



UNIVERSIDAD VERACRUZANA

TESIS DE MAESTRÍA

**Invariantes afines en tercera dimensión para
reconocimiento del alfabeto estático de la Lengua de
Señas Mexicana**

Autor:

Guadalupe Carmona Arroyo

Directores:

Dr. Homero V. Rios Figueroa
Dra. M. Lorena Avendaño Garrido

Que para obtener el grado de

Maestro en Inteligencia Artificial

Centro de Investigación en Inteligencia Artificial

Xalapa-Enriquez, Ver., Agosto 2019

«Our greatest weakness lies in giving up. The most certain way to succeed is always to try just one more time.»

Thomas A. Edison

Resumen

El lenguaje y la comunicación son elementos importantes en la convivencia humana, por lo mismo las personas con deficiencias de habla presentan problemas de interacción social. Este trabajo pretende contribuir en la mejora de la comunicación de dichas personas, mediante el reconocimiento del alfabeto de la Lengua de Señas Mexicana (LSM). Para esto se recurre al proceso de reconocimiento de patrones también conocido como aprendizaje de máquinas el cual consta en general, de tres etapas. En la primera etapa se recurre a un sensor del cual se obtienen los datos, en este caso las manos de las personas realizando la seña (letra del alfabeto), las cuales son detectadas por un sensor Leap Motion que obtiene información geométrica de los huesos de la mano. Después se extraen las características que son los invariantes afines en tercera dimensión, los cuales son números reales que resultan ser similares o muy cercanos cuando los objetos también lo son. Por lo tanto, las mismas letras para diferentes personas tienen valores similares de invariantes afines, estos números son las características que forman el conjunto de datos de prueba. Finalmente, la tercera etapa es la clasificación, donde el conjunto de datos es particionado en subconjuntos de entrenamiento y prueba. Se mide el promedio de clasificación, es decir el porcentaje de reconocimiento de las letras. El resultado de esta propuesta es un alto porcentaje de clasificación y es comparado contra trabajos similares encontrados en la literatura, de donde se puede observar que los resultados obtenidos brindan una media más alta de reconocimiento. La aportación innovadora en este trabajo es el uso de los invariantes en tercera dimensión como variables en el proceso de clasificación, en algunos trabajos se han utilizado los invariantes en dos dimensiones para este proceso, sin embargo, no ha sido desarrollada su aplicación en 3D con fines de reconocimiento

IV

de LSM por lo que se presenta una excelente área de oportunidad y este trabajo proporciona una mejora en las herramientas necesarias para mejorar la comunicación dentro de la sociedad.

Agradecimientos

Quiero dedicar este trabajo a mis padres Lucía y Felix que con su amor, sus palabras y su sabiduría me han dado las fuerzas necesarias para seguir en el camino, no hay palabras para describir el agradecimiento y el amor que siento por ustedes. De la misma manera agradezco a mis hermanos Vero y Felix que han estado siempre y me brindan la motivación para ser una mejor persona, gracias por su comprensión y apoyo.

A mi director el Dr. Homero Vladimir Ríos Figueroa que me brindó las herramientas necesarias para la elaboración de esta tesis, así como por su paciencia, comprensión y consejos que han sido de gran ayuda en mi formación.

A la Dra. M. Lorena Avendaño Garrido quien ha sido una gran maestra y amiga, por su tiempo y dedicación a este trabajo.

A mis sinodales y revisores por el tiempo que han dedicado a la lectura y revisión de este trabajo.

A todos los académicos del CIIA, que me han impulsado a seguir y sus conocimientos han sido los cimientos de mi formación académica y de este trabajo de tesis.

A mis compañeros de maestría por su amistad, apoyo académico y palabras de aliento en los momentos más difíciles del proceso, además de las risas y momentos compartidos.

VI

A mis amigos, que siempre confían en mi, los llevo en mi corazón.

A la Dra. Candy Abdulia Sosa Jiménez por la base de datos que me ha sido de gran ayuda en este trabajo.

Y por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por el apoyo económico brindado para el desarrollo de este trabajo.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
1. Introducción	1
1.1. Contenidos	3
1.2. Antecedentes	3
1.3. Planteamiento del problema	4
1.4. Hipótesis	6
1.5. Objetivos	6
1.5.1. Objetivo general	6
1.5.2. Objetivos específicos	6
1.6. Justificación	7
2. Marco Teórico	9
2.1. Reconocimiento de patrones	9
2.2. Transformaciones geométricas	11
2.2.1. Transformaciones en 2D	11
2.2.2. Transformaciones en 3D	13
2.3. Invariantes	15
2.4. Momentos invariantes en 2D	16
2.4.1. Momentos	16
2.4.2. Momentos geométricos	17
Momentos invariantes a traslación	19
Momentos invariantes a escala	21
Momentos invariantes a rotación	21

Momentos invariantes afines	22
2.5. Momentos invariantes en 3D	23
2.5.1. Momentos geométricos	24
Momentos invariantes a traslación	24
Momentos invariantes a escala	25
Momentos invariantes afines	25
2.6. Clasificación	26
2.6.1. Análisis discriminante lineal	27
2.6.2. Máquinas de soporte vectorial	29
2.6.3. Ingenuo Bayesiano	29
2.6.4. Validación	30
3. Experimentación y resultados	33
3.1. Arquitectura propuesta	33
3.1.1. Obtención de datos	34
3.1.2. Extracción de características	39
3.1.3. Clasificación	43
3.2. Experimento 1	43
3.3. Experimento 2	49
3.4. Experimento 3	55
4. Discusión y conclusiones	63
4.1. Discusión	63
4.2. Conclusiones y trabajo futuro	68
A. Apéndice A	71
Bibliografía	81

Índice de figuras

1.1. Porcentaje de personas con discapacidades en la República Mexicana	1
1.2. Porcentaje de las diferentes discapacidades en la población República Mexicana	2
1.3. Alfabeto de la Lengua de Señas Mexicana	6
2.1. Esquema del proceso de reconocimiento de patrones	10
2.2. Transformaciones a traslación, rotación y escala aplicadas a una imagen	12
2.3. Transformaciones afines aplicadas a una imagen	13
2.4. Transformaciones en 3D	14
2.5. Momentos invariantes para área y centroide	19
2.6. Datos sintéticos originales	27
2.7. Datos sintéticos separados por clasificación	27
2.8. Representación de validación cruzada con $k=4$	31
3.1. Arquitectura propuesta	33
3.2. Marco de referencia de Leap Motion	34
3.3. Puntos de la mano detectados por el controlador Leap Motion	35
3.4. Visualizador de Leap Motion	36
3.5. Gráfica de mano real tomada con Leap Motion	38
3.6. Ángulo entre dos vectores	40
3.7. Ángulo entre dos huesos de la mano	41
3.8. Valores de las cinco métricas para las letras con LDA del experimento 1	45
3.9. Media de las cinco métricas con LDA del experimento 1	45

3.10. Valores de las cinco métricas para las letras con SVM del experimento 1	47
3.11. Media de las cinco métricas con SVM del experimento 1	47
3.12. Valores de las cinco métricas para las letras con NB del experimento 1	49
3.13. Media de las cinco métricas con NB del experimento 1	49
3.14. Valores de las cinco métricas para las letras con LDA del experimento 2	51
3.15. Media de las cinco métricas con LDA del experimento 2	51
3.16. Valores de las cinco métricas para las letras con SVM del experimento 2	53
3.17. Media de las cinco métricas con SVM del experimento 2	53
3.18. Valores de las cinco métricas para las letras con NB del experimento 2	55
3.19. Media de las cinco métricas con NB del experimento 2	55
3.20. Valores de las cinco métricas para las letras con LDA del experimento 3	57
3.21. Media de las cinco métricas con LDA del experimento 3	57
3.22. Valores de las cinco métricas para las letras con SVM del experimento 3	59
3.23. Media de las cinco métricas con SVM del experimento 3	59
3.24. Valores de las cinco métricas para las letras con NB del experimento 3	61
3.25. Media de las cinco métricas con NB del experimento 3	61

Índice de tablas

1.1. Trabajos relacionados con reconocimiento de LSM	5
2.1. Coordenadas de las transformaciones de un cubo unitario	15
3.1. Estructura osea de los puntos detectados por Leap Motion	35
3.2. Datos de las personas que prestaron sus manos	37
3.3. Características de las transformaciones geométricas aplicadas a las manos	38
3.4. Data set con los invariantes afines de la letra A	39
3.5. Data set con los ángulos de la letra a	42
3.6. Métricas de validación experimento 1 con LDA	44
3.7. Métricas de validación experimento 1 con SVM	46
3.8. Métricas de validación experimento 1 con NB	48
3.9. Métricas de validación experimento 2 con LDA	50
3.10. Métricas de validación experimento 2 con SVM	52
3.11. Métricas de validación experimento 2 con NB	54
3.12. Métricas de validación experimento 3 con LDA	56
3.13. Métricas de validación experimento 3 con SVM	58
3.14. Métricas de validación experimento 3 con NB	60
4.1. Resultados resumidos de los experimentos	64
4.2. Prueba de normalidad para ANOVA	65
4.3. Resultados de la prueba Post-hoc para los tres experimentos con LDA	66
4.4. Resultados de la prueba Post-hoc para los tres experimentos con SVM	66

4.5. Resultados de la prueba Post-hoc para los tres experimentos con NB	67
4.6. Comparación de trabajos relacionados con reconocimiento de LSM	68
A.1. Matriz de confusión experimento 1 con LDA	71
A.2. Matriz de confusión experimento 1 con SVM	72
A.3. Matriz de confusión experimento 1 con NB	73
A.4. Matriz de confusión experimento 2 con LDA	74
A.5. Matriz de confusión experimento 2 con SVM	75
A.6. Matriz de confusión experimento 2 con NB	76
A.7. Matriz de confusión experimento 3 con LDA	77
A.8. Matriz de confusión experimento 3 con SVM	78
A.9. Matriz de confusión experimento 3 con NB	79

Capítulo 1

Introducción

Según el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), en el último Censo de Población y Vivienda realizado en 2010 de los 112 millones de habitantes en la República Mexicana, un aproximado de 4.5 millones cuentan con alguna discapacidad o limitación de sus actividades. Dentro de las personas que presentan limitación, 498 640 personas tienen una limitación auditiva y 401 534 presentan una discapacidad del habla o tienen dificultades de comunicación. Las figuras 1.1 1.2 muestran los datos en gráficas representativas de esta información.

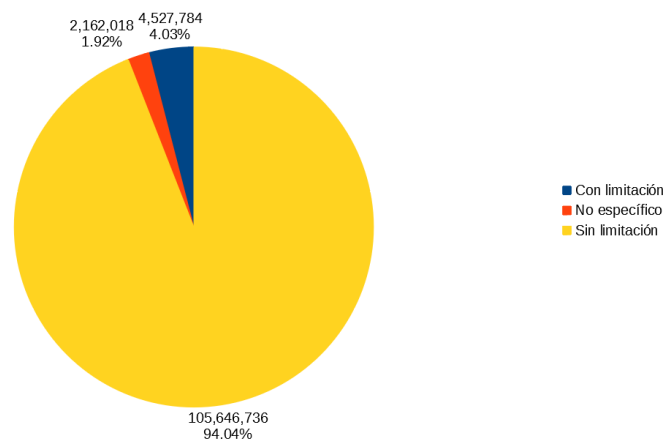


FIGURA 1.1: Porcentaje de personas con discapacidades en la República Mexicana

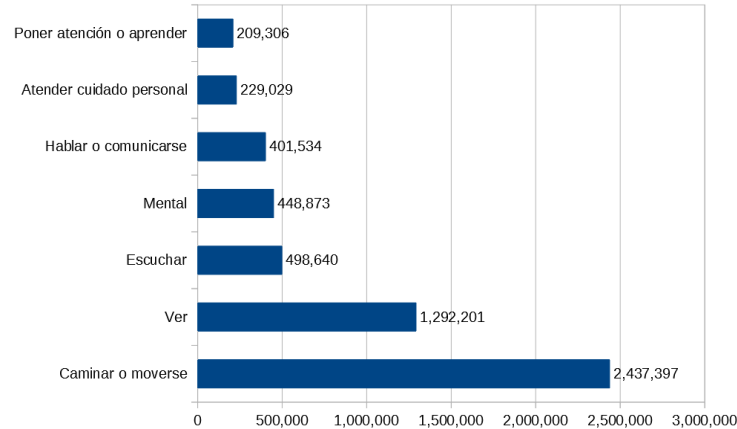


FIGURA 1.2: Porcentaje de las diferentes discapacidades en la población República Mexicana

INEGI. Censos y Conteos de Población y Vivienda

Como se puede ver en las gráficas anteriores, un considerable número de personas presenta deficiencias de habla y/o auditivas, lo que trae como consecuencia problemas de comunicación al incorporarse a la sociedad. Además, en general la población mexicana no conoce la LSM, lo que recae en un problema de interacción social. Por lo tanto, crear el traductor bidireccional es el proyecto motivante de este trabajo, en el cual la aportación principal se dará en el reconocimiento de las letras estáticas del alfabeto de la LSM en tercera dimensión. Se desarrolla la parte de la traducción de la LSM al español, centrándose en las letras estáticas del alfabeto de dicha lengua que son 21.

Para lograr el reconocimiento, se propone un proceso de reconocimiento de patrones en tres partes, en primer lugar, consta de la obtención de los datos los cuales son las coordenadas de los puntos en 3D de las manos, en segundo lugar la extracción de características de cada mano donde se extraen los invariantes afines y finalmente el método de clasificación, en el que cada seña es asignada a una clase o letra detectada. El aporte principal de este trabajo es la extracción de los invariantes afines que son valores que resultan muy similares entre objetos que también lo son, estos invariantes forman el conjunto de los

datos que se utilizan para la clasificación. Esto tiene como resultado una medida de precisión de reconocimiento suficientemente alta en el reconocimiento de las letras del alfabeto estático de la Lengua de Señas Mexicana.

1.1. Contenidos

Este trabajo consta de cuatro capítulos, el primero se compone de la introducción y la metodología de investigación utilizada en este proceso, además de los antecedentes.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico investigado necesario para el desarrollo de la parte experimental, donde se explica el proceso de reconocimiento de patrones y como se aplica en este problema.

Más adelante en el capítulo 3 se tiene toda la experimentación, su planteamiento, justificación y la arquitectura de trabajo que se propone, también se calculan las métricas para la evaluación del desempeño de los clasificadores en cada experimento.

El capítulo 4 se compone de la discusión y conclusiones según el estudio de los experimentos y finalmente en el Apéndice A se tienen las matrices de confusión para cada experimento.

1.2. Antecedentes

En la literatura existen algunos trabajos relacionados con el reconocimiento de lengua de señas, los cuales en su mayoría constan de un proceso de reconocimiento de patrones, sin embargo este proceso tiene diferentes etapas que es en donde se diferencian los trabajos encontrados.

Según el libro de Duda et al. [8] titulado *Pattern Classification* el objetivo general del reconocimiento de patrones es determinar la clase o el grupo al que pertenece un elemento. Esto lleva un proceso en tres fases que consta de un pre-procesamiento de los datos, de extracción de características de los elementos y finalmente la clasificación de acuerdo con las características particulares

de los objetos. Centrándonos en el tema de esta investigación existen diversos trabajos relacionados al reconocimiento de lengua de señas que llevan este proceso, pero existen cambios en las tres fases mencionadas, principalmente en la obtención de los datos, es decir, el sensor con que se obtienen y en los métodos de extracción de características. Cabe mencionar que los trabajos revisados constan tanto como de lengua de señas mexicana como de otros países y lenguas.

Se tienen artículos como *Reconocimiento de imágenes del lenguaje de señas mexicano* [26] donde el sistema contiene dos módulos principales: aprendizaje y reconocimiento. Este último es aplicado constantemente a imágenes que se obtienen del dispositivo Kinect; cada una se compara con los patrones almacenados en la base de conocimientos del sistema. El módulo de aprendizaje entra en funcionamiento cuando se detecta un nuevo patrón, es decir, cuando la similitud entre la imagen obtenida y el patrón es menor al 90 por ciento. El libro *Mexican International Conference on Artificial Intelligence* [19] en el apartado con título *Control of a service robot using the mexican sign language* consta de teoría de segmentación de imágenes, extracción de bordes y comparación con las letras originales trabajando solamente con letras estáticas del alfabeto.

En la tabla 1.1 se enlistan trabajos relacionados con alguno de los enfoques mencionados anteriormente para reconocimiento de lengua de señas de distintos países. Además, se mencionan las características particulares del trabajo, tales como los datos que se toman de entrada, la dimensión y el clasificador empleado. Y puede notarse que los invariantes afines en tercera dimensión no han sido tomados en cuenta para este tipo de aplicaciones.

1.3. Planteamiento del problema

De acuerdo con la Ley general para la inclusión de personas con discapacidad, en su capítulo III, artículo 14: la Lengua de Señas Mexicana es oficialmente reconocida como una lengua nacional y es parte de la herencia lingüística de la nación mexicana.

