3 DEDUCCIÓN NATURAL

El objetivo de la lógica en las Ciencias de la Computación es el desarrollo de lenguajes para modelar las situaciones que un profesional del área encuentra comúnmente, y razonar formalmente acerca de ellas [64]. Razonar acerca de estas situaciones, significa construir **argumentos** acerca de ellas. Lo ideal es que esta construcción sea formal, de manera que los argumentos sean válidos y puedan ser defendidos rigurosamente; o ejecutados por una máquina. Esto último, es de particular importancia desde la perspectiva de la Inteligencia Artificial. Consideren el siguiente ejemplo:

Argumentación

Ejemplo 3.1. *Si el autobus llega tarde y no hay taxis en la estación, llegaré tarde a clase. No llegué tarde a clase. El autobus llegó tarde.* ***Por lo tanto****, había taxis en la estación.*

De manera intuitiva, el argumento anterior es válido, ya que si consideramos el primer enunciado junto con el tercero, nos dicen que si no hay taxis llegaré tarde a clase. El segundo enunciado nos dice que no llegué tarde, por lo que debe ser el caso que en la estación hubiese taxis.

Una gran parte del contenido de este texto está relacionado con argumentos que tienen esta estructura: una secuencia de enunciados seguida de la expresión "por lo tanto" y un enunciado más. El argumento se dice **válido**, si el enunciado final se sigue lógicamente de los enunciados previos al "por lo tanto". Qué queremos decir por "se sigue de", es el tema de este capítulo y el siguiente. Consideren otro ejemplo:

Validez

Ejemplo 3.2. *Si está lloviendo y Ana no trae su sombrilla, se mojará. Ana no está mojada. Está lloviendo.* ***Por lo tanto****, Ana trae su sombrilla.*

Este argumento también es válido y, de hecho, tiene la misma estructura que el del ejemplo anterior. Solo hemos remplazado algunos enunciados por otros:

Ejemplo 1	Ejemplo 2
Si el autobus llega tarde y	Si está lloviendo y
no hay taxis en la estación entonces	Ana no trae su paraguas entonces
llegaré tarde a clase	se mojará
El autobus llegó tarde	Está lloviendo
No llegué tarde	No se mojó
Había taxis en la estación	Traía su paraguas

De hecho, el argumento podría expresarse sin hablar específicamente de autobuses, taxis, lluvia y sombrillas: Si p y no q entonces r. No r. Por lo tanto q. Al desarrollar una lógica, no nos concierne que es lo que los enunciados realmente significan, sino su **estructura lógica**. Aunque claro, cuando aplicamos el razonamiento, como en los ejemplos anteriores, el significado será de gran interés.

Estructura

3.1 ENUNCIADOS DECLARATIVOS

Para poder argumentar de forma rigurosa, necesitamos desarrollar un lenguaje en el cual podamos expresar nuestros enunciados resaltando su estructura lógica. Comenzaremos por el lenguaje de la lógica proposicional. Este lenguaje está basado en **proposiciones** o **enunciados declarativos** que uno puede, en principio, argumentar que son verdaderos o falsos. Los siguientes enunciados son ejemplos de proposiciones:

Proposiciones

1. La suma de 2 y 3 es 5.
2. Mariano reaccionó violentamente ante las acusaciones.
3. Todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos.
4. François-Marie Banier était un écrivain français.

El enunciado (1) puede ser declarado como verdadero en el contexto de la aritmética y la representación arábica décimal para los números naturales. El enunciado (2) es un poco más problemático. Para evaluar este enunciado necesitaríamos de un testigo de la reacción de Marianio y posiblemente conocer las acusaciones. En todo caso, si hubiésemos presenciado la escena descrita, podríamos asignar un **valor de verdad** al enunciado en cuestión. El enunciado (3) se conoce como la Conjetura de Goldbach y es uno de los problemas abiertos más antiguos de las matemáticas. Aunque la conjetura no ha sido demostrada, evidentemente toda proposición para los números mayores que dos resulta falsa o verdadera. La cuestión aquí es que no solo desconocemos el valor de verdad del enunciado, sino que ignoramos si aún siendo verdad, ésta puede ser probada por medios finitos. El enunciado (4) se puede declarar verdadero hablando francés y siendo un poco snob. En todo caso, los enunciados declarativos pueden realizarse en cualquier lenguaje, natural o artificial.

Valor de verdad

Los siguientes enunciados no son declarativos:

- Pásame la sal.
- Listo, ¡vamonos!
- ¿Qué pesa más un kilo de plomo o de algodón?
- No uses el teléfono en clase.

Como es de esperarse, nuestro interés se centra en establecer enunciados declarativos acerca del comportamiento de los sistemas computaciones, o sus programas. No solo queremos especificar esos enunciados, sino verificar si dado un programa o sistema, este satisface su especificación. De forma que necesitamos desarrollar un **cálculo** del razonamiento, que nos permita obtener conclusiones a partir de un conjunto dado de supuestos. Una cuestión más complicada es, dada cualquier propiedad verdadera sobre un programa, encontrar un argumento en nuestro cálculo, que tiene como conclusión a la propiedad en cuestión... ¡como la conjetura de Goldbach [1]!

Lógica y Cómputo

Las lógicas que vamos a estudiar, tienen una naturaleza **simbólica** [2]. Se trata de poder traducir un buen número de enunciados declarativos del español, o cualquier otro lenguaje natural, a cadenas de símbolos; de forma que obtengamos un lenguaje que, aunque reducido, sea los suficientemente **expresivo** y al mismo tiempo, nos permita concentrarnos en los **mecanismos** de nuestra argumentación.

