Maestría en Matemáticas

Facultad de Matemáticas
Examen de Admisión
Ingreso en Agosto de 2012

Universidad Veracruzana

Fecha: 08 de Junio de 2012
Nombre:

Parte A

Instrucción.- En la presente evaluación, V y W representan espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{C}$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. JUSTIFIQUE SU RESPUESTA.

1. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces transforma subconjuntos linealmente independientes de V en conjuntos linealmente independientes de W.
2. Dados $x_1, x_2 \in V$ y $y_1, y_2 \in W$, existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(x_1) = y_1$ y $T(x_2) = y_2$.
3. El espacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea es el núcleo de un operador lineal.
4. Existe una matriz cuadrada sin vectores propios.
5. Matrices similares siempre tienen los mismos valores propios.
6. Cualquier operador lineal sobre un espacio vectorial n-dimensional que tiene menos de n vectores propios linealmente independientes no es diagonalizable.
7. Vectores propios correspondientes al mismo valor propio son siempre linealmente dependientes.
8. Un operador lineal $T : V \to V$ es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad de cada valor propio λ es igual a la dimensión de $E_\lambda = \ker(T - \lambda I)$.
9. Si T es un operador lineal sobre V, y W es un subespacio $T-$invariante de V, entonces el polinomio característico de $T|_W$ divide al polinomio característico de T.
10. Sea T es un operador lineal sobre V. Si V es suma directa de subespacios $T-$invariantes, entonces existe una base $\mathcal{B}$ para V tal que $[T]_\mathcal{B}$ es una suma directa de matrices (matriz diagonal por bloques).

Parte B

Instrucción.- Resuelva los siguientes problemas planteados.

1. Considérese la función $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2) + \alpha x^2$, donde α es un parámetro. Encuentre algunos puntos críticos y establezca la naturaleza de ellos (máximos o mínimos).

2. Calcular el valor mínimo de la función $f(x, y, z) = x + z$ sujeta a la restricción $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

3. Mediante un criterio de convergencia, determine los valores de λ para los cuales la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}.$$

4. Un espacio métrico se llama Hausdorff si dados cualesquiera dos puntos distintos entre sí, existen conjuntos abiertos ajenos los cuales son vecindades de los puntos dados. Pruebe que todo espacio métrico es Hausdorff.

5. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(1)$. Probar que existe un punto c en $[0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. Sugerencia: Construya una función como diferencia de dos.

Parte C

Instrucción.- Traduzca el siguiente párrafo o bien explique brevemente lo que usted comprenda del mismo:

> An indispensable partner to proof is mathematical intuition. This tells us what to try to prove. We relied heavily on intuition in our exercises. It often gives true theorems, even with gappy proofs. So far I've described mathematics by its methods. What about its content? The dictionary says math is the science of number and figure ("figure"meaning the shapes or figures of geometry.) This definition might have been O.K. 200 years ago. Today, however, math includes the groups, rings, and fields of abstract algebra, the convergence structures of point-set topology, the random variables and martingales of probability and mathematical statistics, and much, much more.