Trabajo	Lengua	Tipo de lenguaje	Dimensión	Datos de entrada	Clasificador
[21]	Americano	2576 videos	3D	RGB-AVI	No evaluado
[17]	Americano	Alfabeto estático y dos frases	2D	Imagen a escala de grises	Coefficiente de correlación cruzada
[4]	Americano	Alfabeto estático	3D	Leap Motion	Random regression forest
[30]	Americano	Alfabeto estático	2D	Kinect- bordes	Naive Bayes y K-NN
[7]	Americano	Alfabeto estático	3D	Kinect RGB-D/color	Random forest
[27]	Americano	3 letras y un número	2D	Imagen a escala de grises	Wavelet NN
[18]	Alemán	25 signos	3D	Kinect RGB-D	Redes de Markov
[34]	Alemán	10 frases	3D	Kinect RGB-D video	HMM-FNN
[2]	Francés	Alfabeto estático	3D	Kinect RGB-D	Random Forest
[14]	Mexicano	20 palabras	3D	Kinect RGB-D/ Esqueleto	Data Time Warping
[24]	Mexicano	25 palabras y 23 letras	3D	Leap Motion	No evaluado
[32]	Mexicano	Alfabeto estático	2D	Imagen a escala de grises	Redes Neuronales
[31]	Mexicano	Alfabeto estático	2D	Imagen a escala RGB-color	Redes neuronales
[16]	Mexicano	Alfa-numérico	3D	Kinect RGB-D	AdaBoost
[13]	Mexicano	7 letras	3D	Kinect RGB-D	Redes neuronales

TABLA 1.1: Trabajos relacionados con reconocimiento de LSM

Debido a esto, la LSM debe ser incluida como lengua de uso común, sin embargo, la población en general la desconoce, por lo que la comunicación con personas que presentan discapacidad del habla es limitada. Esto se transforma en un problema que puede ser atacado desde la perspectiva de la Inteligencia Artificial, creando un traductor que mejore la interacción y comunicación entre la población.

La solución al problema de reconocimiento de lengua de señas que se aporta en este trabajo, consta de, en primer lugar obtener una base de datos de 8 personas. De cada persona se obtienen coordenadas en tercera dimensión de los puntos de su mano, esto para 21 letras del alfabeto y sus variaciones (transformaciones geométricas de traslación, rotación y escala), después se extraen los momentos invariantes afines mediante su implementación en Python para obtener los vectores de características, éstos forman el data set para la clasificación. Y finalmente se aplican métodos de clasificación para asignar grupos de letras similares (clases) de donde se puede medir el porcentaje de reconocimiento de acuerdo con las señas detectadas correctamente.



FIGURA 1.3: Alfabeto de la Lengua de Señas Mexicana

1.4. Hipótesis

Los invariantes afines en tercera dimensión proporcionan un alto porcentaje de reconocimiento del alfabeto estático de la Lengua de Señas Mexicana respecto a los invariantes a traslación, rotación y escala.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Extraer los invariantes afines en 3D del alfabeto estático de la LSM para su clasificación y así obtener un mayor porcentaje de precisión en el reconocimiento, en comparación con los trabajos relacionados a éste.

1.5.2. Objetivos específicos

- Mejorar la obtención de datos (alfabeto) desarrollando un proceso de segmentación automática de las manos en una nube puntos en tercera dimensión.
- Desarrollar la teoría de invariantes afines para el reconocimiento de imágenes en tercera dimensión de la LSM.

- Implementar los invariantes afines en tercera dimensión en lenguaje de programación Python los cuales forman el conjunto de datos para clasificación.
- Aplicar métodos de clasificación al conjunto de datos de los invariantes, para el reconocimiento de las letras.
- Analizar los resultados de reconocimiento bajo invariantes afines.
- Comparar los resultados con los obtenidos a través de momentos invariantes a traslación, rotación y escala y demás trabajos relacionados de la literatura.

1.6. Justificación

Tomando en cuenta la importancia del problema y mediante la revisión de la literatura, se observa que el reconocimiento de lengua de señas ha sido atacado desde distintas perspectivas, como procesamiento de imágenes en dos dimensiones en su mayoría. Además, el proceso de obtención de datos en muchos trabajos es controlada por diversos factores, tales como iluminación, distancia del sensor controlada, etc. En este trabajo se propone una nueva alternativa, reconocimiento en tres dimensiones, tomando en cuenta una mejor estrategia para obtener de los datos así como aprovechar las propiedades de los invariantes afines los cuales, por su construcción, toman en cuenta información geométrica importante que no ha sido empleada en este tipo de aplicaciones.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Reconocimiento de patrones

De acuerdo con [8] el reconocimiento de patrones es el área que tiene como meta clasificar un grupo de patrones conocido como conjunto de pruebas, en clases de categorías o grupos similares. El sistema de reconocimiento debe asignar a cada objeto su categoría o clase (conjunto de entidades con características compartidas que las diferencía del resto).

En resumen, como se puede ver en la figura 2.1 un sistema de reconocimiento de patrones completo consiste en:

- Un sensor el cual obtiene las observaciones a clasificar.
- Un sistema de extracción de características que transforma la información del paso anterior en valores numéricos o simbólicos.
- Un sistema de clasificación basado en las características extraídas anteriormente para clasificar los elementos otorgando la clase.

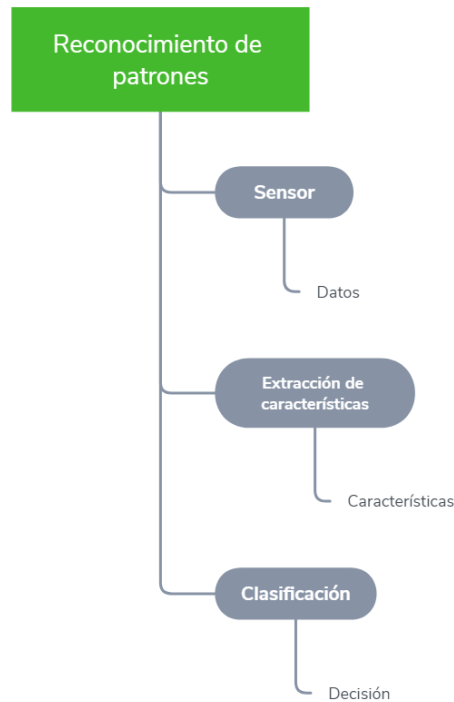


FIGURA 2.1: Esquema del proceso de reconocimiento de patrones

La primera fase consta de un dispositivo como herramienta de obtención de los datos, considerando el problema además del pre procesamiento necesario para que los datos sean los adecuados.

En segundo lugar, la extracción de características toma en cuenta lo que se quiere clasificar, es decir, se busca el conocimiento necesario de las características particulares de los objetos que brinden la mejor separación entre clases, es decir, las características compartidas por los grupos para permitir una óptima diferenciación entre los grupos de objetos.

Por último, en la fase de clasificación se toma la decisión de separabilidad de las clases, también se conoce este proceso como aprendizaje, en el sentido más amplio, cualquier método que incorpore información de muestras de capacitación en el diseño de un clasificador emplea el aprendizaje. Se tienen dos enfoques principales: aprendizaje supervisado y aprendizaje no supervisado.

El primero consta de conocimiento a priori sobre las clases de los elementos del conjunto y se tiene una fase de entrenamiento que brinda este conocimiento a priori para que en la segunda parte, llamada de prueba, los datos sean

asignados a su clase más cercana posible. A diferencia del aprendizaje no supervisado donde no se tiene una categoría a priori y el agrupamiento se crea de acuerdo a la semejanzas de las variables.

2.2. Transformaciones geométricas

2.2.1. Transformaciones en 2D

Antes de entrar en detalle sobre las características a extraer en este trabajo, nos adentramos en las transformaciones geométricas de objetos en segunda y tercera dimensión. Para interés de este trabajo se presentan las transformaciones a traslación, rotación y escala (TRS) por sus siglas en inglés, así como las transformaciones afines.

Dichas transformaciones son aplicaciones de funciones matemáticas tal que a cada punto de un espacio le hace corresponder otro punto del mismo espacio.

Para el caso de procesamiento de imágenes, las primeras (TRS) constan de trasladar la imagen en el plano, rotarla un valor de ángulo dado y hacerla más grande o más chica (escala uniforme), a cada punto $\mathbf{x} = (x, y)$ en el plano se le asigna un $\mathbf{x}' = (x', y')$. En la figura 2.2 podemos ver como se aplican las transformaciones a TRS. Estas transformaciones se pueden combinar y describir como

$$\mathbf{x}' = s\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{t} es un vector de traslación, s es un factor de escala positiva (nótese que s es un factor de escala uniforme, es decir, es el mismo en la dirección vertical y en la dirección horizontal) y \mathbf{R} es la matriz de rotación 2.2.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde α es el ángulo de rotación.

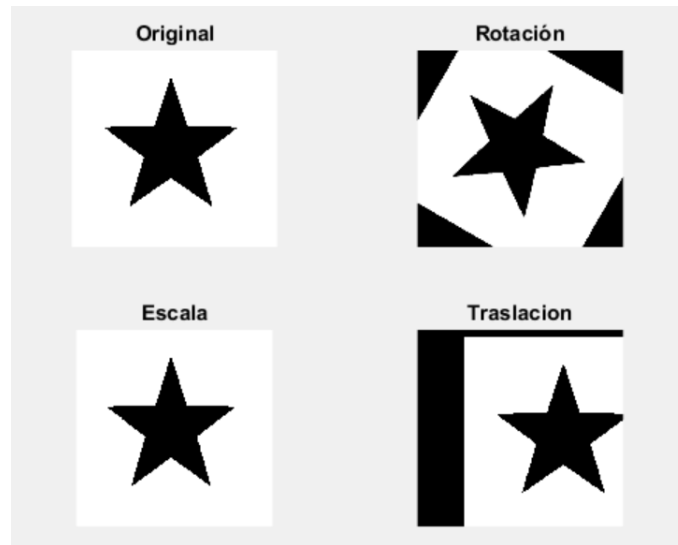


FIGURA 2.2: Transformaciones a traslación, rotación y escala aplicadas a una imagen

Por otro lado las transformaciones afines son transformaciones lineales generales de las coordenadas espaciales de la imagen, que pueden, bajo ciertas circunstancias, aproximarse a las transformaciones proyectivas. Una transformación afín puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}x' &= a_0 + a_1x + a_2y \\y' &= b_0 + b_1x + b_2y\end{aligned}\tag{2.3}$$

y en forma de matriz como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},\tag{2.4}$$

$$\text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Una transformación afín mapea un cuadrado en un paralelogramo y preserva la colinealidad, ver figura 2.3, además las transformaciones TRS son un caso particular de las afines.



FIGURA 2.3: Transformaciones afines aplicadas a una imagen

2.2.2. Transformaciones en 3D

El caso en 3D no difiere mucho, a excepción de los puntos en 3D con entradas (x, y, z) y constan de mover un objeto en el espacio, rotarlo un valor de ángulo dado y hacerlo más grande o más chico (escala uniforme), a cada punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ en el espacio 3D se le asigna un $\mathbf{x}' = (x', y', z')$.

Dichas transformaciones se pueden describir como la ecuación 2.1 donde \mathbf{t} es un vector de traslación, s es un factor de escala positiva (igual para las tres dimensiones) y \mathbf{R} es la matriz de rotación que depende del eje en el que se desea rotar donde α es el ángulo de rotación. En la figura 2.4 se puede ver un ejemplo de estas transformaciones y en la tabla 2.1 se muestran las coordenadas del cubo original, del cubo con escala y del cubo rotado sobre el eje z .

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \text{ para rotación sobre el eje } x$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \text{ para rotación sobre el eje } y$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para rotación sobre el eje } z$$

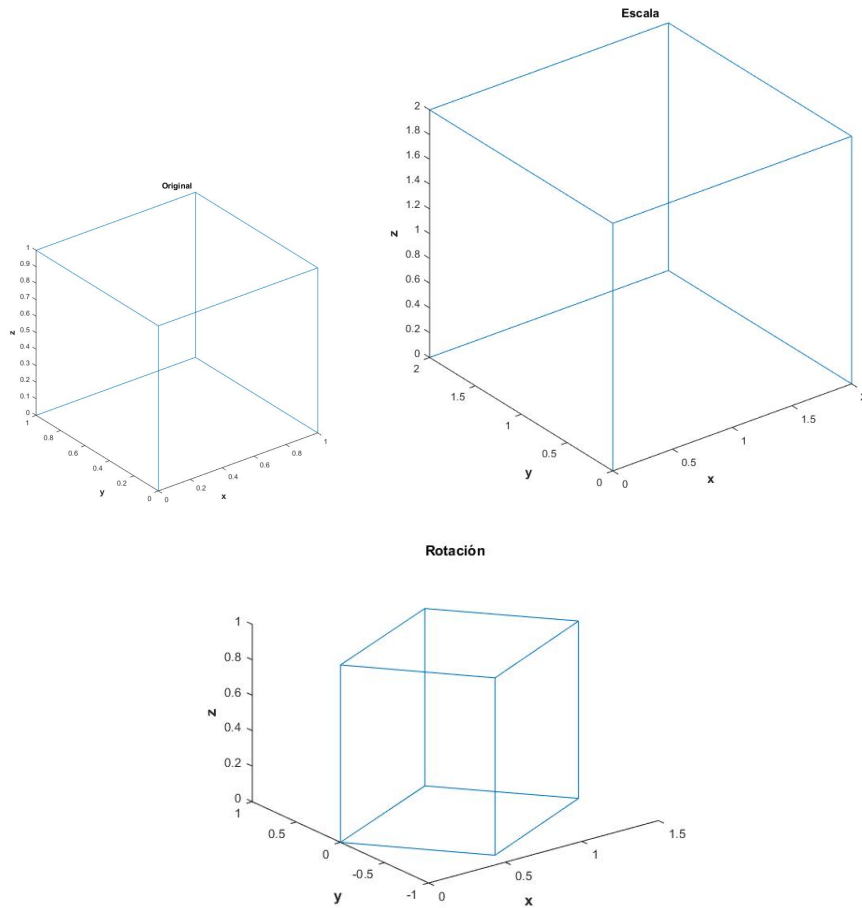


FIGURA 2.4: Transformaciones en 3D

Coordenadas	Escala ($s = 2$)	Rotación ($\alpha = \frac{\pi}{4}$)
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
(1,0,0)	(2,0,0)	(0,-0.85,0)
(0,1,0)	(0,2,0)	(0.85,0.52,0)
(0,0,1)	(0,0,2)	(0,0,1)
(1,1,0)	(2,2,0)	(1.37,-0.32,0)
(1,0,1)	(2,0,2)	(0.52,-0.85,1)
(0,1,1)	(0,2,2)	(0.85,0.52,1)
(1,1,1)	(2,2,2)	(1.37,-0.32,1)

TABLA 2.1: Coordenadas de las transformaciones de un cubo unitario

2.3. Invariantes

A finales del siglo XIX, David Hilbert desarrolló la teoría de invariantes, más adelante en 1950, Gibson con *The perception of the visual world* [15], propuso la idea que el mundo contenía información invariante que era directamente accesible a los sistemas perceptibles de los seres vivos. Describir los objetos por un conjunto de cantidades medibles llamadas invariantes los cuales son insensibles a las deformaciones particulares y proporcionan suficiente poder de discriminación para distinguir los objetos pertenecientes a diferentes clases. Desde un punto de vista matemático, éstos son funcionales definidos en el espacio de la imagen $I : f \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

1. $I(f) = I(\mathcal{D}(f))$ para todos los operadores de degradación \mathcal{D} admisibles.
2. $I(f_1), I(f_2)$ son suficientemente diferentes para f_1, f_2 distintos.

Los invariantes son de varios tipos y se clasifican en:

- Descriptores simples de forma; descripción de compacidad, convexidad, elongación, etc.

- Coeficientes invariantes de transformadas; descriptores de Fourier, rasgos wavelet.
- Invariantes de conjuntos de puntos; posiciones de puntos dominantes.
- Invariantes diferenciales; a partir de derivadas en la frontera.
- Momentos invariantes.

Cuando se tiene un problema de reconocimiento en una imagen éste puede atacarse de tres maneras según [10]: fuerza bruta, normalización de la imagen y características invariantes. En el enfoque de fuerza bruta se busca el espacio paramétrico de todas las posibles degradaciones de imagen, en otras palabras tener de conocimiento todas las varianzas posibles de una imagen por tener un ejemplo: las rotaciones posibles. En cuanto a la normalización de la imagen, como su nombre lo indica, se busca obtener la imagen original a través de un factor normalizador, sin embargo se requiere un marco de referencia y se suelen tener problemas mal planteados, finalmente, los invariantes que buscan detectar imágenes en cualquiera de sus degradaciones.

La invarianza con respecto a transformaciones TRS y afines es de gran ayuda en aplicaciones prácticas, porque el objeto debe reconocerse independientemente de su posición y orientación, así como de la distancia existente entre el objeto y la cámara. Por lo tanto las características invariantes han sido una gran herramienta para el reconocimiento independiente de la forma geométrica, especialmente los momentos invariantes que en adelante se mencionan.