Lógica e IA

Una estrategia común es considerar que ciertos enunciados declarativos son **atómicos**, es decir, que no pueden descomponerse en otros enunciados. Por ejemplo: El número 5 es impar. Estos enunciados serán denotados por los símbolos $p, q, r, \ldots$ o a veces por $p_1, p_2, p_3, \ldots$ de forma que componer enunciados complejos con base en ellos.

Proposiciones atómicas

Ejemplo 3.3. *Los siguientes enunciados son declarativos:*

p : *Gané la lotería la semana pasada.*

q : *Compré un boleto de lotería.*

r : *Gané en los caballos la semana pasada.*

Los enunciados **compuestos** pueden construirse usando **operadores lógicos**, de acuerdo a las siguientes reglas:

Operadores y proposiciones compuestas

$\neg$: La **negación** de p se denota por $\neg p$. Siguiendo el ejemplo 3.3, este enunciado expresa: No gané la lotería la semana pasada; o su equivalente: No es verdad que gané la lotería la semana pasada.

$\vee$: La **disyunción** de p y r se denota por $p \vee r$ y expresa que al menos uno de los dos enunciados es verdadero: Gané la lotería la semana pasada o gané en los caballos la semana pasada.

$\wedge$: La **conjunción** es el dual de la regla anterior. $p \wedge r$ expresa que ambos enunciados son verdaderos: La semana pasada gané la lotería y en los caballos.

$\rightarrow$: La **implicación** $p \rightarrow q$ expresa: **Si** gané la lotería la semana pasada, **entonces** compré un boleto de lotería. El enunciado sugiere que q es consecuencia lógica de p. A p se le suele llamar **premisa** y a q **conclusión**.

Podemos usar estas reglas para construir proposiciones complejas. Por ejemplo, ahora podemos formar la proposición:

$$p \wedge q \rightarrow \neg r \vee q$$

que expresa: Si p y q entonces no r o q. Observen que existe cierta ambigüedad sobre como debe leerse este enunciado. En las ciencias de la computación solemos eliminar la ambigüedad con el uso de paréntesis:

$$(p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$$

Otra posibilidad es adoptar alguna convención sobre la **precedencia** de los operadores, es decir, establecer que operadores aplican primero. La opción de los paréntesis es sintácticamente más clara.

Precedencia de los operadores

Definición 3.1. *Precedencia de los operadores: $\neg$ liga más fuerte que $\vee$ y $\wedge$; que a su vez ligan más fuerte que $\rightarrow$. La implicación es asociativa a la derecha: $p \rightarrow q \rightarrow r$ denota $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.*

3.2 REGLAS PARA LA DEDUCCIÓN NATURAL

¿Cómo procederemos para construir un cálculo de razonamiento que permita establecer la validez de, digamos, los ejemplos 3.1 y 3.2 de este documento? Sería deseable contar con un conjunto de reglas que permitan establecer si una conclusión se sigue de ciertas premisas.

En la deducción natural se cuenta con una colección de **reglas de inferencia** (o de prueba) que nos permiten establecer que fórmulas se pueden derivar a partir de otras. Supongamos que tenemos un conjunto de fórmulas $\Delta = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ [3] a las que llamaremos **premisas**. Y otra fórmula ψ a la que llamaremos **conclusión**. Al aplicar las reglas de prueba a las fórmulas en Δ, esperamos obtener nuevas fórmulas hasta obtener eventualmente la conclusión. Esto suele denotarse de la siguiente manera:

Reglas de inferencia

Premisas y conclusiones

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

Tal expresión suele conocerse como una **consecuencia** [4]. Se dice que la conse-

Consecuencia

1 Por cierto, Dioxadis [42] nos ofrece una divertida novela que gira en torno a la conjetura y sus personajes.
2 Observen la relevancia del carácter simbólico de la lógica para nosotros, de acuerdo a la hipótesis del sistema simbólico físico de Newell y Simon [87]: Tal sistema tiene los medios necesarios y suficientes para la acción inteligente general.
3 Tradicionalmente se usan letras minúsculas del alfabeto griego ($\phi, \psi, \chi, \eta, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$) para denotar fórmulas; y mayúsculas ($\Delta, \Gamma, \Phi, \Psi, \ldots$) para denotar conjuntos de ellas. De alguna forma son metavariables, denotan expresiones de la lógica proposicional, pero no forman parte de ella.

cuencia es válida si se puede encontrar prueba para ella. La consecuencia para los ejemplos 1 y 2 tiene la forma:

$$p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$$

Construir estas pruebas es un ejercicio creativo, semejante a programar. No es necesariamente obvio que regla aplicar, ni en qué orden. Aunque como veremos, la estructura lógica de lo que queremos concluir puede guiar este proceso. Las reglas de inferencia deben ser cuidadosamente elegidas, de lo contrario podemos "probar" argumentaciones inválidas. Por ejemplo, es deseable que no seamos capaces de probar que la consecuencia $p, q \vdash p \wedge \neg q$ es válida. Asuman que p denota el clavel es una flor y q que la rosa es una flor. No tiene sentido inferir que el clavel es flor y la rosa no lo es. A continuación revisaremos en detalle las reglas usadas en la deducción natural.

