

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
EXAMEN DE ADMISIÓN  
INGRESO EN AGOSTO DE 2013



Universidad Veracruzana

Fecha: 31 de Mayo de 2013

Nombre:

Parte A

**Instrucción.-** Los problemas del 1 al 6 son obligatorios y representan el 90 % de la evaluación, seleccione exclusivamente un problema del 7 al 10 para completar el 100 %.

1. Calcular  $f'(x)$ , donde  $f(x) = \int_{x^2}^1 e^{\sin^2 t} dt$ .
2. Evaluar la integral de línea  $\int_{\gamma} xdx + ydy$ , donde  $\gamma$  es la curva parametrizada por  $\gamma(t) = (\cos t, 2e^t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .
3. Sean  $\alpha, a$  y  $b$  números reales con  $\alpha \in (0, 1)$ . Encuentre el máximo de la siguiente función sujeta a la condición  $\alpha x^2 + (1 - \alpha)y^2 = 1$ :

$$f(x, y) = ax + by.$$

4. Sea  $M_2(\mathbb{R})$  el espacio de matrices  $2 \times 2$  con entradas reales, y  $P_2[x]$  el espacio de polinomios reales de grado a lo más 2. Considere la transformación lineal  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2[x]$  definida mediante

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b) + (2d)x + bx^2.$$

Calcular la representación matricial de  $T$  respecto a las siguientes bases canónicas de  $M_2(\mathbb{R})$  y  $P_2[x]$ , respectivamente:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}.$$

5. Suponer que  $A$  es una matriz simétrica  $2 \times 2$  con valores propios  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 9$ , y que  $v_1 = (1, 3)^T$  es un vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda_1$ .
  - a) Hallar un vector propio  $v_2$  correspondiente al valor propio  $\lambda_2$ .
  - b) Hallar la matriz  $A$ .

6. Sean  $V$  el espacio de matrices  $2 \times 2$  sobre el campo de los reales y  $W$  el subconjunto de las matrices  $A = (a_{ij})$  tales que  $a_{12} + a_{21} = 0$ . Determine si  $W$  es un subespacio de  $V$ ; en caso afirmativo, encuentre una base de  $W$ .

7. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función, y  $U_\alpha \subset Y$  para cada  $\alpha \in \Lambda$ , donde  $\Lambda$  es un conjunto de índices. Demuestre que

$$f^{-1} \left( \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(U_\alpha).$$

8. Utilice algún criterio de convergencia para ver cuáles de las siguientes series convergen:

a)  $\sum \frac{1}{n^2}$ ,

b)  $\sum \binom{n}{n+1}^{n(n+1)}$ .

9. Dar un ejemplo de dos funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f$  y  $g$  sean discontinuas en todos los puntos de  $\mathbb{R}$ , pero la suma  $f + g$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

10. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el campo  $\mathbb{F}$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $V$  tal que la imagen y el espacio nulo de  $T$  sean idénticos. Demostrar que  $n$  es par.

## Parte B

**Instrucción.-** Traduzca el siguiente párrafo o bien escriba lo que comprenda del mismo.

What is mathematics? Many people think of mathematics (incorrectly) as addition, subtraction, multiplication, and division of numbers. Those with more mathematical training may think of it as dealing with algorithms. But most professional mathematicians think of it as much more than that. While we certainly hope that our students will perform algorithms correctly, what we really want is for them to understand three things: how you do something, why it works, and when it works.

What Is Scientific Writing? The key characteristic of scientific writing is clarity. Successful scientific experimentation is the result of a clear mind attacking a clearly stated problem and producing clearly stated conclusions. Ideally, clarity should be a characteristic of any type of communication; however, when something is being said for the first time, clarity is essential. Most scientific papers, those published in our primary research journals, are accepted for publication precisely because they do contribute new knowledge. Hence, we should demand absolute clarity in scientific writing.