2.4. Momentos invariantes en 2D

2.4.1. Momentos

El enfoque de un momento invariante, como su nombre indica, resultará en un funcional que proporciona la característica de invarianza. En este caso para figuras (imágenes en 2D), al calcular estos momentos resultan ser invariantes a traslación, rotación y escala que son las transformaciones geométricas básicas de una imagen.

Hu [35] propuso invariantes a traslación, rotación y cambio de escala en 2D para el reconocimiento de caracteres. La propiedad de que son independientes de la orientación trajo consigo el interés de muchos investigadores.

Los momentos invariantes de una imagen son parte de lo que se llama procesamiento digital de imágenes, dichas expresiones funcionan como descriptores para caracterizar la figura. Por ejemplo, permiten el cálculo de la superficie de un objeto (conjunto de píxeles), centroide o también identificar un objeto en particular, aún si ha experimentado un cambio en el tamaño o incluso si está girado. Esta teoría es ampliamente utilizada en el reconocimiento de formas.

En términos matemáticos el momento general $M_{pq}^{(f)}$ de una función $f(x, y)$ continua por tramos definida en un soporte compacto Ω contenido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $r = p + q$ es llamado el orden del momento y

$$M_{pq}^{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{pq}(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

donde $\{p_{00}, \dots, p_{kj}, \dots\}$ es un conjunto de polinomios definido en Ω . Es decir

$$f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_{kj} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

2.4.2. Momentos geométricos

De acuerdo con [10][11], para funciones continuas en dos dimensiones, digamos $f(x, y)$, el momento geométrico de orden $(p + q)$ que es el caso en que en el momento general $p_{qp} = x^p y^q$ se puede definir mediante:

$$M_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy. \quad (2.6)$$

Como generalmente el momento se calcula con la ayuda de software para el caso de imágenes binarias formadas por píxeles, donde la función $f(x, y)$

es el valor del pixel con coordenadas (x, y) , la expresión anterior queda como sigue:

$$M_{pq} = \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} x_i^p y_j^q f(x_i, y_j), \quad (2.7)$$

donde

- $p = 0, 1, 2, \dots$
- $q = 0, 1, 2, \dots$
- nx es el ancho de la imagen
- ny es la altura de la imagen

M_{pq} es el momento de orden $(p + q)$ de la función de intensidad $f(x, y)$. En el caso de una imagen binaria que admite solo dos valores (cero o uno), se tiene que $f(x, y) = 0$ o $f(x, y) = 1$.

El área de un determinado objeto de una imagen binaria, por ejemplo, puede ser obtenida por el momento M_{00} o también las coordenadas cartesianas del centroide de la imagen, como se menciona a continuación. El significado geométrico de algunos de los momentos se describe a continuación, ver figura 2.5

- Orden 0: área para $f(x, y)$ imagen binaria
- Orden 1: centro de masa con coordenadas (\bar{x}, \bar{y})

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

- Orden 2: momentos de inercia

$$\sqrt{\frac{m_{20}}{m_{00}}} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{m_{02}}{m_{00}}}$$

- Orden 3: oblicuidad

$$\frac{m_{30}}{\sqrt{m_{20}^3}} \quad \text{y} \quad \frac{m_{03}}{\sqrt{m_{02}^3}}$$

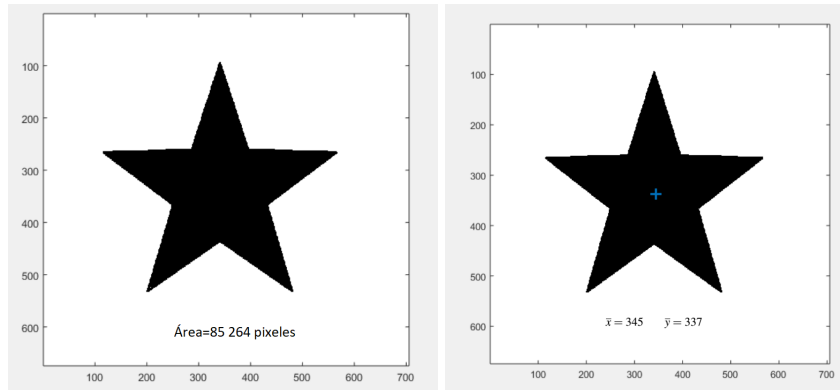


FIGURA 2.5: Momentos invariantes para área y centroide

- Orden 4: kurtosis

$$\frac{m_{40}}{m_{20}^2} \quad \text{y} \quad \frac{m_{04}}{m_{02}^2}$$

Momentos invariantes a traslación

Los momentos centrales se pueden definir como:

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) dx dy, \quad (2.8)$$

donde $\bar{x} = \frac{M_{10}}{M_{00}}$ y $\bar{y} = \frac{M_{01}}{M_{00}}$ son componentes del centroide. Si $f(x, y)$ en la ecuación 2.8, es la intensidad de una imagen digital, entonces

$$\mu_{pq} = \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} (x_i - \bar{x})^p (y_j - \bar{y})^q f(x_i, y_j). \quad (2.9)$$

Así, los momentos centrales hasta orden 3 son:

$$\mu_{00} = M_{00}$$

$$\mu_{01} = 0$$

$$\mu_{10} = 0$$

$$\mu_{11} = M_{11} - \bar{x}M_{01} = M_{11} - \bar{y}M_{10}$$

$$\mu_{20} = M_{20} - \bar{x}M_{10}$$

$$\mu_{02} = M_{02} - \bar{y}M_{01}$$

$$\mu_{21} = M_{21} - 2\bar{x}M_{11} - \bar{y}M_{20} - 2\bar{x}^2M_{01}$$

$$\mu_{12} = M_{12} - 2\bar{y}M_{11} - \bar{x}M_{02} - 2\bar{y}^2M_{10}$$

$$\mu_{30} = M_{30} - 3\bar{x}M_{20} + 2\bar{x}^2M_{10}$$

$$\mu_{03} = M_{03} - 3\bar{y}M_{02} + 2\bar{y}^2M_{01}$$

Se puede demostrar que:

$$\mu_{pq} = \sum_m^p \sum_n^q \binom{m}{p} \binom{n}{q} (-\bar{x})^{(p-m)} (-\bar{y})^{(q-n)} M_{mn}. \quad (2.10)$$

Los momentos centrales son invariantes a traslación, además los momentos de orden $p + q = 2$ normalizados se pueden utilizar para mostrar la orientación espacial de la imagen analizada. Estos momentos son:

$$\mu'_{20} = \frac{\mu_{20}}{\mu_{00}} = \frac{M_{20}}{M_{00}} - \bar{x}^2,$$

$$\mu'_{02} = \frac{\mu_{02}}{\mu_{00}} = \frac{M_{02}}{M_{00}} - \bar{y}^2,$$

$$\mu'_{11} = \frac{\mu_{11}}{\mu_{00}} = \frac{M_{11}}{M_{00}} - \bar{x}\bar{y}.$$

Y la matriz de covarianza la de imagen $f(x, y)$ está dada por:

$$\text{cov}[f(x, y)] = \begin{bmatrix} \mu'_{20} & \mu'_{11} \\ \mu'_{11} & \mu'_{02} \end{bmatrix}$$

También los valores propios de la matriz anterior corresponden al mayor y

menor eje de la intensidad de la imagen. También la orientación Θ se puede obtener a través del ángulo del vector propio asociado al valor del vector propio más grande.

$$\Theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\mu'_{11}}{\mu'_{20} - \mu'_{02}} \right), \quad \text{con } \mu'_{20} - \mu'_{02} \neq 0.$$

Así mismo el valor propio de la matriz de covarianza es

$$\lambda_i = \frac{\mu'_{20} + \mu'_{02}}{2} \pm \frac{\sqrt{4\mu'^2_{11} + (\mu'_{20} - \mu'_{02})^2}}{2},$$

que al relacionarlos de la siguiente manera nos da la excentricidad de la imagen

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Momentos invariantes a escala

Los momentos η_{pq} en que $p + q \leq 2$, [10][11] pueden ser escritos para ser invariantes a escala y también en traslación por la división por el momento η_{00} .

Debido a que μ_{00} es el área del objeto, podemos normalizar los momentos para tener una descripción independiente del tamaño. Los momentos centrales normalizados están dados por la ecuación 2.11:

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}} \quad (2.11)$$

Momentos invariantes a rotación

Ming-Kuei Hu, en un trabajo publicado en 1962 organizó un conjunto de ecuaciones en que los momentos son invariantes en relación a la escala, rotación y también traslación. Las ecuaciones siguientes son conocidas como ecuaciones de Hu o también Momentos Invariantes a traslación, rotación y escala y se aplican para objetos en segunda dimensión:

$$\phi_1 = m_{20} + m_{02}$$

$$\phi_2 = (m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2$$

$$\phi_3 = (m_{30} - 3m_{12})^2 + (3m_{21} - m_{03})^2$$

$$\phi_4 = (m_{30} + m_{12})^2 + (m_{21} + m_{03})^2$$

$$\phi_5 = (m_{30} + 3m_{12})(m_{30} + m_{12})[(m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2] + (3m_{21} - m_{03})(m_{21} + m_{03})[(3m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + 3m_{03})^2]$$

$$\phi_6 = (m_{20} + m_{02})[(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2] + 4m_{11}(m_{30} + m_{12})(m_{03} + m_{21})$$

$$\phi_7 = (3m_{21} - m_{03})(m_{30} + m_{12})[(m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2] - (m_{30} - 3m_{12})(m_{21} + m_{03})[(3m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + 3m_{03})^2]$$

Momentos invariantes afines

Según Flusser et al. [10][11] la teoría de los momentos invariantes afines (IAM) por sus siglas en inglés está estrechamente relacionada con la teoría de los invariantes algebraicos. El invariante algebraico es un polinomio de coeficientes de una forma binaria, cuyo valor permanece igual después de una transformación afín de las coordenadas. Los invariantes afines son una composición de los momentos centrales. Abajo se escriben los primeros momentos invariantes afines (hasta orden 4).

$$I_1 = \frac{1}{\mu_{00}^4}(\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{\mu_{00}^{10}}(-\mu_{30}^2\mu_{03}^2 + 6\mu_{30}\mu_{21}\mu_{12}\mu_{03} - 4\mu_{30}\mu_{12}^3 - 4\mu_{21}^3\mu_{03} + 3\mu_{21}^2\mu_{12}^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{\mu_{00}^7}(\mu_{20}\mu_{21}\mu_{03} - \mu_{20}\mu_{12}^2 - \mu_{11}\mu_{30}\mu_{03} + \mu_{11}\mu_{21}\mu_{12} + \mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} - \mu_{02}\mu_{21}^2)$$

$$I_4 = \frac{1}{\mu_{00}^{11}}(-\mu_{20}^3\mu_{03}^2 + 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{12}\mu_{03} - 3\mu_{20}^2\mu_{02}\mu_{12}^2 - 6\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{21}\mu_{03} - 6\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{12}^2 +$$

$$12\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{21}\mu_{12} - 3\mu_{20}\mu_{02}^2\mu_{21}^2 + 2\mu_{11}^3\mu_{30}\mu_{03} + 6\mu_{11}^3\mu_{21}\mu_{12} - 6\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} - 6\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{21}^2 + 6\mu_{11}\mu_{02}^2\mu_{30}\mu_{21} - \mu_{02}^3\mu_{30}^2)$$

$$I_5 = \frac{1}{\mu_{00}^{16}}(\mu_{20}^3\mu_{30}\mu_{03}^3 - 3\mu_{20}^3\mu_{21}\mu_{12}\mu_{03}^2 + 2\mu_{20}^3\mu_{12}^3\mu_{03} - 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{30}\mu_{12}\mu_{03}^2 + 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{21}^2\mu_{03}^2 + 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{21}\mu_{12}^2\mu_{03} - 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{12}^4 + 3\mu_{20}^2\mu_{12}^3\mu_{02}\mu_{30}\mu_{03} - 6\mu_{20}^2\mu_{21}^2\mu_{02}\mu_{12}\mu_{03} + 3\mu_{20}^2\mu_{12}^3\mu_{02}\mu_{21} + 12\mu_{11}^2\mu_{12}^2\mu_{20}\mu_{30}\mu_{03} - 24\mu_{11}^2\mu_{21}^2\mu_{20}\mu_{12}\mu_{03} + 12\mu_{11}^2\mu_{12}^3\mu_{20}\mu_{21} - 12\mu_{12}^3\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{30} + 12\mu_{21}^3\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{03} - 3\mu_{02}^2\mu_{21}^2\mu_{20}\mu_{30}\mu_{03} + 6\mu_{02}^2\mu_{12}^2\mu_{20}\mu_{30}\mu_{21} - 3\mu_{02}^2\mu_{21}^3\mu_{20}\mu_{12} - 8\mu_{11}^3\mu_{12}^3\mu_{30} + 8\mu_{11}^3\mu_{21}^3\mu_{03} - 12\mu_{11}^2\mu_{21}^2\mu_{02}\mu_{30}\mu_{03} + 24\mu_{11}^2\mu_{12}^2\mu_{02}\mu_{30}\mu_{21} - 12\mu_{11}^2\mu_{21}^3\mu_{02}\mu_{12} + 6\mu_{02}^2\mu_{30}^2\mu_{11}\mu_{21}\mu_{03} - 6\mu_{02}^2\mu_{30}^2\mu_{12}^2\mu_{11} - 6\mu_{02}^2\mu_{21}^2\mu_{11}\mu_{30}\mu_{12} + 6\mu_{02}^2\mu_{21}^4\mu_{11} - \mu_{02}^3\mu_{30}^3\mu_{03} + 3\mu_{02}^3\mu_{30}^2\mu_{21}\mu_{12} - 2\mu_{02}^3\mu_{21}^3\mu_{30})$$

$$I_6 = \frac{1}{\mu_{00}^6}(\mu_{40}\mu_{04} - 4\mu_{31}\mu_{13} + 3\mu_{22}^2)$$

$$I_7 = \frac{1}{\mu_{00}^9}(\mu_{40}\mu_{22}\mu_{04} - \mu_{40}\mu_{13}^2 - \mu_{31}^2\mu_{04} + 2\mu_{31}\mu_{22}\mu_{13} - \mu_{22}^3)$$

$$I_8 = \frac{1}{\mu_{00}^7}(\mu_{20}^2\mu_{04} - 4\mu_{20}\mu_{11}\mu_{13} + 2\mu_{20}\mu_{02}\mu_{22} + 4\mu_{11}^2\mu_{22} - 4\mu_{11}\mu_{02}\mu_{31} + \mu_{02}^2\mu_{40})$$

2.5. Momentos invariantes en 3D

En 1980 Sadjadi y Hall [29] extendieron los momentos invariantes en segunda dimensión a la tercera. Para el caso en tercera dimensión tenemos una función $f(x, y, z)$ continua por tramos definida en un soporte compacto Ω contenido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sean $\{p_{000}, \dots, p_{ikj}, \dots\}$ un conjunto de polinomios definido en Ω . Es decir

$$f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_{ikj} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Así los momentos en 3D son:

$$M_{pqr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{ijk} f(x, y, z) dx dy dz \quad (2.12)$$

2.5.1. Momentos geométricos

El momento de orden $(p + q + r)$ se puede definir mediante:

$$M_{pqr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q z^r f(x, y, z) dx dy dz \quad (2.13)$$

En el caso finito tomando como base la ecuación 2.13 se tiene:

$$M_{pqr} = \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} \sum_{k=1}^{nz} x_i^p y_j^q z_k^r f(x_i, y_j, z_k). \quad (2.14)$$

Momentos invariantes a traslación

Al igual que en el caso en 2D se tiene, que los momentos centrales, son invariantes a traslación, estos momentos se expresan como sigue

$$\mu_{pqr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q (z - \bar{z})^r f(x, y, z) dx dy dz \quad (2.15)$$

Donde $\bar{x} = \frac{M_{100}}{M_{000}}$, $\bar{y} = \frac{M_{010}}{M_{000}}$ y $\bar{z} = \frac{M_{001}}{M_{000}}$. Note que M_{000} es el volumen de una nube de puntos.