3.2.1 Las reglas de la conjunción

Esta regla permite concluir $\phi \wedge \psi$ dado que ϕ y ψ son el caso. La regla se escribe así:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ (\wedge i)$$

Sobre las líneas están las dos premisas de la regla. Abajo de la línea se encuentra la conclusión. Observen que ésta no es, generalmente, la conclusión que buscamos. Para ello habrá que aplicar más reglas. A la derecha de la regla tenemos el nombre de la misma abreviado $(\wedge i)$ o introducción de la conjunción. El resultado de aplicar esta regla es que hemos introducido una conjunción que no teníamos en las premisas.

Existen también dos reglas sobre la eliminación de la conjunción:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

La regla $(\wedge e_1)$ indica que si hemos probado $\phi \wedge \psi$, podemos concluir que ϕ. La regla $(\wedge e_2)$ es parecida solo que concluímos el segundo argumento de la conjunción, ψ.

Ejemplo 3.4. *Usemos las reglas definidas para probar que $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ es válida. Comenzamos escribiendo las premisas, una por línea y, dejando un espacio vacío, escribimos la conclusión:*

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \quad\ r \\ \\ q \wedge r \end{array}$$

Construir la prueba consiste en llenar la brecha entre las premisas y la conclusión aplicando la secuencia adecuada de reglas de inferencia. En este caso, aplicaremos $(\wedge e_2)$ a la primer premisa para obtener q. Posteriormente, aplicaremos $(\wedge i)$ a q y la segunda premisa para obtener $q \wedge r$. Usualmente numeramos las líneas de la prueba para poder referenciar los resultados parciales obtenidos:

4 Del inglés *sequent*. No se debe confundir consecuencia con conclusión, tal y como se han definido: La expresión $\Delta \vdash \phi$ es una consecuencia, donde ϕ es la conclusión y Δ las premisas.

1.	$p \wedge q$	*premisa*
2.	r	*premisa*
3.	q	$(\wedge e_2)$ 1
4.	$q \wedge r$	$(\wedge i)$ 3, 2

Observen que esta demostración puede representarse tambien de la siguiente forma:

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\,(\wedge e_2) \qquad r}{q \wedge r}\,(\wedge i)$$

Sin embargo, hemos optado por una representación lineal que aplana el árbol anterior mediante el uso de las líneas numeradas para hacer referencia a entradas previas en la demostración. En todo caso, si una inferencia es válida, puede haber muchas formas de probarla. Lo que es importante resaltar es que podemos detectar cualquier prueba putativa, verificando que cada línea de la demostración se ha producido mediante una aplicación válida de una regla de prueba.

Ejemplo 3.5. *Pruebe ahora que* $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge r \vdash q \wedge s$*:*

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	*premisa*
2.	$s \wedge t$	*premisa*
3.	$p \wedge q$	$(\wedge e_1)$ 1
4.	q	$(\wedge e_2)$ 3
5.	s	$(\wedge e_1)$ 2
6.	$q \wedge s$	$(\wedge i)$ 4, 5

3.2.2 Las reglas de la doble negación

Intuitivamente, una fórmula es equivalente a su doble negación. Si expresamos, no es cierto que no está lloviendo; estamos expresando que está lloviendo. De forma que las reglas de eliminación e introducción de la doble negación son como sigue:

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\,(\neg\neg e) \qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\,(\neg\neg i)$$

Ejemplo 3.6. *La prueba de la inferencia* $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$ *usa la mayoría de las reglas introducidas hasta ahora:*

1.	p	*premisa*
2.	$\neg\neg(q \wedge r)$	*premisa*
3.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ 1
4.	$q \wedge r$	$(\neg\neg e)$ 2
5.	r	$(\wedge e_2)$ 4
6.	$\neg p \wedge r$	$(\wedge i)$ 3, 5

3.2.3 La eliminación de la implicación

En nuestro cálculo, el *modus ponens* se introduce con la siguiente regla de prueba, conocida como eliminación de la implicación: *Modus ponens*

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \ (\rightarrow e)$$

Consideren los siguientes enunciados declarativos:

p : Llueve

q : La calle está mojada

entonces la fórmula $p \rightarrow q$ expresa que si llueve la calle está mojada. Ahora, si conocemos que es el caso que p, llueve; podemos combinar esas dos piezas de información con nuestra regla de eliminación de la implicación, para concluir que q, la calle está mojada. Sentido común. Observen que p es importante, si p no se satisface, no podemos concluir q.

Ejemplo 3.7. *Consideren los siguientes enunciados declarativos:*

p : *La entrada del programa es un entero.*

q : *La salida del programa es un booleano.*

entonces la expresión $p \rightarrow q$ expresa que si la entrada del programa es un entero, entonces su salida es un boleano. Luego si p se satisface, la entrada del programa es un entero, entonces podemos concluir q que su salida es un boleano. Nuevamente, si la entrada del programa es una cadena de caracteres, p no se satisface y no podemos concluir q.

