Examen diagnóstico de métodos matemáticos

October 16, 2017

Nombre:

Problema. Clásicamente el momento angular esta definido como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, para la mecánica cuántica $\vec{p}$ se reemplaza por $-i\nabla$. Demuestre que:
a)

$$\hat{L}_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \hat{L}_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \hat{L}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

b) Demuestre que estos operadores satisfacen las relaciones de coonmutación

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hat{L}_k, \quad \hat{L} \times \hat{L} = i\hat{L}$$

Problema. El trabajo necesario para crear una distribución de un sistema localizado de corrientes eléctricas constantes y campos magnéticos es:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

demuestre que

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

donde $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$ y $\vec{J}$, son la intensidad

magnética, el campo magnético, el potencial vectorial que satisface $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ y la densidad corriente, respectivamente.

Problema. El vector $\vec{D}$ es una combinación de tres vectores no coplanares y no ortogonales

$$\vec{D} = a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}$$

Muestre que los coeficientes están dados por:

$$a = \frac{\vec{D} \cdot \vec{B} \times \vec{C}}{\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}} \quad b = -\frac{\vec{D} \cdot \vec{A} \times \vec{C}}{\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}} \quad c = \frac{\vec{D} \cdot \vec{A} \times \vec{B}}{\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}}$$

Problema. Calculé la integral sobre el círculo $|z| = 2$

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$$

Problema. Resueva a ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} + t^2 x(t) = cos(t)$$