Se puede demostrar la relación 2.16 entre los momentos centrales y los momentos no centrales

$$\mu_{pqr} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r C_i^p C_j^q C_k^r (M_{100})^{p-i} (M_{010})^{q-j} (M_{001})^{r-k} (-M_{000})^{-(p+q+r-i-j-k)} M_{ijk} \quad (2.16)$$

Momentos invariantes a escala

Y en el caso de tres dimensiones, los momentos invariantes a escala se expresan en la ecuación 2.17

$$\eta_{pqr} = \frac{\mu_{pqr}}{\mu_{000}^{\left(\frac{p+q+r}{3}+1\right)}} \quad (2.17)$$

Momentos invariantes afines

Suk y Flusser en [10] [11] dedujeron el conjunto completo de invariantes de momento afín 2D de segundo y tercer orden basados en la teoría de las invariantes algebraicas. Sin embargo la teoría de invariantes de momento afines en tercera dimensión estaba poco desarrollada, así Xu y Li [36] proporcionan una apertura a esta teoría construyendo las transformaciones afines para un tetraedro, y así crean el procedimiento para generar momentos invariantes afines en 3D. Se presentan los primeros seis invariantes afines en tercera dimensión, nótese que son funciones dependientes de los momentos centrales. En [36] se menciona el desarrollo de estas expresiones y se llega hasta la número 6, además se menciona que algunos de los invariantes afines de orden mayor, son combinaciones de las expresiones anteriores (orden menor).

$$I_1 = \frac{1}{\mu_{000}^{7/3}} (\mu_{400} + \mu_{040} + \mu_{004} + 2\mu_{220} + 2\mu_{202} + 2\mu_{022})$$

$$I_2 = \frac{1}{\mu_{000}^{14/3}} (\mu_{400}\mu_{040} + \mu_{400}\mu_{004} + \mu_{004}\mu_{040} + 3\mu_{220}^2 + 3\mu_{202}^2 + 3\mu_{022}^2 - 4\mu_{103}\mu_{301} - 4\mu_{130}\mu_{310} - 4\mu_{013}\mu_{031} + 2\mu_{022}\mu_{202} + 2\mu_{022}\mu_{220} + 2\mu_{220}\mu_{202} + 2\mu_{022}\mu_{400} + 2\mu_{004}\mu_{220} + 2\mu_{040}\mu_{202} - 4\mu_{103}\mu_{121} - 4\mu_{130}\mu_{112} - 4\mu_{013}\mu_{211} - 4\mu_{121}\mu_{301} - 4\mu_{112}\mu_{310} - 4\mu_{211}\mu_{031} + 4\mu_{211}^2 + 4\mu_{112}^2 + 4\mu_{121}^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{\mu_{000}^{14/3}} (\mu_{400}^2 + \mu_{040}^2 + \mu_{004}^2 + 4\mu_{130}^2 + 4\mu_{103}^2 + 4\mu_{013}^2 + 4\mu_{031}^2 + 4\mu_{310}^2 + 4\mu_{301}^2 + 6\mu_{220}^2 + 6\mu_{202}^2 + 6\mu_{022}^2 + 12\mu_{112}^2 + 12\mu_{121}^2 + 12\mu_{211}^2)$$

$$I_4 = \frac{1}{\mu_{000}^4} (\mu_{300}^2 + \mu_{030}^2 + \mu_{003}^2 + 3\mu_{120}^2 + 3\mu_{102}^2 + 3\mu_{012}^2 + 3\mu_{210}^2 + 3\mu_{021}^2 + 3\mu_{201}^2 + 6\mu_{111}^2)$$

$$I_5 = \frac{1}{\mu_{000}^4} (\mu_{300}^2 + \mu_{030}^2 + \mu_{003}^2 + \mu_{120}^2 + \mu_{012}^2 + \mu_{102}^2 + \mu_{210}^2 + \mu_{021}^2 + \mu_{201}^2 + 2\mu_{300}\mu_{120} + 2\mu_{300}\mu_{102} + 2\mu_{120}\mu_{102} + 2\mu_{003}\mu_{201} + 2\mu_{003}\mu_{021} + 2\mu_{021}\mu_{201} + 2\mu_{030}\mu_{012} + 2\mu_{030}\mu_{210} + 2\mu_{012}\mu_{210})$$

$$I_6 = \frac{1}{\mu_{000}^4} [\mu_{200}(\mu_{400} + \mu_{220} + \mu_{202}) + \mu_{020}(\mu_{220} + \mu_{040} + \mu_{022}) + \mu_{022}(\mu_{202} + \mu_{022} + \mu_{004}) + 2\mu_{110}(\mu_{310} + \mu_{130} + \mu_{112}) + 2\mu_{101}(\mu_{301} + \mu_{121} + \mu_{103}) + 2\mu_{001}(\mu_{211} + \mu_{031} + \mu_{013})]$$

2.6. Clasificación

De acuerdo con Bishop [3] el reconocimiento de objetos y patrones que se deforman (cambian su forma o estado original) de varias maneras ha sido últimamente un objetivo investigaciones. Según [8] este enfoque se basa en la teoría de probabilidad y estadística, suponiendo que se tiene un conjunto de medidas numéricas con distribuciones de probabilidad conocidas y a partir de ellas se hace el reconocimiento.

El proceso de clasificación consta de separar grupos con características similares. En la figura 2.6 se muestran datos que han sido creados de manera sintética en el plano donde un grupo son los puntos en color negro y el segundo grupo son los puntos con color rojo. En la figura 2.7 se puede observar su separación mediante un algoritmo de clasificación, obteniendo los grupos en color azul y color rojo. Nótese que algunos puntos no pertenecen en la clasificación a su grupo original.

Algunas de las técnicas de clasificación revisadas en la literatura y que han funcionado bien en los experimentos similares al reconocimiento de lengua de señas son análisis de discriminante lineal, máquinas de soporte vectorial y el método ingenuo bayesiano.

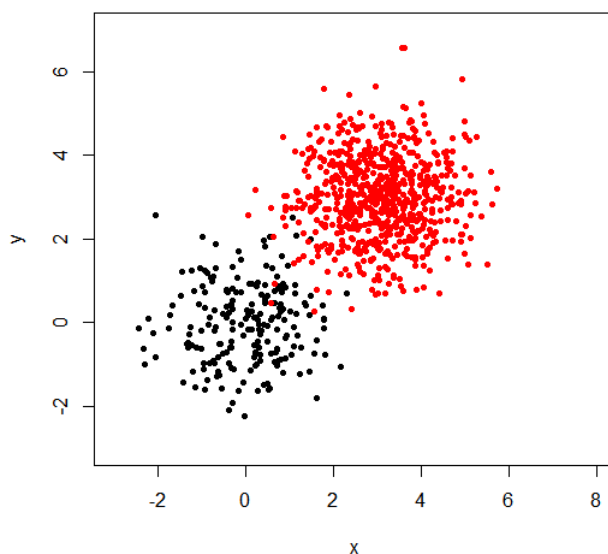


FIGURA 2.6: Datos sintéticos originales

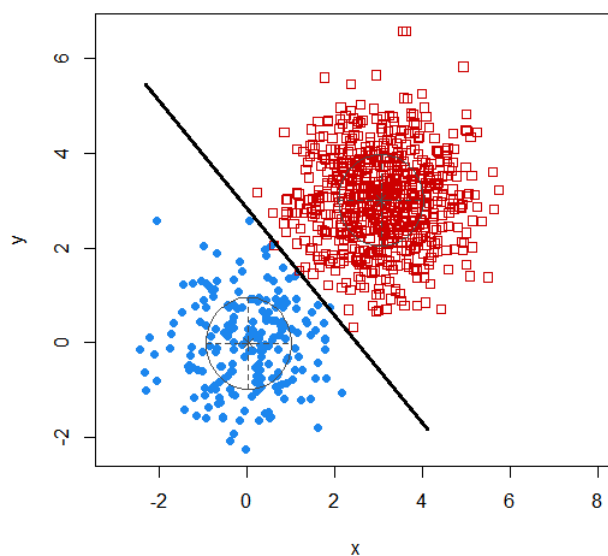


FIGURA 2.7: Datos sintéticos separados por clasificación

2.6.1. Análisis discriminante lineal

El análisis discriminante lineal (LDA por sus siglas en inglés) para más de dos clases, el análisis que se utiliza en este método es derivado del discriminante de Fisher [9][22], que es extendido para encontrar un subespacio que parezca

contener toda la variabilidad de la clase. Se supone que cada una de las clases C tiene una media μ_i y la misma covarianza Σ . Entonces, la dispersión entre la variabilidad de las clases puede ser definida por la covarianza de las medias de las clases (2.18).

$$\Sigma_b = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^C (\mu_i - \mu)(\mu_i - \mu)^T \quad (2.18)$$

donde μ es la media de las medias de las clases. La separación de clases en una dirección \vec{w} será dada en este caso por

$$S = \frac{\vec{w}^T \Sigma_b \vec{w}}{\vec{w}^T \Sigma \vec{w}} \quad (2.19)$$

Esto significa que cuando \vec{w} es un vector propio de $\Sigma^{-1}\Sigma_b$, la separación será igual a su correspondiente valor propio. Si $\Sigma^{-1}\Sigma_b$ es diagonalizable, la variabilidad entre las características estará contenida en el subespacio abarcado por los vectores propios correspondientes a los $C - 1$ valores propios más grandes (si Σ_b está en el rango de máximo $C - 1$). Estos vectores propios son primordialmente usados en la reducción de características como en el análisis de componentes principales (PCA). Los vectores propios correspondientes a los valores propios más pequeños tienden a ser muy sensibles a la elección exacta de los datos de entrenamiento.

Para la clasificación se puede por ejemplo particionar las clases y usar el discriminante estandar de Fisher o LDA para clasificar cada partición. Un método común de esto es la técnica "uno contra todos" donde los puntos de una clase son agrupados, y todos los demás asignados a otro grupo para después aplicar el LDA. Esto dará como resultado C clasificadores, cuyos resultados se combinan. Otro método común es la clasificación por parejas, donde un nuevo clasificador es creado para cada par de clases para combinarlos y producir una clasificación final.

2.6.2. Máquinas de soporte vectorial

Las máquinas de soporte vectorial o SVM son una técnica de aprendizaje supervisado que pertenece a la clase de clasificadores lineales. Fueron introducidas en los años 90 por Cortes y Vapnik [5][1].

Originalmente, las máquinas de soporte vectorial SVM fueron propuestas para realizar clasificación binaria, así para problemas multiclase se tienen algunos esquemas como “uno contra todos”, básicamente se construyen K modelos SVM binarios, uno para cada clase. El clasificador C_i se entrena con las muestras de la clase i como positivas y el resto como negativas para crear k clases de decisión.

$$\begin{aligned} (w_1)T(x) + b_1 \\ \vdots \\ (w_k)T(x) + b_k \end{aligned} \tag{2.20}$$

Al final a cada nueva muestra x de la ecuación 2.20 se le asigna como clase la función de decisión con el valor más alto.

El otro enfoque es “uno contra uno” donde se construyen $1/2K(K - 1)$ modelos, donde cada uno tiene muestras de dos clases i, j . Se supone una muestra x y así la clase será la que tenga más votos. Esta votación consiste en recorrer todos los modelos i, j para la muestra x , sumando un voto resultante de cada clasificación.

2.6.3. Ingenuo Bayesiano

El problema de clasificación supervisada desde un enfoque Bayesiano (en inglés Naive Bayes NB) según [20][28], consiste en asignar a un objeto descrito por un conjunto de atributos o características x_1, x_2, \dots, x_n , a una de las m clases posibles c_1, c_2, \dots, c_m tal que la probabilidad de la clase dados los atributos se maximiza:

$$\text{máx } P(C|X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{2.21}$$

Si hacemos $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ la ecuación 2.21 queda como

$$\text{máx } P(C|\mathbf{X}) \quad (2.22)$$

El clasificador Bayesiano se basa en utilizar la regla de Bayes para calcular la probabilidad posterior de la clase dados los atributos:

$$P(C|X_1, X_2, \dots, X_n) = \max \frac{P(C)P(X_1, X_2, \dots, X_n|C)}{\max P(X_1, X_2, \dots, X_n)} = \frac{P(C)P(\mathbf{X}|C)}{P(\mathbf{X})} \quad (2.23)$$

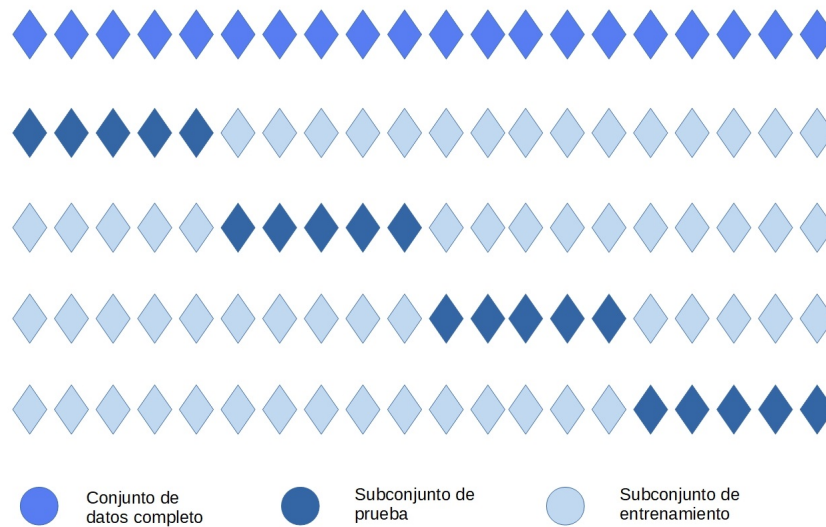
Por lo que el problema de clasificación basado en la ecuación 2.23 se puede expresar como:

$$\text{máx } \frac{P(C)P(\mathbf{X}|C)}{P(\mathbf{X})} \quad (2.24)$$

2.6.4. Validación

Para validar los clasificadores se utilizará el método de validación cruzada, de acuerdo con [3], éste consiste en dividir aleatoriamente el conjunto de muestras de entrenamiento etiquetadas en k partes, para después hacer k validaciones tomando $1/k$ -ésima parte (cada subconjunto) para prueba y el resto para entrenamiento. Es decir, una se usa como el conjunto de entrenamiento tradicional para ajustar los parámetros del modelo en el clasificador, y el otro conjunto, se utiliza para estimar el error de validación de la generalización. Al final se toma la media de los resultados de las métricas para estimar la precisión de clasificación.

La figura 2.8 tiene una representación de la división de los datos dividiendo en cuatro partes el data set. Cada subconjunto se toma como prueba y el resto como entrenamiento.

FIGURA 2.8: Representación de validación cruzada con $k=4$

Al clasificar las manos los resultados obtenidos se pueden validar con ciertas métricas según [25], en primer lugar se tienen los conceptos de verdaderos positivos y falsos positivos que son los positivos correctos e incorrectos respectivamente, así como los verdaderos y falsos negativos de igual manera son los negativos correctos e incorrectos, para el caso particular de este trabajo:

- Verdaderos positivos (VP): el número de casos en que una letra A se clasifica como dicha letra A.
- Falsos positivos (FP): el número de casos en que una letra B se clasifica como otra letra A.
- Verdaderos negativos (VN): el número de casos en que la letra B no se clasifica como A.
- Falsos negativos (FN): el número de casos en que una letra A no se clasifica como dicha letra A.

Así las métricas de validación son:

Accuracy, la cual se refiere a que tan cerca está un valor medido del valor real. Es básicamente la capacidad que existe en clasificar los elementos correctamente en todos los casos.

$$\text{Accuracy} = \frac{VP + VN}{VP + VN + FP + FN}$$

La sensibilidad es la tasa de verdaderos positivos. Es decir mide cuantas letras se clasifican correctamente. También se le conoce como recall.

$$\text{Sensibilidad} = \frac{VP}{VP + FN}$$

La especificidad es la tasa de verdaderos negativos, entre más grande hay menos falsos positivos.

$$\text{Especificidad} = \frac{VN}{VN + FP}$$

Precisión, la cual hace referencia a la exactitud de los verdaderos positivos, midiendo el porcentaje de los realmente positivos.

$$\text{Precisión} = \frac{VP}{VP + FP}$$

Y finalmente F1 Score que es la medida de equilibrio entre precisión y sensibilidad.

$$\text{F1 Score} = 2 \frac{\text{Precisión} * \text{Sensibilidad}}{\text{Precisión} + \text{Sensibilidad}}$$

Capítulo 3

Experimentación y resultados

3.1. Arquitectura propuesta

El reconocimiento de las letras del alfabeto de la Lengua de Señas Mexicana es un proceso de reconocimiento de patrones que se lleva a cabo en este trabajo mediante el proceso común de reconocimiento de patrones. Como se mencionó en el capítulo 2 el proceso de reconocimiento de patrones se divide en tres etapas las cuales pueden observarse en la figura 3.1, cada fase del proceso se detalla en las siguientes secciones.