Cabe mencionar que los parámetros como ϕ y ψ en estas reglas, pueden recibir proposiciones compuestas, además de atómicas:

1.	$\neg p \wedge q$	*premisa*
2.	$\neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$	*premisa*
3.	$r \vee \neg p$	$(\rightarrow e)\ 2, 1$

Evidentemente, podemos aplicar estas reglas tantas veces queramos:

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	*premisa*
2.	$p \rightarrow q$	*premisa*
3.	p	*premisa*
4.	$q \rightarrow r$	$(\rightarrow e)\ 3, 1$
5.	q	$(\rightarrow e)\ 3, 2$
6.	r	$(\rightarrow e)\ 5, 4$

Existe otra forma de eliminación de la implicación que puede ser derivada a partir de las reglas básicas que definiremos en este capítulo. Por ello suele decirse que es una regla híbrida. A la regla en cuestión se le suele conocer como *modus tollens*. *Modus tollens* Supongan que $p \rightarrow q$ y $\neg q$ son el caso. Entonces, si p se satisface, podríamos concluir que q $(\to e)$. Pero esto resulta contradictorio con $\neg q$ que es el caso. Por lo tanto, debemos inferir que $\neg p$ se satisface. Esto puede expresarse en la siguiente regla de prueba:

$$\frac{\phi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\ (MT)$$

Eso aplicado al ejemplo 3.7 nos daría la siguiente inferencia. Si la entrada del programa es un entero, su salida es un boleano. No es el caso que la salida sea un boleano. Entonces podemos inferir que no es el caso que la entrada del programa sea un entero.

Ejemplo 3.8. *Pruebe que la inferencia* $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$ *es válida.*

1.	$p \to (q \to r)$	*premisa*
2.	p	*premisa*
3.	$\neg r$	*premisa*
4.	$q \to r$	$(\to e)$ 1, 2
5.	$\neg q$	(MT) 4, 3

Ejemplo 3.9. *Las siguientes pruebas combinan el* modus tollens *con la eliminación e introducción de la doble negación:*

1.	$\neg p \to q$	*premisa*
2.	$\neg q$	*premisa*
3.	$\neg\neg p$	(MT) 1, 2
4.	p	$(\neg\neg e)$ 3

prueba que la inferencia $\neg p \to q, \neg q \vdash p$ *es válida, y:*

1.	$p \to \neg q$	*premisa*
2.	q	*premisa*
3.	$\neg\neg q$	$(\neg\neg i)$ 2
4.	$\neg p$	(MT) 1, 3

prueba que la inferencia $p \to \neg q, q \vdash \neg p$.

3.2.4 La introducción de la implicación

La regla del *modus tollens* nos permitió probar que la inferencia $p \to q, \neg q \vdash \neg p$ es válida. Pero la validez de la inferencia $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$ solo parece plausible. Observen que en cierto sentido, ambas expresiones dicen lo mismo. Sin embargo, no contamos aún con ninguna regla de prueba que nos permita introducir implicaciones, más allá de las que se establecen en las premisas. La mecánica de la regla con este propósito es más complicada que las anteriores, primero asumamos que

$p \to q$ es el caso. Si **asumimos temporalmente** que $\neg q$ es válida, entones podríamos usar (MP) para inferir $\neg q$. Por lo tanto, asumiendo $p \to q$, podemos probar que $\neg q \to \neg p$: *Supuestos*

1.	$p \to q$	*premisa*
2.	$\neg q$	*supuesto*
3.	$\neg p$	(MT) 1, 2
4.	$\neg q \to \neg p$	$(\to i)$ $2-3$

La caja en esta prueba sirve para delimitar el alcance del supuesto temporal $\neg q$. Estamos expresando lo siguiente: Supongamos que $\neg q$ (para ello abrimos una caja). Entonces seguimos aplicando reglas de prueba, por ejemplo, para obtener $\neg p$. Como esto depende de nuestro supuesto inicial, lo colocamos dentro de la misma caja. El paso final de la demostración no depende del supuesto que habíamos adoptado, por eso lo colocamos fuera de la caja.

Lo anterior también funciona si pensamos que $p \to q$ es el tipo de un procedimiento de cómputo. Por ejemplo, p puede decir que el procedimiento espera un valor entero x como entrada; y q puede expresar que la salida del procedimeinto es un valor boleano y. Probar que esto es cierto es lo que se conoce como **verificación de tipos**, un tema importante en la construcción de compiladores para los lenguajes de programación fuertemente tipificados, por ejemplo CAML, Haskell, etc. La formula de introducción de la implicación, que definimos a continuación, computa precisamente esto: *Verificación de tipos*

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi}\ (\to i)$$

La regla expresa que para probar $\phi \to \psi$, debemos asumir temporalmente ϕ y entonces probar ψ. En la prueba de ψ se pueden usar cualquiera de las fórmulas obtenidas hasta el momento, como premisas y conclusiones provisionales.

Ejemplo 3.10. *Una prueba usando la introducción de la implicación y otras reglas definidas anteriormente:*

1.	$\neg q \to \neg p$	*premisa*
2.	p	*supuesto*
3.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$ 2
4.	$\neg\neg q$	(MT) 1, 3
5.	q	$(\neg\neg e)$ 4
6.	$p \to q$	$(\to i)$ $2-5$

La siguiente prueba es válida:

1.		
2.	p	*supuesto*
3.	$p \to p$	$(\to i)\ 2-3$

Podemos decir que la prueba no necesita argumentación, es decir, no tenemos premisas. Esto suele escribirse $\vdash p \to p$.

Definición 3.2. *Las fórmulas lógicas con una inferencia válida $\vdash \phi$ se conocen como* ***teoremas****.*

Ejemplo 3.11. *Esta es la prueba de un teorema que utiliza las reglas definidas hasta ahora:*

1.		
2.	$q \to r$	*supuesto*
3.	$\neg q \to \neg p$	*supuesto*
4.	p	*supuesto*
5.	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)\ 4$
6.	$\neg\neg q$	$(MT)\ 3,5$
7.	q	$(\neg\neg e)\ 6$
8.	r	$(\to i)\ 2,7$
9.	$p \to r$	$(\to i)\ 4-8$
10.	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$(\to i)\ 3-9$
11.	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$(\to i)\ 1-10$

Por lo tanto, la inferencia $\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$ es válida, mostrando que $(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$ es otro teorema.

