Examen de Admisión a la Maestría en Matemáticas
Universidad Veracruzana
Primera Parte 10 de junio de 2019

Nombre del Alumno: ____

Instrucciones: De los problemas 1 a 3 resuelva solamente dos problemas. De los problemas 4 a 6 resuelva solamente dos problemas. No escriba la solución de dos o más problemas en una misma hoja.

1. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V tal que la forma canónica de Jordan es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (i) Encontrar el polinomio característico de T.

   (ii) ¿Para qué valores propios el *espacio propio* coincide con el *espacio propio generalizado*?

   (iii) Para cada valor propio λ_i, encontrar el entero positivo mínimo p_i para el cual, el espacio propio generalizado K_{λ_i} asociado a λ_i coincide con el núcleo de $(T-\lambda_i I)^{p_i}$, es decir, $K_{\lambda_i} = N((T-\lambda_i I)^{p_i})$.

   (iv) Sea U_i la restricción de $T - \lambda_i I$ a K_{λ_i} para cada i. Calcular, para cada i, la dimensión de los espacios $N(U_i)$, $N(U_i^2)$ y $N(U_i^3)$.

2. Sea P_2 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor que 3.

   a) Demuestra que $\{x^2, x^2+x, x+1\}$ es una base de dicho espacio vectorial.

   b) Calcular las coordenadas de $5x^2+3x+1$ respecto a la anterior.

   c) Encontrar una base del espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual a 3 que contenga la base dada.

   d) Calcular las coordenadas de $5x^2+3x+1$ respecto a la base encontrada en el apartado anterior.

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones discreto

$$\left.\begin{array}{l} x_1(k+1) = x_1(k) + \beta(x_2(k) - x_1(k)) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \alpha(x_1(k) - x_2(k)) \end{array}\right\} \tag{1}$$

   suponiendo que $\alpha+\beta \neq 0$. Se entenderá por solución dos sucesiones $\{x_1(n)\}$ y $\{x_2(n)\}$ que cumplan (1).

4. Cuál es el orden de un grupo G generado por dos elementos x, y que satisfacen solo las relaciones $x^3 = y^2 = (xy)^2 = e$, donde e es la identidad del grupo?

5. Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$xy'' + y' = x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -\frac{1}{2}$$

6. Si X denota el tiempo de digestión (medido en horas) de una comida. Entonces X es una variable aleatoria. Supóngase que su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 9xe^{-3x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determinar la función distribución acumulativa y usarla para determinar la probabilidad de que la comida sea completamente digerida cuando mucho en dos horas.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para digerir toda la comida tome más de tres horas?

   c) ¿Cuál es el tiempo promedio de digestión de una comida?