Métodos Matemáticos Examen de Admisión

October 27, 2015

Nombre:

1.- Demostrar que el valor máximo de $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ es $\left(\frac{a^2}{3}\right)^3$. Hint usar el método de multiplicadores de Lagrange.

2.- Calcular la integral

$$\int\int (x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma)d\sigma,$$

donde $\hat{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

3.- Sea $d\vec{r} = h_1dq_1\hat{e}_1 + h_2dq_2\hat{e}_2 + h_3dq_3\hat{e}_3$ demuestre que

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right].$$

4.- Sean las bases $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ de coordenadas cartesianas y $\{\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}\}$ de las cilíndricas. Ecuentre sus respectivas matrices cambio de base.

5.- Sean las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \hat{E} = -\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \hat{H} = \frac{\partial \hat{D}}{\partial t} + \rho\hat{v}$$
$$\nabla \cdot \hat{D} = \rho, \qquad \nabla \cdot \hat{B} = 0, \text{ d}onde\, \hat{D} = \epsilon_0\hat{E},\ \hat{B} = \mu_0\hat{H},$$

el potencial vectorial $\hat{A}$ satisface $\nabla \cdot \hat{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. Demuestre que:

$$a)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\hat{A} = -\mu_0\rho\hat{v}; \qquad b)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

6.- Escriba las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en forma tensorial y desarrollelas explicitamente.