Observen que este ejemplo sugiere que es posible transformar de esta manera toda conseuencia de la forma $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ en una prueba de un teorema de la forma $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots \to (\phi_n \to \psi \ldots)))$ gracias a la introducción de la implicación. Basta con agregar n líneas de la regla $\to i$ aplicada a $\phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi$, en ese orden.

Las cajas anidadas en la demostración del teorema del ejemplo 3.11 revelan un patrón en la demostración: el uso de las reglas de eliminación para deconstruir los supuestos; y posteriormente, el uso de las reglas de introducción para construir la conclusión final. Hay más aún, parte de esa demostración está determinada por la estructura de las fórmulas a demostrar, mientras que otra parte es creativa. La estructura lógica de la fórmula en cuestión se muestra enla figura 3.1. Observen que la raíz del árbol es una implicación, pero la única forma de construir implicaciones es por medio de la regla $\to i$, de modo que debemos expresar el supuesto de la implicación como tal (línea 2) y mostrar su conclusión (línea 10). Si tenemos éxito, habremos terminado la demostración en la línea 11. De forma que las líneas 2, 10 y 11 están determinadas por el hecho de que la fórmula en cuestión sea una implicación. Lo mismo sucede con la fórmula de la línea 10, por lo que debemos asumir su premisa en la línea 3 y tratar de probar su conclusión en la línea 9, etc. La única cuestión pendiente es ¿Cómo probar r a partir de los supuestos introducidos en las líneas 2-4? Esta parte es la única parte creativa de la prueba. La línea 2 introduce $q \rightarrow r$ y sabemos que podemos obtener r gracias a la regla de eliminación de la implicación $\rightarrow e$, si es que podemos tener q. ¿Cómo obtenemos q? Las líneas 4 y 5 semejan un patrón de modus tollens, excepto que necesitamos $\neg\neg p$ para poder aplicar esa regla y eso lo conseguimos con la regla $\neg\neg i$ en la línea 5. De forma que la estructura lógica de las fórmulas que queremos probar nos dicen mucho acerca de la estructura de la posible prueba. Es deseable que explotemos esa información al hacer nuestras pruebas. Terminaremos con unos ejemplos más que involucran también las reglas de la conjunción.

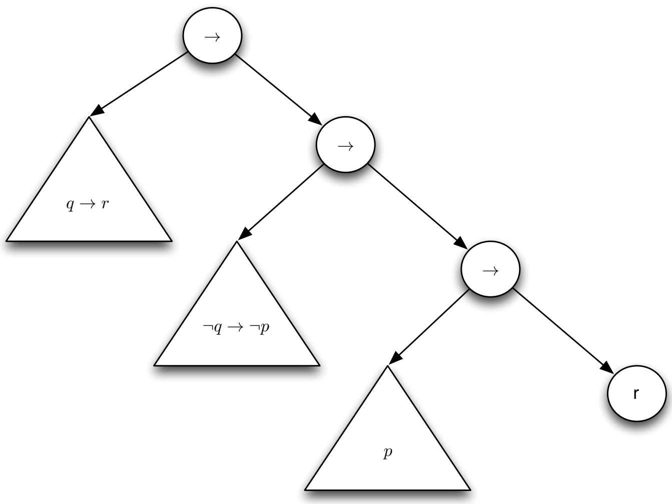

Figura 3.1: La estructura lógica del teorema del ejemplo 3.11.

Ejemplo 3.12. *Utilizando la regla $(\wedge i)$ prueba la validez de la inferencia $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$:*

1.	$p \wedge q \rightarrow r$	*premisa*
2.	p	*supuesto*
3.	q	*supuesto*
4.	$p \wedge r$	$(\wedge i)\ 2,3$
5.	r	$(\rightarrow e)\ 1,4$
6.	$q \rightarrow r$	$(\rightarrow i)\ 3-5$
7.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(\rightarrow i)\ 2-6$

Ejemplo 3.13. *Utilize las reglas de eliminación de la conjunción para provar el converso del ejemplo anterior: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$:*

1.	$p \to (q \to r)$	*premisa*
2.	$p \wedge q$	*supuesto*
3.	p	$(\wedge e_1)$ 2
4.	q	$(\wedge e_2)$ 2
5.	$q \to r$	$(\to e)$ 1,3
6.	r	$(\to e)$ 4,5
7.	$p \wedge q \to r$	$(\to i)$ 2 − 6

Equivalencia lógica

Lo anterior quiere decir que estas fórmula son **equivalentes** en el sentido que pueden ser probadas a partir de la otra. Esto se denota de la siguiente manera:

$$p \wedge q \to r \dashv\vdash p \to (q \to r)$$

Como solo podemos tener una fórmula a la derecha de $\vdash$, cada ocurrencia de $\dashv\vdash$ solo puede relacionar dos fórmulas.

