Maestría en Matemáticas

Facultad de Matemáticas
Examen de Admisión
Ingreso en Agosto de 2011

Universidad Veracruzana

Fecha: 08 de Junio de 2011
Nombre:

1. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son subespacios de V?

   a) todas las f tales que $f(x^3) = f(x)^3$,

   b) todas las f tales que $f(-1) = f(1)$,

   c) todas las f que son continuas.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V.

   a) Se sabe que existe un operador lineal único T tal que $Tv_k = v_{k+1}$ para $k = 1, ..., n-1$ y $Tv_n = 0$. ¿Cuál es la matriz de representación de T en la base $\mathcal{B}$?

   b) Justificar que $T^n = 0$, pero $T^{n-1} \neq 0$.

3. Sea V el espacio de polinomios de grado 7 en la variable x con coeficientes reales. Encontrar la forma canónica de Jordan de la transformación lineal $\frac{d^2}{dx^2}$. ¿Es esta transformación invertible?

4. El polinomio característico de una matriz A es $p(x) = (x-2)^2(x-3)^3$. ¿Cuál podría ser el polinomio minimal y por qué?

5. Calcular la matriz escalonada reducida por filas R de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

   así mismo calcular la matriz P tal que $R = PA$. Indique bajo qué condiciones el problema $AX = Y$ es consistente, donde $Y = (a, b, c)^T$. También resuelva el problema homogéneo $AX = 0$, y expresse la solución general como una combinación lineal de vectores solución linealmente independientes.

6. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es monótona y sobreyectiva, probar que f es continua.

7. Hallar el valor máximo y mínimo de $f(x, y) = xy - y + x - 1$ en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 2$.

8. Sea $F(x, y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$.

a) Demostrar que F es un campo vectorial conservativo.

b) Encuentre f tal que $F = \nabla f$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos los reales x, y. Demostrar que si f es continua en cero, entonces es continua en todos los reales.

10. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(0) = f(1)$, probar que existe un punto c en $[0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

11. Indique y justifique si cada una de las siguientes series es convergente o divergente.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n.$$