Facultad de Matemáticas
15 de Mayo de 2018
Examen de admisión a la Maestría en Matemáticas

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas.

1. Sea f una función real sobre $[a,b]$. Supongamos que f es diferenciable y f' es Riemann integrable. Demostrar que
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2$ donde $b_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Sea $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y sea M el hiperplano $M = \{x \in \mathbb{R} | ax = 1\}$. Estudiar los extremos de f en M.

3. Hallar los extremos relativos de la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)\ e^{\sin(t)} dt.$$

4. Dada una matriz cuadrada $n \times n$, A, demuestre que
$$|tr(A)| \leq n\rho(A).$$
Donde $\rho(A)$ es el máximo de los módulos de los valores propios de A.

5. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces, el núcleo de T $(KerT)$ y el rango de T $(rangT)$ son subespacios de R^n y $kerT + rangT = n$.

6. Sea
$$M = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & b+3 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$
con componentes reales. Determinar su forma canónica de Jordan según los valores del parámetro b.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa que se anula unicamente en cero. Sea $\delta(x,y) = f(x-y)$ ¿Cuándo δ es una métrica?

8. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasnformación lineal que no es isomorfismo. ¿Existe una transformación lineal $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f \circ g$ ó $g \circ f$ sea isomorfismo?

9. Determinar si $y_1 = x^{-1/2} \cos x$ y $y_2 = x^{-1/2} \sin x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$ en $0 < x < \infty$. En caso afirmativo determinar la solución general de

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = x^{3/2}$$

10. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que la ecuación $u_t = p(u)u_x$, con $t > 0$, tiene una solución de la forma $u = f(x + p(u)t)$, donde f es una función diferenciable.

11. Sea X una variable aleatoria discreta con

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

es decir $X \sim Bin(n, p)$. Calcula la varianza de X.

12. Si G es un grupo de orden par, demostrar que el número de sus elementos de orden 2 es impar.