Examen de ingreso a la Maestría en Matemáticas-UV
Mayo de 2021

Sección: Análisis Matemático

1. Demostrar que la sucesión de números reales
$$x_n = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n \, dx$$
converge a 0.

2. Mostrar que la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

3. Dada la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + axy - 2y^2$, analizar el carácter del punto crítico $(0, 0)$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Sección: Álgebra Lineal

1. Sean $\{\nu_1, ..., \nu_n\}$ un conjunto linealmente independiente en V y $\omega \in V$. Pruebe que si $\{\nu_1 + \omega, \nu_2 + \omega, ..., \nu_n + \omega\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces $\omega \in < \nu_1, ..., \nu_n >$.

2. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ dos bases de un espacio vectorial V, y supongamos que $a_1 = 4b_1 - b_2, a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.
   - Encuentra la matriz de cambio de coordenadas de la base A a la base B.
   - Encuentra las coordenadas de x en la base B, donde $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

3. Hallar la forma de Jordan de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -a & 1+a \end{pmatrix}$$
según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Sección: Ecuaciones Diferenciales

1. Considerar la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{1}{x}, \\ x(0) &= a, \end{aligned}$$

   para una constante a positiva. Encontrar la solución en forma explícita, así como su dominio de definición.

2. Resolver la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = e^{-t}$.