Ejemplo 3.14. *Aquí hacemos uso de la introducción y eliminación de la conjunción para probar la validez de la inferencia* $p \to q \vdash p \wedge r \to q \wedge r$*:*

1.	$p \to q$	*premisa*
2.	$p \wedge r$	*supuesto*
3.	p	$(\wedge e_1)$ 2
4.	r	$(\wedge e_2)$ 2
5.	q	$(\to e)$ 1,3
6.	$q \wedge r$	$(\wedge i)$ 5,4
7.	$p \wedge r \to q \wedge r$	$(\to i)$ 2 − 6

3.2.5 Las reglas de la disyunción

Comencemos por la introducción de la disyunción. A partir de la premisa ϕ podemos concluir $\phi \vee \psi$, sea cual sea la elección de ψ. De igual manera podemos concluir ϕ si hemos probado ψ:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

La eliminación es un poco más complicada. Supongamos que queremos probar una proposición χ asumiendo que $\phi \vee \psi$. Puesto que no sabemos que argumento de la disyunción es verdadero, debemos obtener dos pruebas por separado que deberemos combinar en un solo argumento:

1. Primero asumimos que ϕ es verdadera y obtenemos la prueba de χ.
2. Entonces asumimos que ψ es verdadera y que da una prueba para χ también.
3. Dadas las dos pruebas anteriores, podemos inferir χ de la verdad de $\phi \vee \psi$, puesto que el análisis de casos ha sido exhaustivo.

La regla se escribe como sigue:

$$\dfrac{\phi \lor \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\lor e)$$

Ejemplo 3.15. *Probar que la inferencia $p \lor q \vdash q \lor p$ es válida:*

1.	$p \lor q$	*premisa*
2.	p	*supuesto*
3.	$p \lor q$	$(\lor i_2)$ 2
4.	q	*supuesto*
5.	$q \lor p$	$(\lor i_1)$ 4
6.	$q \lor p$	$(\lor e)$ $1, 2-3, 4-5$

Observen que las sub pruebas son ortogonales, no podemos usar los supuestos de una, en la otra. La idea es que si usamos $\phi \lor \psi$ en un argumento donde aparece como premisa o supuesto, estamos perdiendo información. Sabemos que ϕ es el caso, o lo es ψ pero no sabemos cual de los dos es. Por ello, debemos construir evidencia sólida para cada una de las posibilidades.

Ejemplo 3.16. *Pruebe que la inferencia $q \to r \vdash p \lor q \to p \lor r$ es válida:*

1.	$q \to r$	*premisa*
2.	$p \lor q$	*supuesto*
3.	p	*supuesto*
4.	$p \lor r$	$(\lor i_1)$ 3
5.	q	*supuesto*
6.	r	$(\to e)$ $1, 5$
7.	$p \lor r$	$(\lor i_2)$ 6
8.	$p \lor r$	$(\lor e)$ $2, 3-4, 5-7$
9.	$p \lor q \to p \lor r$	$(\to i)$ $2, 8$

Ejemplo 3.17. *Del algebra boleana y la teoría de circuitos sabemos que la conjunción se distribuye sobre la disyunción. Pruébelo. Esto equivale a probar que la inferencia $p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$ y vice-versa. Comencemos por este caso:*

1.	$p \wedge (q \vee r)$	*premisa*
2.	p	$(\wedge e_1)$ 1
3.	$q \vee r$	$(\wedge e_2)$ 1
4.	q	*supuesto*
5.	$p \wedge q$	$(\wedge i) 2, 4$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(\vee i_1)$ 5
7.	r	*supuesto*
8.	$p \wedge r$	$(\wedge i)$ 2,7
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(\vee i_2)$ 8
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(\vee e)$ $3, 4-6, 7-9$

Una regla final extra lógica, nos permite reutilizar resultados obtenidos previamente en cualquier parte donde sean visibles:

1.		
2.	p	*supuesto*
3.	q	*supuesto*
4.	p	*copia* 2
5.	$q \to p$	$(\to i)$ $2-3$
6.	$p \to (q \to p)$	$(\to i)$ $2-5$

3.2.6 Las reglas de la negación

Hay un problema para introducir las reglas de negación en este juego que tiene que ver con la inferencia, y por tanto con la preservación de la verdad. No podemos inferir directamente $\neg\phi$ a partir de ϕ. Para ello necesitamos notación adicional.

Definición 3.3 (Contradicción)**.** *Las contradicciones son expresiones de la forma $\phi \wedge \neg\phi$ ó $\neg\phi \wedge \phi$, donde ϕ es cualquier fórmula. Una contradicción se denota $\bot$.*

Por ejemplo, $p \wedge \neg p$ es una contradicción; y también lo es $(p \to q) \wedge \neg(p \to q)$. Las contradicciones son un concepto importante en la lógica. Con respecto a la verdad, todas son equivalentes. Esto significa que deberíamos ser capaces de probar que:

$$\neg(r \vee s \to q) \wedge (r \vee s \to q \dashv\vdash (p \to q) \wedge \neg(p \to q)$$

puesto que ambos lados de la equivalencia son una contradicción. De hecho podremos probar esto luego de introducir las reglas de la negación. Lo curioso es que no solo las contradicciones pueden derivarse de las contradicciones, sino que ¡cualquier fórmula puede derivarse de una contradicción! De hecho, el principio suele conocerse por su nombre en latín *ex contradictore quodlibet* (ECQ), a partir de una contradicción cualquier cosa se sigue. Esto puede resultar contrintuitivo, ¿Porqué tendría que argumentar que $p \wedge \neg p \vdash q$, donde:

p: La luna es de queso azul.

q: Me gusta el peperoni en mi pizza.

