Maestría en Matemáticas

Facultad de Matemáticas
Examen de Admisión
Ingreso en Agosto de 2010

Universidad Veracruzana

Fecha: 12 de Julio de 2010
Nombre:

1. Hallar una base para el espacio nulo de la siguiente matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Encontrar todos los valores propios y una base de cada espacio de vectores propios del operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$. ¿Es T diagonalizable? Si lo es, hallar una matriz diagonal que lo representa.

3. Sea V el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales, el espacio se considera en el campo de los números reales. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de V son subespacios vectoriales?

   a) El conjunto de polinomios con coeficientes enteros.
   b) El conjunto de polinomios con coeficientes racionales.
   c) El conjunto de polinomios cuyos términos son únicamente potencias pares.
   d) El conjunto de polinomios cuyos términos son únicamente potencias impares.

4. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^∞ tales que $f(0, 0, 0) = g(0, 0) = h(0)$, $Df(0, 0, 0) = (1, 2, 3)$, $Dg(0, 0) = (4, 5)$ y $h'(0) = 6$. Si

$$F(x, y, z) = f(g(x, y), h(z), f(x, h(x), g(x, x))),$$

   calcular $DF(0, 0, 0)$.

5. Calcula el valor mínimo de la función $f(x, y, z) = x + z$, sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, con a constante real.
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n}$ para $0 < b < 1$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

7. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es monótona y sobreyectiva, probar que f es continua.

8. Suponga que $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X, y que alguna subsucesión $\{p_{n_i}\}$ converge al punto $p \in X$. Demuestre que la sucesión $\{p_n\}$ converge a p.