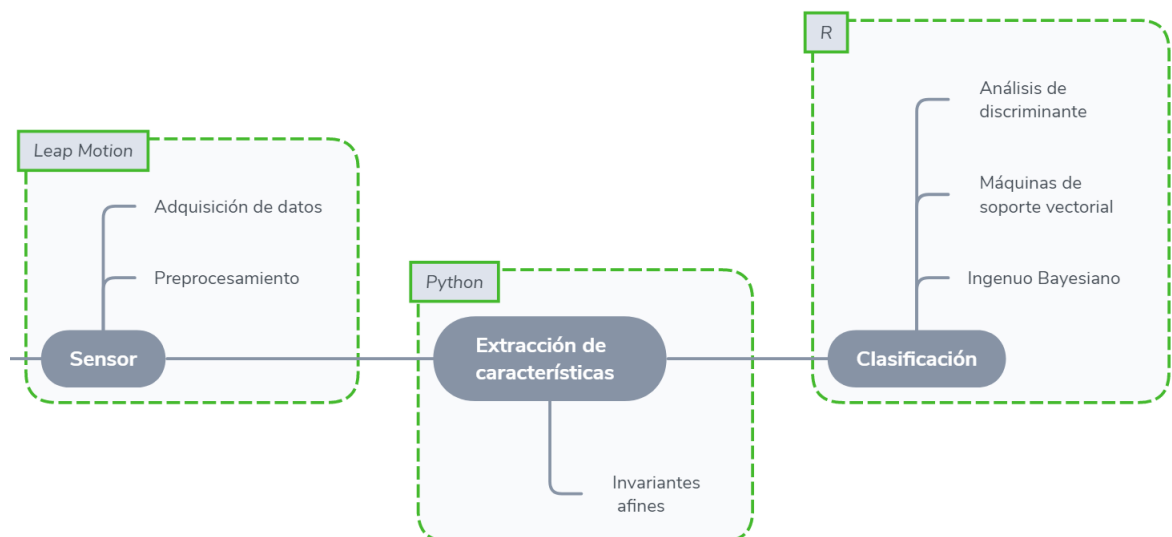


FIGURA 3.1: Arquitectura propuesta

3.1.1. Obtención de datos

El controlador Leap Motion [23] es un dispositivo periférico USB diseñado para colocarse en un escritorio físico, mirando hacia arriba. También se puede montar en un casco de realidad virtual. Usando dos cámaras IR monocromáticas y tres LED infrarrojos, el dispositivo observa un área aproximadamente hemisférica, a una distancia de aproximadamente 1 metro. Los LED generan luz IR sin patrón y las cámaras generan casi 200 cuadros por segundo de datos reflejados. Luego se envía a través de un cable USB a la computadora host, donde es analizado por el software del sensor, el cual es el encargado de detectar los diferentes elementos del brazo.

El área de observación más pequeña y la mayor resolución del dispositivo diferencia al producto del Kinect, que es más adecuado para el seguimiento de todo el cuerpo en un espacio del tamaño de una sala de estar. El controlador realiza tareas como navegar por un sitio web, usar gestos de pellizcar para hacer zoom en los mapas, dibujar con alta precisión y manipular complejas visualizaciones de datos 3D. Leap Motion es ampliamente utilizado por desarrolladores en creaciones y aplicaciones de las manos en 3D.

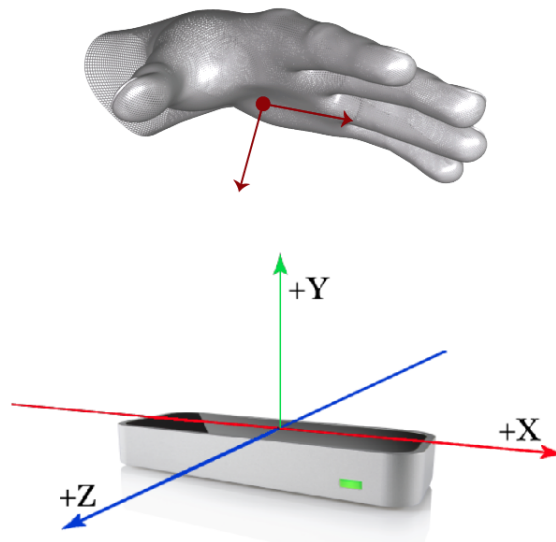


FIGURA 3.2: Marco de referencia de Leap Motion

Para este trabajo, se extraen las coordenadas geométricas en tercera dimensión de cada una de las manos, es decir, una mano tiene coordenadas (x, y, z) de acuerdo al marco de referencia del sensor, mostrado en la figura 3.2. Cada mano es detectada de acuerdo a la estructura osea del cuerpo humano, y en la figura 3.3 se muestran estos 22 puntos.

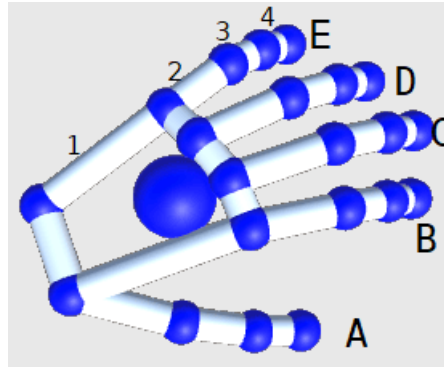


FIGURA 3.3: Puntos de la mano detectados por el controlador Leap Motion

Cada dedo a excepción del dedo pulgar cuenta con cuatro huesos los cuales son unidos por un nudillo (puntos azules de la figura 3.3). En la tabla 3.1 se muestran los nombres de los dedos y de los huesos que toma como referencia el sensor Leap Motion.

Dedo de la mano	Hueso
A - Pulgar	1 - Metacarpiano
B - Índice	2 - Falange proximal
C - Medio	3 - Falange media
D - Anular	4 - Falange distal
E - Meñique	

TABLA 3.1: Estructura osea de los puntos detectados por Leap Motion

Además el controlador mencionado cuenta con un visualizador que permite variar las vistas y manejar los datos que pueden ser obtenidos mediante el

software del dispositivo. La figura 3.4 muestra una mano tomada con el sensor con algunas de las coordenadas (x, y, z) obtenidas.

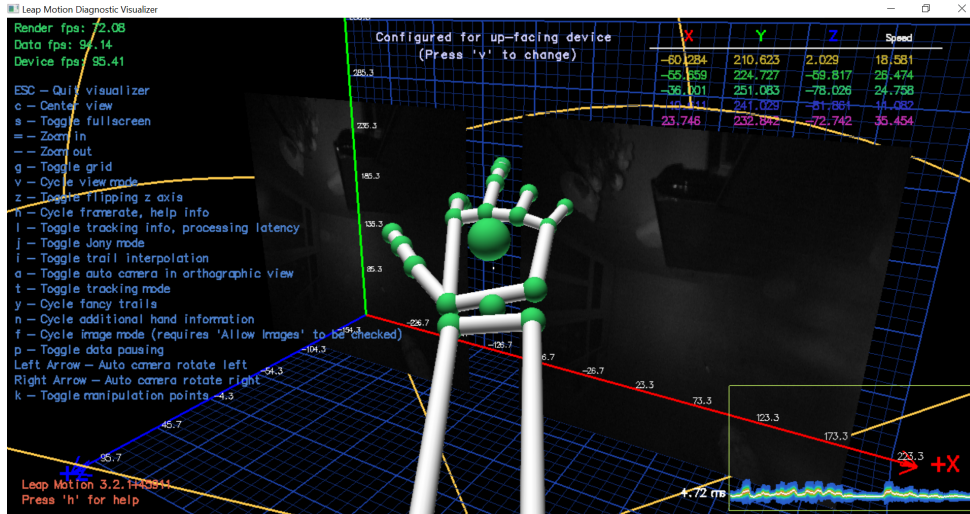


FIGURA 3.4: Visualizador de Leap Motion

Los datos para este proyecto fueron de 8 personas, de cada una se obtuvieron las 21 letras del alfabeto estático de la LSM. Estas letras son

A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, Y.

En la tabla 3.2 se muestran los datos de las personas de las cuales se extrajeron las manos para el data set, con edades, sexo y su mano de prueba (con la que hicieron la letra).

Persona	Edad	Sexo	Mano de prueba
Persona 1	36	Femenino	Derecha
Persona 2	53	Masculino	Derecha
Persona 3	26	Masculino	Derecha
Persona 4	25	Masculino	Derecha
Persona 5	38	Femenino	Derecha
Persona 6	28	Masculino	Derecha
Persona 7	27	Masculino	Derecha
Persona 8	31	Masculino	Derecha

TABLA 3.2: Datos de las personas que prestaron sus manos

En la figura 3.5 se muestra la gráfica de una mano tomada durante este experimento, la que llamaremos mano original ya que para fines de experimentación se hicieron transformaciones geométricas de estas manos, es decir, se le aplican a la mano original transformaciones de escala, rotación y traslación de acuerdo con lo que se mencionó en el capítulo 2. Así, por cada persona se tienen 5 manos: una original compuesta por las coordenadas devueltas por Leap Motion además de 4 manos que son variaciones creadas de manera manual mediante transformaciones geométricas. En la tabla 3.3 se mencionan a detalle las 5 manos de cada letra y se especifican los factores de escala, traslación y rotación aplicados a las variaciones, los cuales fueron seleccionados de manera aleatoria en un intervalo dado. Para traslación el vector \mathbf{t} , escala el escalar s y rotación el ángulo α . Al final el data set de las manos capturadas con Leap Motion tiene 840 manos (40 por clase o letra).

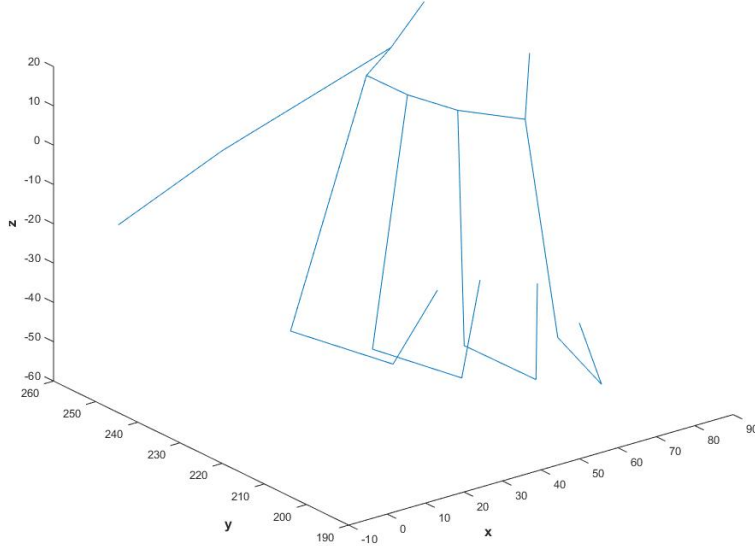


FIGURA 3.5: Gráfica de mano real tomada con Leap Motion

Variaciones	Traslación (t)	Rotación (α)	Escala Uniforme (s)
Mano 1	-	-	$s \in [2, 4.5]$
Mano 2	-	$\alpha \in [-\frac{7\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}]$	-
Mano 3	$t \in [0, 50]$	-	$s \in [1, 2.5]$
Mano 4	$t \in [0, 50]$	$\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$	$s \in [1, 2.5]$
Mano 5 (original)	-	-	-

TABLA 3.3: Características de las transformaciones geométricas aplicadas a las manos

También se utilizaron manos detectadas por Kinect capturadas en el trabajo de [33] titulado *Real-time Mexican Sign Language recognition* así como en el trabajo de tesis titulado *Reconocimiento de gestos de la lengua de señas mexicana en el contexto de una consulta médica general*, las cuales son nubes de puntos con cantidad variable de coordenadas (x, y, z) y segmentados manualmente, eliminando ruido generado por el brazo. El conjunto de datos se compone de

las letras del alfabeto sintético, es decir, 21 letras de un total de 9 personas. Cabe mencionar que a estas manos también se le aplican las 44 variaciones de la tabla 3.3, por lo tanto, el data set final tiene 945 manos.

3.1.2. Extracción de características

De acuerdo con los datos obtenidos en la sección anterior, por cada persona se tienen 105 manos (21 originales por 5 variaciones) por ocho personas, teniendo un total de 840 manos que formarán el conjunto de características llamado data set para la clasificación. A todas estas manos se les obtienen los 6 invariantes afines en 3D mencionados en la sección 2.5.1.

Así $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ son las 6 variables y la letra es la clase del data set. En la tabla 3.4 se muestran los invariantes para la letra A de las ocho personas, esto es, los seis descriptores de la mano A además de la clase a la que pertenecen. Se puede notar la similitud entre los datos obtenidos para esta letra.

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	Letra
0.01859	0.02998	0.09499	0.00133	0.00011	0.00050	A
0.01859	0.00998	0.02826	0.00015	0.00011	-5.47E-05	A
0.01859	0.00998	0.02826	0.00015	0.00011	-5.47E-05	A
0.01859	0.05667	0.17577	0.00175	0.00011	0.00056	A
0.01859	1.13E-06	0.00037	0.00011	0.00011	0.00011	A
0.01859	0.00496	0.01408	0.00020	0.00011	1.87E-05	A
0.01859	0.70785	2.1436	0.00999	0.00011	0.00176	A
0.01859	0.00076	0.00318	0.00018	0.00011	0.00016	A

TABLA 3.4: Data set con los invariantes afines de la letra A

Además de los invariantes afines, se extraen los ángulos que se forman entre los huesos de la mano unidos por falanges. El sensor Leap Motion también devuelve el vector dirección de cada uno de los puntos, según la estructura osea de la figura 3.3, así se puede obtener el ángulo entre dos vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ mediante la ecuación 3.1. Véase figura 3.6.

$$\alpha = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (3.1)$$

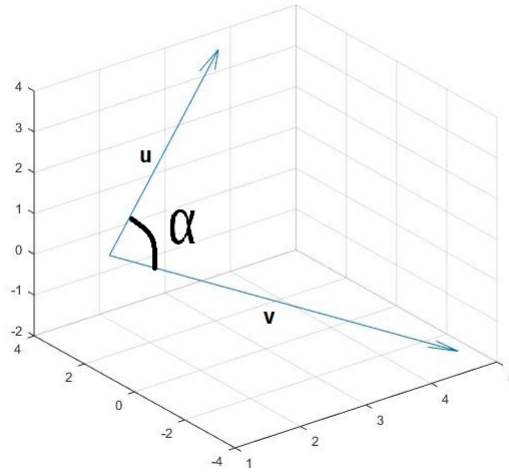


FIGURA 3.6: Ángulo entre dos vectores

La ecuación 3.1 sirve para determinar el ángulo entre los dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , los cuales se calcularon en Python y son devueltos en radianes.

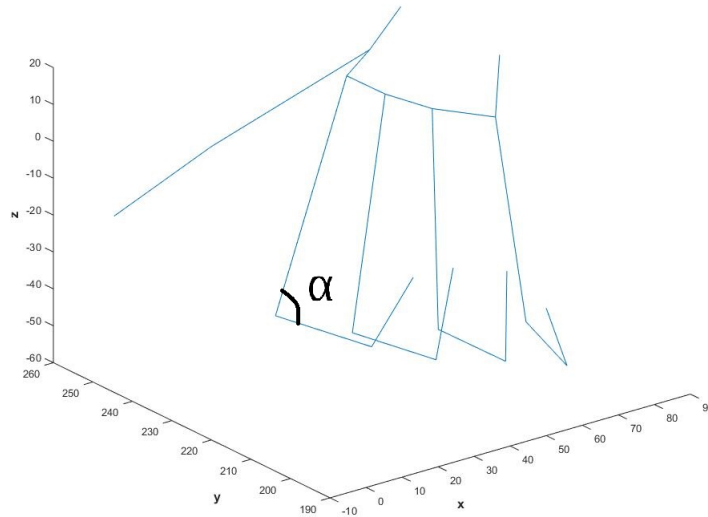


FIGURA 3.7: Ángulo entre dos huesos de la mano

La tabla 3.5 muestra los ángulos entre los huesos de la mano de cada persona.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{17}	α_{18}	α_{19}	Letra
2.43	0.06	0.43	0.957	1.44	1.47	0.60	2.69	1.46	1.46	0.59	2.73	1.42	1.45	0.59	2.72	1.33	1.44	0.57	A
2.31	0.10	0.24	0.36	0.30	0.27	0.40	0.39	0.32	0.27	0.44	0.43	0.31	0.30	0.46	0.52	0.34	0.31	0.47	A
2.33	0.10	0.18	0.40	1.05	1.31	0.64	2.98	1.05	1.36	0.64	3.02	1.06	1.38	0.65	3.01	1.09	1.41	0.64	A
2.43	0.33	0.07	0.33	0.57	0.70	0.39	1.66	0.56	0.62	0.37	1.57	0.50	0.65	0.26	1.49	0.47	0.77	0.38	A
2.34	0.13	0.27	0.91	1.14	1.47	0.68	2.94	1.18	1.49	0.71	2.82	1.11	1.50	0.72	2.85	0.97	1.33	0.68	A
2.23	0.04	0.15	0.81	1.31	1.52	0.74	2.69	1.28	1.48	0.67	2.77	1.24	1.45	0.66	2.82	1.23	1.40	0.64	A
2.29	0.05	0.32	0.94	1.28	1.47	0.66	2.85	1.34	1.47	0.65	2.78	1.33	1.49	0.66	2.71	1.32	1.47	0.70	A
2.31	0.10	0.25	0.34	0.46	0.27	0.40	0.39	0.32	0.27	0.44	0.43	0.31	0.30	0.46	0.52	0.34	0.31	0.47	A

TABLA 3.5: Data set con los ángulos de la letra a

3.1.3. Clasificación

En el capítulo 2 se mencionaron los clasificadores a emplear en este proceso. Para evaluar su desempeño se realiza la técnica de validación cruzada con 4 particiones donde cada subconjunto (de 210 objetos proporcionalmente distribuidos para los datos de Leap Motion que forman base de datos y 236 para los datos capturados con Kinect que forman la segunda base de datos) compone el conjunto de prueba en las iteraciones, después se calculan los promedios de todas éstas para evaluar las métricas de validación. Los experimentos tienen diferentes data sets, combinando las características extraídas de cada mano con el fin de comparar los resultados obtenidos con cada una.