considerando que mis preferencias gastronómicas no tienen nada que ver con la constitución de la luna? La razón está en $\vdash$ que nos dice todas las cosas que podemos inferir, asumiendo las fórmulas a su izquierda, en un proceso que no toma en cuenta si tales premisas tienen sentido o no. Si quisiera que todas las premisas fuesen relevantes para la concusión, tendría que exlcuir este principio y estaríamos hablando de otro tipo de lógica no clásica, la lógica relevante [78]. El hecho de que $\bot$ pueda probar lo que sea, se expresa en la regla de eliminación de la contradicción:

$$\frac{\bot}{\phi}\ (\bot e)$$

El hecho de que $\bot$ mismo representa una contradicción queda expresado en la regla de eliminación de la negación:

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\ (\neg e)$$

Ejemplo 3.18. *Pruebe que la inferencia $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$ es válida:*

1.	$\neg p \vee q$	*premisa*
2.	$\neg p$	*supuesto*
3.	p	*supuesto*
4.	$\bot$	$(\neg e)$ 3, 2
5.	q	$(\bot e)$ 4
6.	$p \rightarrow q$	$(\rightarrow i)$ $3-5$
7.	q	*supuesto*
8.	p	*supuesto*
9.	q	*copia* 7
10.	$p \rightarrow q$	$(\rightarrow i)$ $8-9$
11.	$p \rightarrow q$	$(\vee e)$ $1, 2-10$

Ahora, supongamos que asumimos un supuesto que nos lleva a una contradicción. Entonces, nuestro supuesto no puede ser verdadero, de forma que debería ser falso. Esta intuición es la base de la introducción de la negación:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ (\neg i)$$

Ejemplo 3.19. *Demuestre que la inferencia $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$ es válida:*

1.	$p \to q$	*premisa*
2.	$p \to \neg q$	*premisa*
3.	p	*supuesto*
4.	q	$(\to e)$ 1,3
5.	$\neg q$	$(\to e)$ 2,3
6.	$\bot$	$(\neg e)$ 4,5
7.	$\neg p$	$(\neg i) 3-6$

Ejemplo 3.20. *Pruebe que la inferencia $p \to \neg p \vdash \neg p$ es válida:*

1.	$p \to \neg p$	*premisa*
2.	p	*supuesto*
3.	$\neg p$	$(\to e)$ 1,2
4.	$\bot$	$(\neg e)$ 2,3
5.	$\neg p$	$(\neg i) 2-4$

Ejemplo 3.21. *Pruebe que la inferencia $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$ es válida (sin usar* modus tollens*):*

1.	$p \to (q \to r)$	*premisa*
2.	p	*premisa*
3.	$\neg r$	*premisa*
4.	q	*supuesto*
5.	$q \to r$	$(\to e)$ 1,2
6.	r	$(\to e)$5,4
7.	$\bot$	$(\neg e)$6,3
8.	$\neg q$	$(\neg i) 4-7$

Ejemplo 3.22. *Volvamos a los ejemplos 3.1 y 3.2 del inicio del capítulo. Pruebe que la inferencia $p \wedge \neg q \to r, \neg r, p \vdash q$ es válida:*

1.	$p \wedge \neg q \rightarrow r$	*premisa*
2.	$\neg r$	*premisa*
3.	p	*premisa*
4.	$\neg q$	*supuesto*
5.	$p \wedge \neg q$	$(\wedge i)$ 3, 4
6.	r	$(\rightarrow e)$ 1, 5
7.	$\perp$	$(\neg e)$ 6, 2
8.	$\neg\neg q$	$(\neg i)$ $4 - 7$
9.	q	$(\neg\neg e)$ 8

3.2.7 Reglas derivadas

He mencionado que la regla de *modus tollens* no es primitiva, en el sentido que puede derivarse de otras reglas. He aquí su demostración:

1.	$\phi \rightarrow \psi$	*premisa*
2.	$\neg\psi$	*premisa*
3.	ϕ	*supuesto*
4.	ψ	$(\rightarrow e)$ 1, 3
5.	$\perp$	$(\neg e)$ 4, 2
6.	$\neg\phi$	$(\neg i)$ $3 - 5$

Podemos replantear las demostraciones que hemos hecho usando *modus tollens* en términos de esta combinación de $(\rightarrow e)$, $(\neg e)$ y $(\neg i)$. Sin embargo, es conveniente pensar en la regla (MT) como una abreviatura de dicha combinación, o mejor aún, como una **macro**.

La introducción de la doble negación también es una regla derivada que se puede demostrar como sigue:

1.	ϕ	*premisa*
2.	$\neg\phi$	*supuesto*
3.	$\perp$	$(\neg e)$ 1, 2
4.	$\neg\neg\phi$	$(\neg i)$ $2 - 3$

Hay una cantidad ilimitada de reglas derivadas que podríamos incluir en nuestro cálculo del razonamiento, sin embargo, no es deseable que éste se vuelva voluminoso y pesado. De hecho, algunos puristas nos dirían que debemos asumir el conjunto mínimo de reglas de prueba que son independientes entre ellas. Por cuestiones prácticas, aquí adoptaremos una posición intermedia, dándole nombre a las reglas derivadas que hemos introducido porque se usan frencuentemente como patrones de razonamiento.

