

29 de Mayo de 2017

Nombre del Alumno: _____

Instrucciones generales: Resuelva dos problemas de cada uno de los bloques: Álgebra Lineal, Cálculo y Temas Selectos

Álgebra Lineal

- Sea E el espacio vectorial sobre \mathbb{R} constituido por los polinomios de grado menor o igual que 3. Sea la base de E dada por $\{1, t, t^2, t^3\}$ y sea $D : E \rightarrow E$, dada por $D(p) = p'$. Demuestre que d es una aplicación lineal y represente matricialmente dicha aplicación lineal.

- Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

encuentre el Rango, los valores propios y vectores propios de A . También calcule su forma canónica de Jordan.

- Encuentre la forma canónica de Jordan de la matriz real A que tiene polinomio característico $f(x) = a_{13}x^{13} + a_{12}x^{12} + a_{11}x^{11} + a_{10}x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ y polinomio mínimo $p(x) = (x - 5)^5(x + 8)^4(x - 13)$.

Cálculo

- Demuestre que la función $y = x^3 - 3x + c$ con c un número real y diferente de cero, no admite dos raíces reales en el intervalo $(0, 1)$.
- Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
 - Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
 - Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ converge o diverge.
- Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua tal que para todo $x \in [0, 1]$ se tiene que $f(f(x)) = x$. Encuentre todas las funciones que cumplan lo anterior.
- Sea $f : [-\sqrt{2}\pi, \sqrt{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Calcule

$$\int_{-\sqrt{2}\pi}^{\sqrt{2}\pi} \int_{-1}^1 f(y^2) e^{\frac{|x|-y}{2}} \sin(x) dy dx.$$

Temas Selectos

1. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d) . Demuestra que la sucesión $\{d(x_n, y)\}$ converge, donde $y \in X$ es fijo.
2. Demuestre que si K es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$ los conjuntos

$$x + K := \{x + k \mid k \in K\}$$

y

$$\lambda K := \{\lambda k \mid k \in K\}$$

son compactos.

3. Una función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es armónica si satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Sean u y v funciones de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} que son armónicas, se dice que u y v son armónicas conjugadas si la función de variable compleja $f = u + iv$ es analítica. Demuestra que si u y v son armónicas conjugadas entonces para cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ las curvas $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ son ortogonales.

4. Sea G un grupo de orden impar. Demostrar que para cada $x \in G$ existe $y \in G$ tal que $y^2 = x$.
5. Sean G un grupo y $H, K < G$ tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demostrar que $H \cap K = \{1\}$.
6. Si la variable aleatoria X es gobernada por una ley de distribución Poisson con parámetro λ , calcule la esperanza matemática de $(X + 1)^{-1}$.
7. Si X es una variable aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, hallar $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.

Examen de Admisión de la Maestría en Matemáticas

29 de Mayo de 2017

Nombre del Alumno: _____

Examen de Inglés

Lea con detenimiento el texto siguiente y realice una sinopsis del mismo en Español.

Socratism, Platonism are wrong:

Einstein famously declared that: “How can it be that mathematics, being after all a product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality?”

Well, either it is an unfathomable miracle, or something in the premises has to give. Einstein was not at all original here, he was behaving rather like a very old parrot.

That the brain is independent of experience is a very old idea. It is Socrates’ style “knowledge”, a “knowledg” given a priori. From there, naturally enough aroses what one should call the “Platonist Delusion”, the belief that mathematics can only be independent of experience.

The physicist Lee Smolin has ideas about the nature of mathematics:

Smolin:

“the main effectiveness of mathematics in physics consists of these kinds of correspondences between records of past observations or, more precisely, patterns inherent in such records, and properties of mathematical objects that are constructed as representations of models of the evolution of such systems... Both the records and the mathematical objects are human constructions which are brought into existence by exercises of human will; neither has any transcendental existence. Both are static, not in the sense of existing outside of time, but in the weak sense that, once they come to exist, they don’t change”