- Experimento 1: el data set tiene como descriptores los invariantes afines $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ calculados a las manos detectadas por el sensor Leap Motion, además de la clase (21 letras).
- Experimento 2: el data set tiene como descriptores los invariantes afines $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ y también a los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{19}$ calculados a las manos detectadas por Leap Motion.
- Experimento 3: el data set tiene como descriptores los invariantes afines $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ calculados a las manos detectadas por el sensor Kinect.

Se aplican los tres métodos de clasificación al data set conformado por los invariantes afines en 3D y se calculan las métricas de validación de acuerdo con la matriz de confusión de cada experimento. Véase el apéndice A para las matrices de confusión. Las tablas siguientes muestran las métricas calculadas además de calcular el máximo y mínimo resultado así como la media y la desviación estándar.

3.2. Experimento 1

Las tablas 3.6, 3.7, 3.8 muestran los resultados de las métricas y en las gráficas bajo cada tabla se muestran estos resultados gráficamente para cada letra así como sus respectivas medias.

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F_1 Score
A	0.90	0.80	0.95	0.89	0.84
B	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C	0.93	0.80	1.00	1.00	0.89
D	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
E	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
G	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
H	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
I	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
L	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
M	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
N	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
O	0.94	1.00	0.90	0.83	0.91
P	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
R	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
S	0.83	0.80	0.85	0.73	0.76
T	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
U	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
V	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
W	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
Y	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.83	0.80	0.85	0.73	0.76
Media	0.96	0.94	0.97	0.94	0.94
D.E.	0.04	0.07	0.04	0.07	0.06

TABLA 3.6: Métricas de validación experimento 1 con LDA

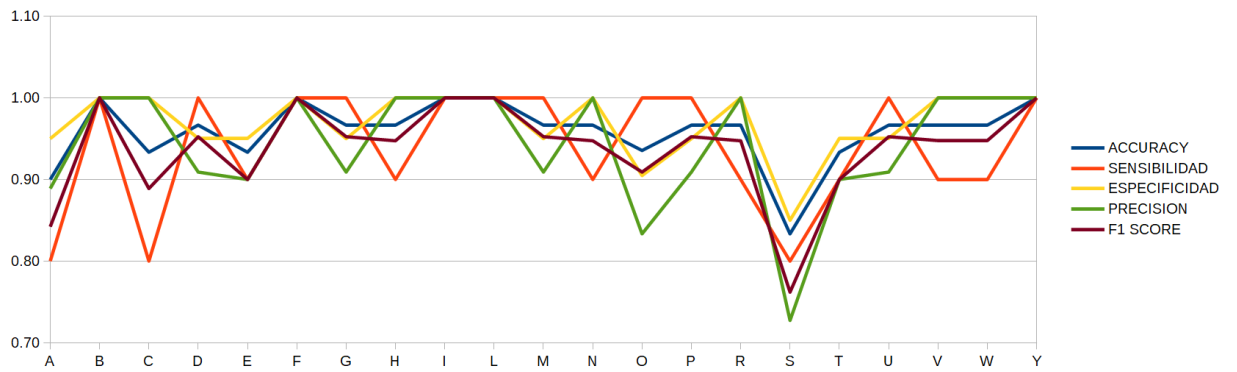


FIGURA 3.8: Valores de las cinco métricas para las letras con LDA del experimento 1

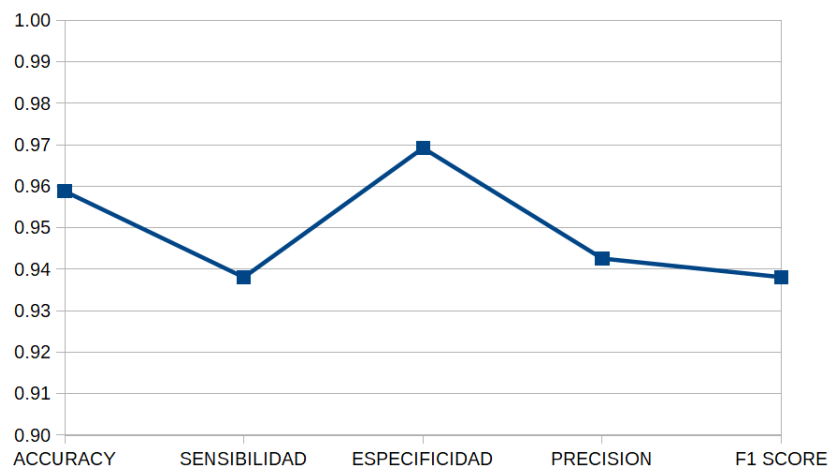


FIGURA 3.9: Media de las cinco métricas con LDA del experimento 1

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F_1 Score
A	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
B	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
D	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
E	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
F	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
G	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
H	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
I	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
L	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
M	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
N	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
O	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
P	0.93	1.00	0.90	0.83	0.91
R	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
S	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
T	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
U	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
V	0.93	0.80	1.00	1.00	0.89
W	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
Y	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
Media	0.97	0.95	0.97	0.95	0.95
D.E.	0.03	0.07	0.03	0.06	0.05

TABLA 3.7: Métricas de validación experimento 1 con SVM

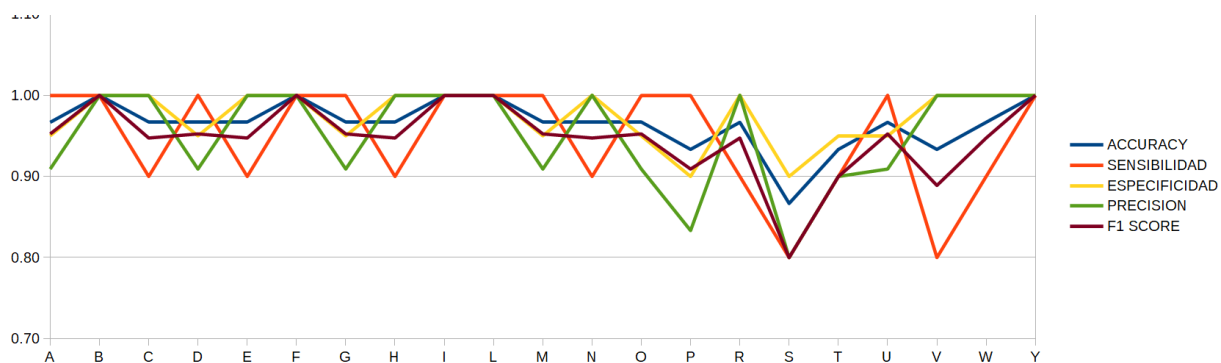


FIGURA 3.10: Valores de las cinco métricas para las letras con SVM del experimento 1

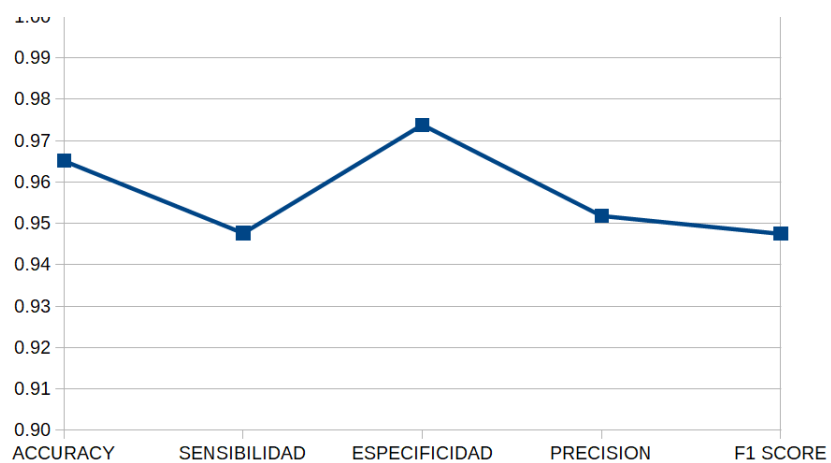


FIGURA 3.11: Media de las cinco métricas con SVM del experimento 1

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F₁ Score
A	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
B	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
D	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
E	0.93	0.80	1.00	1.00	0.89
F	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
G	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
H	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
I	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
L	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
M	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
N	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
O	0.90	0.80	0.95	0.89	0.84
P	0.93	1.00	0.90	0.83	0.91
R	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
S	0.81	0.80	0.81	0.67	0.73
T	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
U	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
V	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
W	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Y	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.81	0.80	0.81	0.67	0.73
Media	0.94	0.91	0.96	0.92	0.92
D.E	0.05	0.07	0.05	0.09	0.07

TABLA 3.8: Métricas de validación experimento 1 con NB

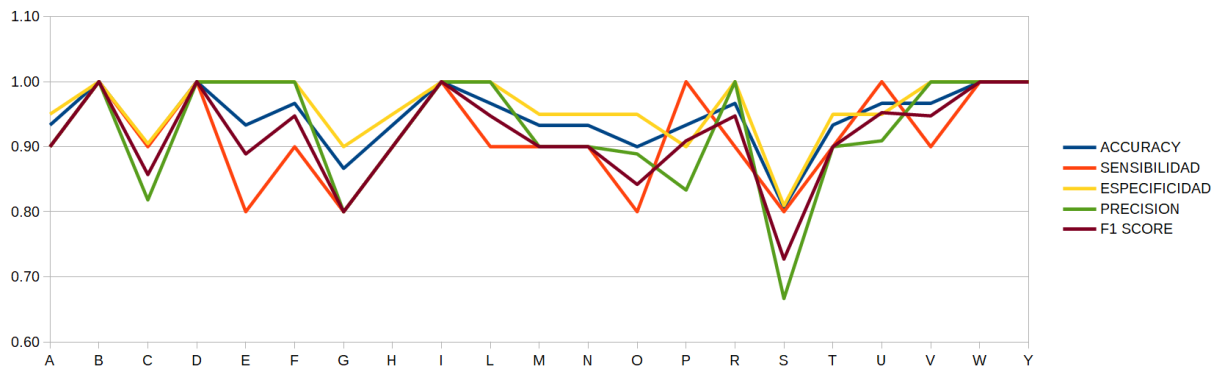


FIGURA 3.12: Valores de las cinco métricas para las letras con NB del experimento 1

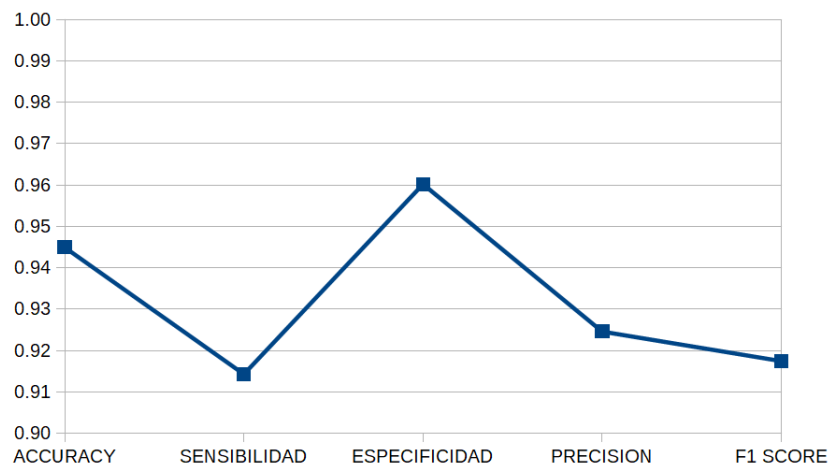


FIGURA 3.13: Media de las cinco métricas con NB del experimento 1

3.3. Experimento 2

Del mismo modo las tablas 3.9, 3.10, 3.11 muestran los resultados de las métricas y también se presentan sus respectivas gráficas.

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F_1 Score
A	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
B	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
C	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
D	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
E	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
F	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
G	0.94	1.00	0.90	0.83	0.91
H	0.93	0.80	1.00	1.00	0.89
I	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
L	0.94	1.00	0.90	0.83	0.91
M	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
N	0.90	0.80	0.95	0.89	0.84
O	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
P	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
R	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
S	0.87	0.90	0.85	0.75	0.82
T	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
U	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
V	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
W	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
Y	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
Máx	0.97	1.00	1.00	1.00	0.95
Min	0.87	0.80	0.85	0.75	0.80
Media	0.93	0.90	0.95	0.91	0.90
D.E.	0.04	0.06	0.05	0.08	0.05

TABLA 3.9: Métricas de validación experimento 2 con LDA

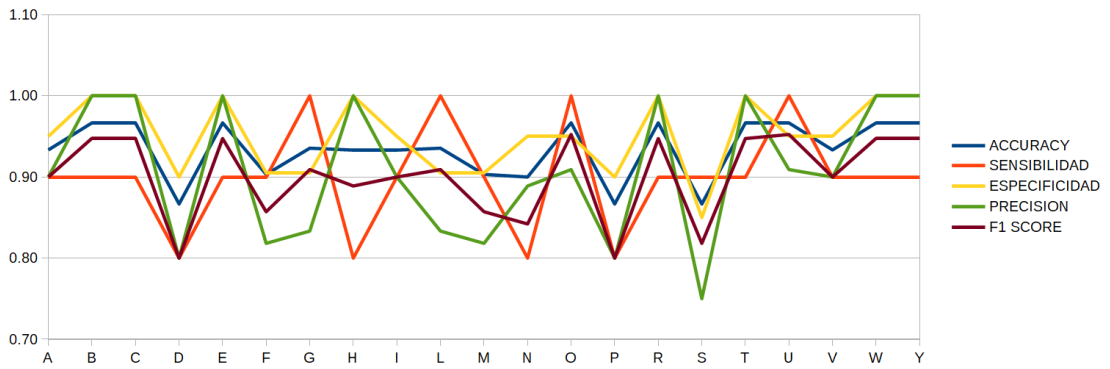


FIGURA 3.14: Valores de las cinco métricas para las letras con LDA del experimento 2

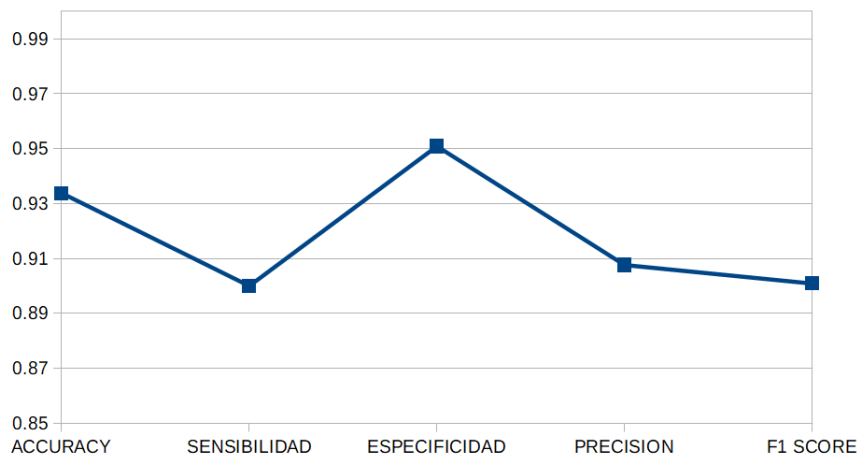


FIGURA 3.15: Media de las cinco métricas con LDA del experimento 2

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F₁ Score
A	0.87	0.70	0.95	0.88	0.78
B	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
C	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
D	0.90	1.00	0.85	0.77	0.87
E	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
F	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
G	0.87	0.70	0.95	0.88	0.78
H	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
I	0.93	0.80	1.00	1.00	0.89
L	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
M	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
N	0.90	0.80	0.95	0.89	0.84
O	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
P	0.87	0.90	0.85	0.75	0.82
R	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
S	0.77	0.70	0.80	0.64	0.67
T	0.87	0.90	0.86	0.75	0.82
U	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
V	0.90	0.80	0.95	0.89	0.84
W	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
Y	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.77	0.70	0.80	0.64	0.67
Media	0.91	0.87	0.93	0.88	0.87
D.E.	0.05	0.09	0.06	0.10	0.08

TABLA 3.10: Métricas de validación experimento 2 con SVM

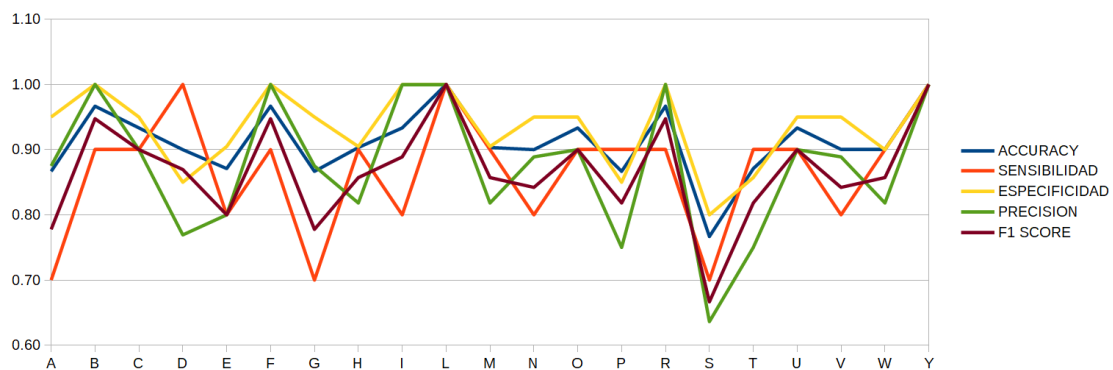


FIGURA 3.16: Valores de las cinco métricas para las letras con SVM del experimento 2