Reducción al absurdo

De hecho introduciremos dos más. La primera de ellas recibe el nombre de *reduction ad absurdum* o prueba por contradicción (PBC) (del inglés *proof by contradiction*). La regla expresa que si a partir de $\neg\phi$ obtenemos una contradicción, podemos deducir que ϕ:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ (PBC)$$

Ley del medio excluído

La segunda regla derivada es muy útil, pues su derivación es larga y complicada. En latín se le conoce como *tertium non datur* o ley del medio excluído (LEM) (del inglés *law of the excluded medium*). La ley expresa que si $\phi \vee \neg\phi$ es verdadera, sea lo que sea ϕ, ésta es falsa o verdadera y nada más. No hay una tercera posibilidad. Nosotros asumimos este principio en los condicionales de los lenguajes de programación: expresiones como `if B then {C} else {D}` asumen que $B \vee \neg B$ es verdadera. He aquí la prueba del medio excluído:

1.		
2.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	*supuesto*
3.	ϕ	*supuesto*
4.	$\phi \vee \neg\phi$	$(\vee i)$ 3
5.	$\bot$	$(\neg e)$ 4, 2
6.	$\neg\phi$	$(\neg i)$ 3 − 5
7.	$\phi \vee \neg\phi$	$(\vee i_2)$ 6
8.	$\bot$	$(\neg e)$ 7, 2
9.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$(\neg e)$ 2 − 8
10.	$\phi \vee \neg\phi$	$(\neg\neg e)$ 9

Ejemplo 3.23. *Use (LEM) para probar que la inferencia $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$ es válida:*

1.	$p \rightarrow q$	*premisa*
2.	$\neg p \vee p$	*LEM*
3.	$\neg p$	*supuesto*
4.	$\neg p \vee q$	$(\vee i_1)$ 3
5.	p	*supuesto*
6.	q	$(\rightarrow e)$ 1, 5
7.	$\neg p \vee q$	$(\vee i_2)$ 6
8.	$\neg p \vee q$	$(\vee e)$ 2, 3 − 4, 5 − 7

Aunque útil, resulta difícil decidir que caso de (LEM) puede ayudarnos a avanzar en una prueba. Por ejemplo, pudimos haber elegido introducir $q \vee \neg q$ en la línea 2 de la demostración anterior ¿Cual hubiera sido entonces su posterior desarrollo?

3.2.8 Las reglas como procedimientos

La manera como hemos definido las reglas de prueba en esta sección se conoce como una definición **declarativa**: hemos presentado cada regla y la hemos justificado en términos de nuestra intuición sobre los conectores lógicos. Sin embargo una definición más **procedural**, que nos diga cómo se usa cada regla, es posible:

$(\wedge i)$ Para probar $\phi \wedge \psi$, primero probamos ϕ y luego ψ, por separado. Entonces usamos la regla $(\wedge i)$.

$(\wedge e_1)$ Para probar ϕ, comienza por probar $\phi \wedge \psi$ y luego usa la regla $(\wedge e_1)$. Aunque esto no es un buen consejo pues probar la conjunción puede ser más complicado que probar ϕ; lo que puede ser el caso es que $\phi \wedge \psi$ ya haya sido generada previamente y entonces la regla es realmente útil.

$(\vee i_1)$ Para probar $\phi \vee \psi$, intente probar ϕ.

$(\vee e)$ Si es el caso que $\phi \vee \psi$ y se quiere probar χ, entonces intenta probar χ a partir de ϕ y de ψ.

$(\rightarrow i)$ Si se quiere probar $\phi \rightarrow \psi$, pruebe ψ a partir de ϕ (y el resto de las premisas).

$(\neg i)$ Para probar $\neg\phi$, pruebe $\perp$ a partir de ϕ (y el resto de las premisas).

3.2.9 Equivalencia demostrable

Definición 3.4. *Sean ϕ y ψ dos fórmulas de la lógica proposicional. Decimos que ϕ y ψ forman una equivalencia demostrable, si y sólo si* (ssi) *$\phi \vdash \psi$ y $\psi \vdash \phi$ son inferencias válidas. Esto se denota como $\phi \dashv\vdash \psi$.*

Otra forma de expresar la equivalencia demostrable es con el teorema $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$. Ejemplos de equivalencias demostrables incluyen:

- $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \wedge q \rightarrow p \dashv\vdash r \vee \neg r$
- $\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg p \wedge \neg q$
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$
- $p \wedge q \rightarrow r \dashv\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

3.3 LECTURAS Y EJERCICIOS SUGERIDOS

La presentación de las pruebas de inferencia que se ha hecho en este capítulo está basada en el libro de Huth y Ryan [64]. Este material se puede complementar con la lectura de la sección 7.5.1 del libro de Russell y Norvig [107]. La deducción natural fue introducida por Gerhard Karl Erich Gentzen entre 1934-1935: Untersuchungen über das logisch Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* (39)2–3:176–210;405–431. Para más detalles, Pelletier [95] presenta una breve historia de la deducción natural. Dalen [34] en la sección 1.4, provee una aproximación más formal a la deducción natural.

Ejercicios

Ejercicio 3.1. *¿Es válida la argumentación de su tema de tesis? Intente una demostración.*

Ejercicio 3.2. *Busque un ejemplo de argumentación válida e inválida en el diario.*

Ejercicio 3.3. *La intepretación procedural de las reglas de prueba, introducida en la sección 3.2.8 sugiere que el proceso de prueba se puede automatizar. Abunde al respecto.*

Ejercicio 3.4. *Demuestre las equivalencias listadas en la sección 3.2.9.*