$	$(\neg e)$ 4,2
6.		$\neg\phi$	$(\neg i)$ 3-5

Universidad Veracruzana

Introducción doble negación

- Se puede demostrar como sigue:

1.	ϕ	premisa
2.	$\neg\phi$	supuesto
3.	$\perp$	$(\neg e)$ 1,2
4.	$\neg\neg\phi$	$(\neg i)$ 2-3

Universidad Veracruzana

Reducción al absurdo

- Recibe el nombre de *reduction ad absurdum* o prueba por contradicción (PBC) (del inglés *proof by contradiction*).
- La regla expresa que si a partir de $\neg\phi$ obtenemos una contradicción, podemos deducir que ϕ:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ (PBC)$$

Universidad Veracruzana

Ley del medio excluido

- Se le conoce como *tertium non datur* o ley del medio excluido (*LEM*) (del inglés *law of the excluded medium*).
- La ley expresa que $\phi \vee \neg\phi$ es verdadera, sea lo que sea ϕ, ésta es falsa o verdadera y nada más.

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi} \text{ (LEM)}$$

- Los condicionales de los lenguajes de programación, como `if B then {C} else {D}` asumen que $B \vee \neg B$ es verdadera

Universidad Veracruzana

Prueba del medio excluido

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	supuesto
2.	ϕ	supuesto
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$(\vee i)$ 2
4.	$\bot$	$(\neg e)$ 3,1
5.	$\neg\phi$	$(\neg i)$ 2-4
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$(\vee i_2)$ 5
7.	$\bot$	$(\neg e)$ 6,1
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$(\neg e)$ 2-8
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$(\neg\neg e)$ 9

Universidad Veracruzana

Ejemplo

- Use (LEM) para probar que la inferencia $p \implies q \vdash \neg p \lor q$ es válida:

1.	$p \implies q$	premisa
2.	$\neg p \lor p$	(LEM)
3.	$\neg p$	supuesto
4.	$\neg p \lor q$	$(\lor i_1)$ 3
5.	p	supuesto
6.	q	$(\implies e)$ 5,1
7.	$\neg p \lor q$	$(\lor i_2)$ 6
8.	$\neg p \lor q$	$(\lor e)$ 2, 3-4, 5-7

Universidad Veracruzana

Intepretación procedural

- ($\wedge i$) Para probar $\phi \wedge \psi$, primero probamos ϕ y luego ψ, por separado. Entonces usamos la regla ($\wedge i$).
- ($\wedge e_1$) Para probar ϕ, comienza por probar $\phi \wedge \psi$ y luego usa la regla ($\wedge e_1$).
- ($\vee i_1$) Para probar ϕ intente probar ψ, y luego aplique la regla ($\vee i_1$).
- ($\vee e$) Si es el caso que $\phi \vee \psi$ y se quiere probar χ, entonces intenta probar χ a partir de ϕ y de ψ.
- ($\implies i$) Si se quiere probar $\phi \implies \psi$, pruebe ψ a partir de ϕ (y el resto de las premisas).
- ($\neg i$) Para probar $\neg\phi$, pruebe $\perp$ a partir de ϕ (y el resto de las premisas).

Universidad Veracruzana

Equivalencia demostrable

- Sean ϕ y ψ dos fórmulas de la lógica proposicional. Decimos que ϕ y ψ forman una equivalencia demostrable, si y sólo si (ssi) $\phi \vdash \psi$ y $\psi \vdash \phi$ son inferencias válidas. Esto se denota como $\phi \dashv\vdash \psi$.
- O alternativamente $\vdash (\phi \implies \psi) \land (\psi \implies \phi)$.

Universidad Veracruzana

Ejemplos de equivalencias

- $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg q \vee \neg p$
- $p \implies q \dashv\vdash \neg q \implies \neg p$
- $p \wedge q \implies p \dashv\vdash r \vee \neg r$
- $\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg q \wedge \neg p$
- $p \implies q \dashv\vdash \neg p \vee q$
- $p \wedge q \implies r \dashv\vdash p \implies (q \implies r)$

Universidad Veracruzana

Referencias I

[1] M Huth y M Ryan. *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.

Universidad Veracruzana