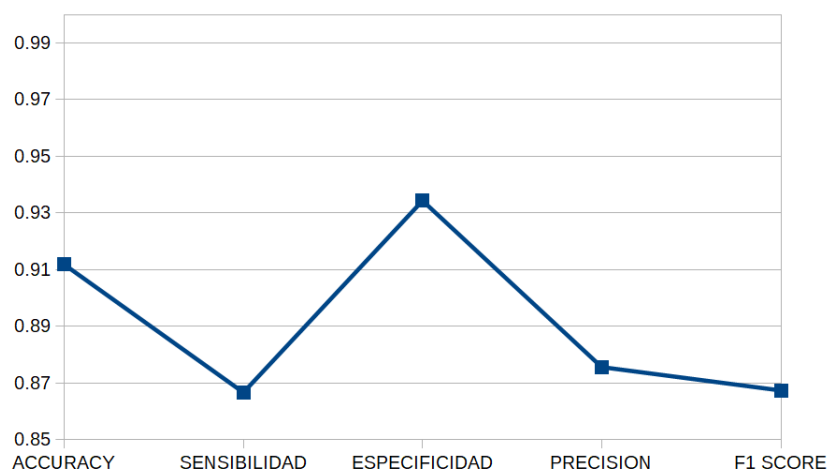


FIGURA 3.17: Media de las cinco métricas con SVM del experimento 2

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F₁ Score
A	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
B	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
D	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
E	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
F	0.88	0.90	0.86	0.75	0.82
G	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
H	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
I	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
L	0.93	0.80	1.00	1.00	0.89
M	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
N	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
O	0.90	0.80	0.95	0.89	0.84
P	0.83	0.70	0.90	0.78	0.74
R	0.97	0.90	1.00	1.00	0.95
S	0.87	0.80	0.90	0.80	0.80
T	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
U	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
V	0.90	0.90	0.90	0.82	0.86
W	0.93	0.80	1.00	1.00	0.89
Y	0.97	1.00	0.95	0.91	0.95
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.83	0.70	0.86	0.75	0.74
Media	0.93	0.90	0.95	0.90	0.90
D.E.	0.05	0.09	0.05	0.09	0.07

TABLA 3.11: Métricas de validación experimento 2 con NB

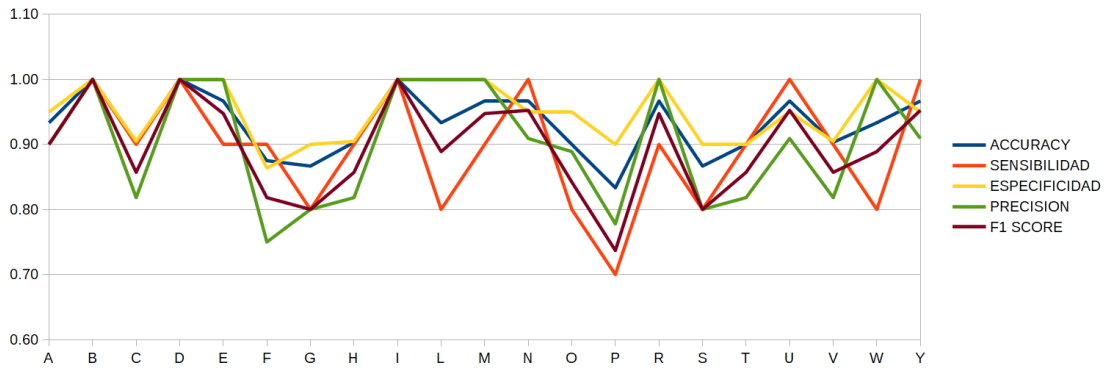


FIGURA 3.18: Valores de las cinco métricas para las letras con NB del experimento 2

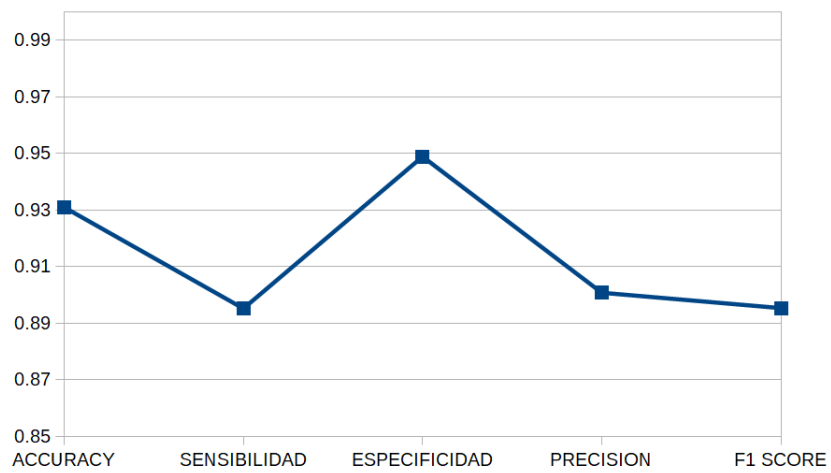


FIGURA 3.19: Media de las cinco métricas con NB del experimento 2

3.4. Experimento 3

En las tablas 3.12, 3.13, 3.14 se observan los resultados de las métricas y también se muestra ésta información mediante sus correspondientes gráficas.

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F_1 Score
A	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
B	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
C	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
D	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
E	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
F	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
G	0.94	0.87	1.00	1.00	0.93
H	0.92	1.00	0.86	0.83	0.91
I	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
L	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
M	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
N	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
O	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
P	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
R	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
S	0.89	0.93	0.86	0.82	0.88
T	0.91	0.87	0.95	0.93	0.90
U	0.94	1.00	0.90	0.88	0.94
V	0.91	0.87	0.95	0.93	0.90
W	0.94	0.93	0.95	0.93	0.93
Y	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.89	0.87	0.86	0.82	0.88
Media	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96
D.E.	0.03	0.05	0.05	0.06	0.04

TABLA 3.12: Métricas de validación experimento 3 con LDA

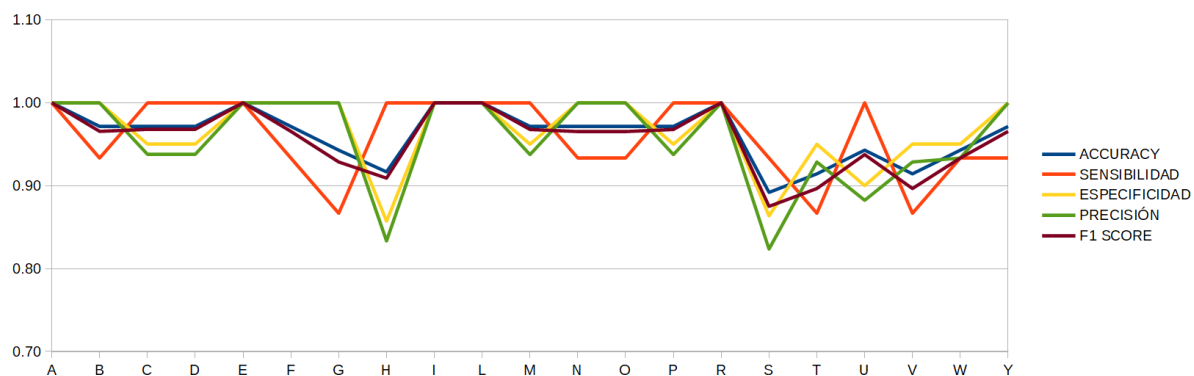


FIGURA 3.20: Valores de las cinco métricas para las letras con LDA del experimento 3

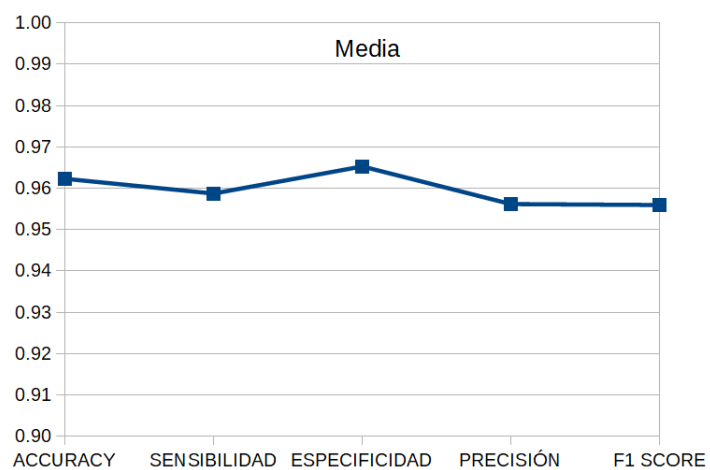


FIGURA 3.21: Media de las cinco métricas con LDA del experimento 3

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F_1 Score
A	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
B	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
C	0.94	0.87	1.00	1.00	0.93
D	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
E	0.94	0.87	1.00	1.00	0.93
F	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
G	0.91	0.87	0.95	0.93	0.90
H	0.92	0.93	0.90	0.88	0.90
I	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
L	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
M	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
N	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
O	0.94	1.00	0.90	0.88	0.94
P	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
R	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
S	0.86	0.87	0.86	0.81	0.84
T	0.89	0.87	0.90	0.87	0.87
U	0.91	0.87	0.95	0.93	0.90
V	0.86	0.80	0.90	0.86	0.83
W	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
Y	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.86	0.80	0.86	0.81	0.83
Media	0.95	0.94	0.96	0.94	0.94
D.E	0.04	0.07	0.04	0.06	0.05

TABLA 3.13: Métricas de validación experimento 3 con SVM

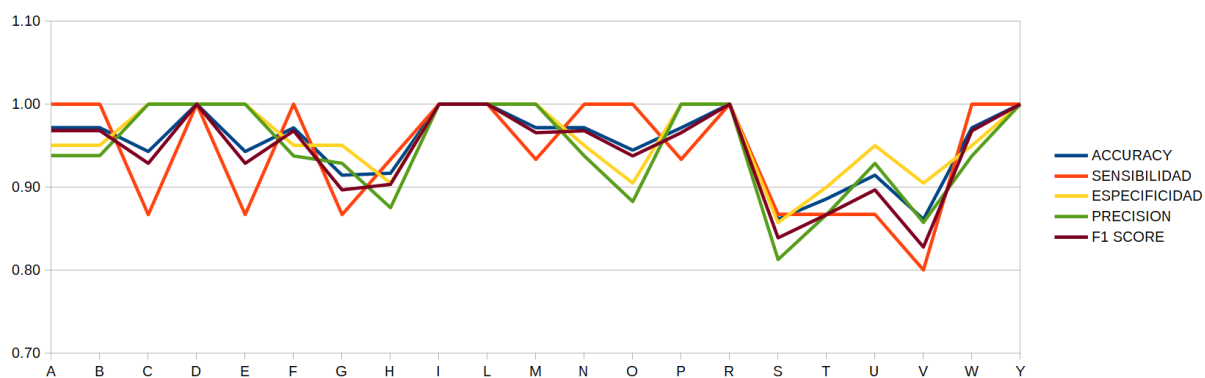


FIGURA 3.22: Valores de las cinco métricas para las letras con SVM del experimento 3

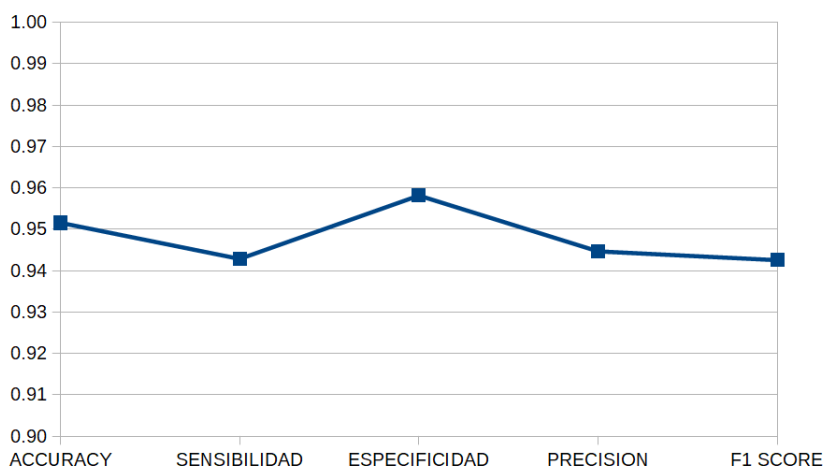


FIGURA 3.23: Media de las cinco métricas con SVM del experimento 3

	Accuracy	Sensibilidad	Especificidad	Precisión	F_1 Score
A	0.94	1.00	0.90	0.88	0.94
B	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C	0.92	0.93	0.90	0.88	0.90
D	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
E	0.91	0.80	1.00	1.00	0.89
F	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
G	0.89	0.87	0.90	0.87	0.87
H	0.92	0.93	0.90	0.88	0.90
I	0.94	1.00	0.90	0.88	0.94
L	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
M	0.94	0.93	0.95	0.93	0.93
N	0.91	0.93	0.90	0.88	0.90
O	0.91	0.87	0.95	0.93	0.90
P	0.94	1.00	0.90	0.88	0.94
R	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
S	0.83	0.87	0.81	0.76	0.81
T	0.94	0.93	0.95	0.93	0.93
U	0.97	1.00	0.95	0.94	0.97
V	0.97	0.93	1.00	1.00	0.97
W	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Y	0.94	0.87	1.00	1.00	0.93
Máx	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Min	0.83	0.80	0.81	0.76	0.81
Media	0.94	0.94	0.95	0.94	0.93
D.E.	0.04	0.06	0.05	0.07	0.05

TABLA 3.14: Métricas de validación experimento 3 con NB

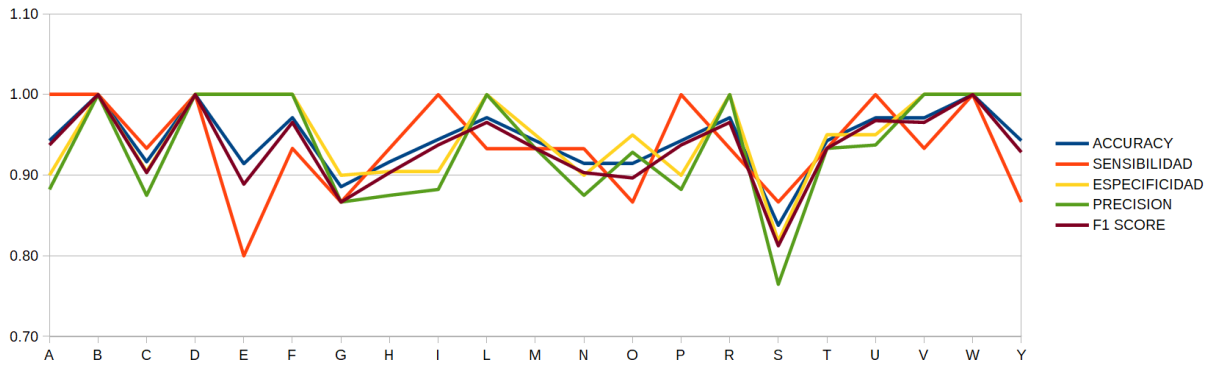


FIGURA 3.24: Valores de las cinco métricas para las letras con NB del experimento 3

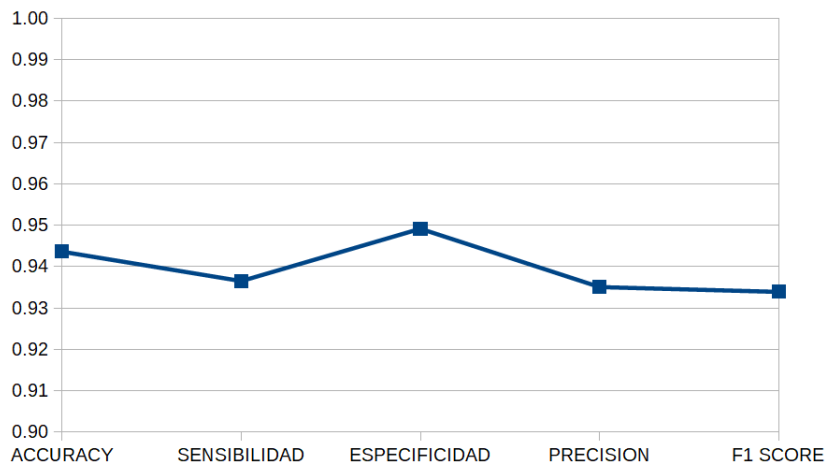


FIGURA 3.25: Media de las cinco métricas con NB del experimento 3

Capítulo 4

Discusión y conclusiones

4.1. Discusión

Tomando en cuenta los resultados dados por las métricas de validación del capítulo anterior se hace una discusión de acuerdo a cada experimento.

Experimento 1

El conjunto de características de este experimento son solo los invariantes afines, es decir, seis variables y la clase es el conjunto de datos para la clasificación. De acuerdo con las tablas 3.6 3.7 y 3.8 se obtiene un alto porcentaje de clasificación. El clasificador más alto tiene promedios entre 0.95 y 0.97 en las métricas de validación. Algo importante de mencionar es que los puntos detectados por el Leap Motion son 22 por lo que el volumen de las manos es el mismo en todos los datos y esto hace que los invariantes obtenga menos información geométrica.

Experimento 2

Para el segundo experimento los descriptores además de los invariantes afines son los ángulos entre los huesos de la mano. Según las tablas 3.9 3.10 y 3.11 el mejor clasificador es LDA con medias entre 0.9 y 0.95. Un punto débil de este experimento es el número de descriptores (25 entre los invariantes y los ángulos), lo que crea una complejidad computacional mayor y también mayor porcentaje de error.

Experimento 3

Finalmente para el experimento 3 los descriptores son solo los invariantes afines pero aplicados a las manos del Kinect (nubes de puntos con más de 1000 coordenadas), por lo que se tiene más información geométrica. Según las métricas de las tablas 3.12, 3.13 y 3.14 los tres clasificadores devuelven resultados similares y altos con promedios desde 0.93 hasta 0.96 sin mucha variación.

El resumen de lo dicho anteriormente se muestra en la tabla 4.1:

Experimento	Clasificador	Resultados más altos	Resultados más bajos
1	LDA	b,i,l,y	s
1	SVM	b,f,i,l,y	p,s,v
1	NB	b,d,i,w,y	s
2	LDA	o	s
2	SVM	l,y	s
2	NB	b,d,i	p
3	LDA	a,e,i,l,r	h,s
3	SVM	d,i,l,r,y	s,v
3	NB	b,d,w	e,s

TABLA 4.1: Resultados resumidos de los experimentos

De la tabla 4.1 se puede observar que la letra *s* presentó problemas al ser identificada ya que era confundida con otras letras. Además las letras con mejores resultados en los experimentos son *b, d, i, l e y*.

Del mismo modo, cabe destacar que LDA resultó ser el clasificador con mejores resultados finales.

Para verificar si hay diferencia significativa entre los tres experimentos se recurre al test de Friedman como prueba estadística y matemática. Según [6] cuando se analizan datos medidos por una variable cuantitativa continua, las pruebas estadísticas se basan en suponer que se ha obtenido de una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad de tipo normal o de tipo gaussiana (pruebas paramétricas). Sin embargo, en muchas ocasiones esta suposición

no se cumple por lo que los datos se pueden transformar de tal manera que sigan una distribución normal, o bien, recurrir a pruebas que no se basan en ninguna suposición en cuanto a la distribución de probabilidad a partir de la que fueron obtenidos los datos (pruebas no paramétricas).

En esta parte de la investigación y de acuerdo con las tablas y gráficos del capítulo 3 se evaluará si las diferencias entre los tres experimentos realizados es significativa o no lo es, para cada uno de los clasificadores sin tomar la diferencia entre ellos. Se realiza el análisis únicamente de la métrica accuracy la cual es la que mejor describe los datos para este fin.

En el caso de este trabajo se recurre a realizar las pruebas de la normalidad de los datos mediante la prueba de Shapiro-Wilk, calculando el p-valor el cual de resultar mayor a 0.05 en todos los casos, cumpliría la hipótesis de normalidad [6]. De resultar normales, se realizará un análisis de varianza (ANOVA) que es una prueba paramétrica. Sin embargo en dos de los casos no se cumple la hipótesis de normalidad para todos los experimentos y en el último caso solo para dos experimentos (véase tabla 4.2).

Clasificador	Experimento	p-valor
LDA	1	0.0004098
	2	0.001568
	3	0.01367
SVM	1	0.0002034
	2	0.08067
	3	0.01701
NB	1	0.0155
	2	0.1082
	3	0.1561

TABLA 4.2: Prueba de normalidad para ANOVA

Al no cumplirse las condiciones se recurre a una prueba no paramétrica, el test de Friedman [12]. Éste nos proporciona la información de si existen dos o más grupos con diferencias significativas, en este caso, si existe diferencia

significativa entre los experimentos. Sin embargo, no proporciona cuales son los grupos con dicha diferencia por lo que se recurre a un tratamiento post-hoc denominado de Wilcoxon.

Se realiza la prueba de Wilcoxon, la cual proporciona los p-valores. Y como se dijo anteriormente se necesita un p-valor menor o igual a 0.05 para determinar que existe diferencia significativa entre los experimentos. En el lenguaje de programación R se ingresan los datos y para los tres experimentos con clasificador LDA, SVM y NB se tiene que existe diferencia significativa entre dos grupos. Y tras realizar la prueba de Wilcoxon se determina entre que pares se presenta esta diferencia. Se muestran los resultados de la tabla 4.3.

	Experimento 1	Experimento 2
Experimento 2	0.108	-
Experimento 3	0.885	0.058

TABLA 4.3: Resultados de la prueba Post-hoc para los tres experimentos con LDA

En la tabla 4.3 se puede observar que no existe diferencia significativa entre ninguno de los tres experimentos que se realizaron con el clasificador LDA, dado que los valores de p son mayores a 0.05.

Se realiza el mismo procedimiento para los tres experimentos ahora con el clasificador SVM.

	Experimento 1	Experimento 2
Experimento 2	0.00058	-
Experimento 3	0.03561	0.00434

TABLA 4.4: Resultados de la prueba Post-hoc para los tres experimentos con SVM

En la tabla 4.4 se puede ver que hay diferencia significativa entre los tres

pares de experimentos existentes que se clasificaron con SVM, es decir, experimento 1 - experimento 2, experimento 1- experimento 3 y experimento 2- experimento 3. Finalmente en la tabla 4.5 se tiene que no hay diferencia significativa entre los experimentos que se realizaron con NB.

	Experimento 1	Experimento 2
Experimento 2	0.81	-
Experimento 3	0.92	0.81

TABLA 4.5: Resultados de la prueba Post-hoc para los tres experimentos con NB

Como parte de la discusión se presenta la tabla 1.1 con una columna agregada para el porcentaje de precisión de éstos trabajos así como el del actual. Véase 4.6. Se puede observar que es un resultado bastante competente.

Trabajo	Lengua	Tipo de lenguaje	Dimensión	Datos de entrada	Clasificador	Precisión
[21]	Americano	2576 videos	3D	RGB-AVI	En proceso	–
[17]	Americano	Alfabeto estático y dos frases	2D	Imagen a escala de grises	Coficiente de correlación cruzada	94
[4]	Americano	Alfabeto estático	3D	Leap Motion	Random regression forest	92.8
[30]	Americano	Alfabeto estático	2D	Kinect- bordes	Naive Bayes y K-NN	89
[7]	Americano	Alfabeto estático	3D	Kinect RGB-D/color	Random forest	90
[27]	Americano	3 letras y un número	2D	Imagen a escala de grises	Wavelet NN	97.5
[18]	Alemán	25 signos	3D	Kinect RGB-D	Redes de Markov	97
[34]	Alemán	10 frases	3D	Kinect RGB-D video	HMM-FNN	94.6
[2]	Francés	Alfabeto estático	3D	Kinect RGB-D	Random Forest	76
[14]	Mexicano	20 palabras	3D	Kinect RGB-D/Esqueleto	Data Time Warping	98.5
[24]	Mexicano	25 palabras y 23 letras	3D	Leap Motion	En proceso	97.2
[32]	Mexicano	Alfabeto estático	2D	Imagen a escala de grises	Redes Neuronales	93
[31]	Mexicano	Alfabeto estático	2D	Imagen a escala RGB-color	Redes neuronales	93
[16]	Mexicano	Alfa-numérico	3D	Kinect RGB-D	AdaBoost	95.8
[13]	Mexicano	7 letras	3D	Kinect RGB-D	Redes neuronales	76.1
Propuesta	Mexicano	Alfabeto estático	3D	Leap Motion	Análisis discriminante lineal	93.3

TABLA 4.6: Comparación de trabajos relacionados con reconocimiento de LSM

4.2. Conclusiones y trabajo futuro

De acuerdo con los experimentos realizados, se comprueba que los invariantes afines en tercera dimensión tienen un alto porcentaje de reconocimiento además de que el proceso de obtención de datos no fue de ambiente restringido por lo que presenta ventajas en comparación con los trabajos encontrados en la literatura. También se puede notar que los mejores resultados se tienen para las manos obtenidas con el Kinect y esto es por su mayor número de puntos que brindan mayor información geométrica y esto es sin mayor complejidad

computacional. Por lo tanto, en general se tiene un alto desempeño de reconocimiento de la Lengua de Señas Mexicana con los invariantes afines en 3D sin alto costo computacional. Como parte de algunas limitaciones puede mencionarse el alcance de los dispositivos y los grados de libertad, así como que Leap Motion proporciona 22 puntos de la mano solamente, los cuales no tienen suficiente información geométrica, sin embargo se rescata la información tri-dimensional que el sensor proporciona. Finalmente, con base en las secciones anteriores se confirma la hipótesis del trabajo propuesto por lo que este trabajo aporta información sobre la aplicación de los invariantes que puede ser aplicada a diferentes áreas de la computación, ya que se observaron buenos resultados e incluso podrían ampliarse estos resultados.

Como parte del trabajo futuro se puede tomar en cuenta la fusión de los sensores Leap Motion y Kinect tomando las propiedades de ambos para un mejor porcentaje de reconocimiento. Así como trabajar en más invariantes afines en tercera dimensión (desarrollo y propiedades algebraicas) para tener más descriptores.

Apéndice A

Apéndice A

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0
W	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

TABLA A.1: Matriz de confusión experimento 1 con LDA

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	8	0	0
W	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

TABLA A.2: Matriz de confusión experimento 1 con SVM

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	8	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

TABLA A.3: Matriz de confusión experimento 1 con NB

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	8	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	1	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9

TABLA A.4: Matriz de confusión experimento 2 con LDA

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	7	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
C	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	1	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	2	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8	1	0
W	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

TABLA A.5: Matriz de confusión experimento 2 con SVM

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
B	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	8	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

TABLA A.6: Matriz de confusión experimento 2 con NB

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	13	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	13	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	13	1	0
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	14	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14

TABLA A.7: Matriz de confusión experimento 3 con LDA

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	13	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	13	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	2	0	0
V	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12	1	0
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15

TABLA A.8: Matriz de confusión experimento 3 con SVM

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	W	Y
A	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	1	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	13	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0	0	0	0	0
S	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0	0	0
U	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0
V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13

TABLA A.9: Matriz de confusión experimento 3 con NB

Bibliografía

- [1] Asa Ben-Hur y col. «Support vector clustering». En: *Journal of machine learning research* 2.Dec (2001), págs. 125-137.
- [2] Ahmed Ben Jmaa y col. «A new approach for hand gestures recognition based on depth map captured by rgb-d camera». En: *Computación y Sistemas* 20.4 (2016), págs. 709-721.
- [3] Christopher M Bishop. *Pattern recognition and machine learning*. Springer, 2006.
- [4] Shaun Canavan y col. «Hand gesture recognition using a skeleton-based feature representation with a random regression forest». En: *Image Processing (ICIP), 2017 IEEE International Conference on*. IEEE. 2017, págs. 2364-2368.
- [5] Corinna Cortes y Vladimir Vapnik. «Support-vector networks». En: *Machine learning* 20.3 (1995), págs. 273-297.
- [6] Yadolah Dodge. *The Oxford dictionary of statistical terms*. Oxford University Press on Demand, 2006.
- [7] Cao Dong, Ming C Leu y Zhaozheng Yin. «American sign language alphabet recognition using microsoft kinect». En: *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition workshops*. 2015, págs. 44-52.
- [8] Richard O Duda, Peter E Hart y David G Stork. *Pattern classification*. John Wiley & Sons, 2012.
- [9] Ronald A Fisher. «The use of multiple measurements in taxonomic problems». En: *Annals of eugenics* 7.2 (1936), págs. 179-188.
- [10] Jan Flusser y Tomas Suk. «Pattern recognition by affine moment invariants». En: *Pattern recognition* 26.1 (1993), págs. 167 -174.

- [11] Jan Flusser, Barbara Zitova y Tomas Suk. *Moments and moment invariants in pattern recognition*. John Wiley & Sons, 2009.
- [12] Milton Friedman. «The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance». En: *Journal of the american statistical association* 32.200 (1937), págs. 675 -701.
- [13] R Galicia y col. «Mexican sign language recognition using movement sensor». En: *Industrial Electronics (ISIE), 2015 IEEE 24th International Symposium on*. IEEE. 2015, págs. 573 -578.
- [14] Gibran García-Bautista, Felipe Trujillo-Romero y Santiago Omar Caballero-Morales. «Mexican sign language recognition using kinect and data time warping algorithm». En: *Electronics, Communications and Computers (CONIELECOMP), 2017 International Conference on*. IEEE. 2017, págs. 1-5.
- [15] James J Gibson. «The perception of the visual world.» En: (1950).
- [16] Javier Jimenez y col. «Mexican Sign Language Alphanumerical Gestures Recognition using 3D Haar-like Features». En: *IEEE Latin America Transactions* 15.10 (2017), págs. 2000-2005.
- [17] Anshal Joshi, Heidy Sierra y Emmanuel Arzuaga. «American sign language translation using edge detection and cross correlation». En: *Communications and Computing (COLCOM), 2017 IEEE Colombian Conference on*. IEEE. 2017, págs. 1-6.
- [18] Simon Lang, Marco Block y Raúl Rojas. «Sign language recognition using kinect». En: *International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing*. Springer. 2012, págs. 394-402.
- [19] Felix Emilio Luis-Pérez, Felipe Trujillo-Romero y Wilebaldo Martínez-Velazco. «Control of a service robot using the mexican sign language». En: *Mexican International Conference on Artificial Intelligence*. Springer. 2011, págs. 419 -430.
- [20] Melvin Earl Maron. «Automatic indexing: an experimental inquiry». En: *Journal of the ACM (JACM)* 8.3 (1961), págs. 404-417.

- [21] Aleix M Martínez y col. «Purdue RVL-SLLL ASL database for automatic recognition of American Sign Language». En: *Multimodal Interfaces, 2002. Proceedings. Fourth IEEE International Conference on*. IEEE. 2002, págs. 167-172.
- [22] Geoffrey McLachlan. *Discriminant analysis and statistical pattern recognition*. Vol. 544. John Wiley & Sons, 2004.
- [23] Leap Motion. *Leap Motion, Inc.* 2010. URL: <https://www.leapmotion.com/>.
- [24] Luis Obed Romero Nájera y col. «Recognition of Mexican Sign Language through the Leap Motion Controller». En: *Proceedings of the International Conference on Scientific Computing (CSC). The Steering Committee of The World Congress in Computer Science, Computer Engineering y Applied Computing (WorldComp)*. 2016, pág. 147.
- [25] David Martin Powers. «Evaluation: from precision, recall and F-measure to ROC, informedness, markedness and correlation». En: (2011).
- [26] F Priego-Perez. «Reconocimiento de Imágenes del Lenguaje de Señas Mexicano». En: *TFG, Instituto Politécnico Nacional* (2012).
- [27] Jabbar Raheem Rashed y Hasanain Abbas Hasan. «NEW METHOD FOR HAND GESTURE RECOGNITION USING WAVELET NEURAL NETWORK». En: *Journal of Engineering and Sustainable Development* 21.1 (2017), págs. 65-73.
- [28] J Rennie y col. «Tackling the poor assumptions of Naive Bayes classifiers (PDF)». En: ICML. 2003.
- [29] Firooz A Sadjadi y Ernest L Hall. «Three-dimensional moment invariants». En: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI-2.2* (1980), págs. 127-136.
- [30] Himadri Nath Saha y col. «A Machine Learning Based Approach for Hand Gesture Recognition using Distinctive Feature Extraction». En: *Computing and Communication Workshop and Conference (CCWC), 2018 IEEE 8th Annual*. IEEE. 2018, págs. 91-98.

-
- [31] Francisco Solís, David Martínez y Oscar Espinoza. «Automatic mexican sign language recognition using normalized moments and artificial neural networks». En: *Engineering* 8.10 (2016), pág. 733.
- [32] J-Francisco Solís-V y col. «Mexican sign language recognition using normalized moments and artificial neural networks». En: *Optics and Photonics for Information Processing VIII*. Vol. 9216. International Society for Optics y Photonics. 2014, 92161A.
- [33] Candy Obdulia Sosa-Jiménez y col. «Real-time Mexican Sign Language recognition». En: *2017 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*. IEEE. 2017, págs. 1 -6.
- [34] Huiyue Wu, Jianmin Wang y Xiaolong Zhang. «Combining hidden Markov model and fuzzy neural network for continuous recognition of complex dynamic gestures». En: *The Visual Computer* 33.10 (2017), págs. 1265 -1278.
- [35] Dong Xu y Hua Li. «3-D affine moment invariants generated by geometric primitives». En: *Pattern Recognition, 2006. ICPR 2006. 18th International Conference on*. Vol. 2. IEEE. 2006, págs. 544 -547.
- [36] Dong Xu y Hua Li. «Geometric moment invariants». En: *Pattern recognition* 41.1 (2008), págs. 240 -249.