

# Congreso Internacional de Teoría de Operadores en los Espacios de Funciones Analíticas

*Operadores no acotados I*

*Maribel Loaiza Leyva*



Cinvestav

27 de septiembre de 2022

# Dimensión finita

Cada transformación lineal  $T_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  está dada por

$$T_A(x) = Ax,$$

donde  $A$  es la matriz de  $T$  en la base canónica de  $\mathbb{C}^n$ .

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$T_A$  es continua

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

1.  $I : X \rightarrow X$  es acotada.

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

1.  $I : X \rightarrow X$  es acotada.
2. Sea  $x_0 \in [a, b]$  y  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $T(f) = f(x_0)$ .

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

1.  $I : X \rightarrow X$  es acotada.
2. Sea  $x_0 \in [a, b]$  y  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $T(f) = f(x_0)$ .

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

1.  $I : X \rightarrow X$  es acotada.
2. Sea  $x_0 \in [a, b]$  y  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $T(f) = f(x_0)$ .

Un operador lineal es acotado si y solo si

1. Es continuo.

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

1.  $I : X \rightarrow X$  es acotada.
2. Sea  $x_0 \in [a, b]$  y  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $T(f) = f(x_0)$ .

Un operador lineal es acotado si y solo si

1. Es continuo.
2. Es continuo en el punto 0.

## Operadores acotados

Sean  $(X, \| \cdot \|_X)$ ,  $(Y, \| \cdot \|_Y)$  dos espacios normados. Una transformación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se llama acotada si existe  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

1.  $I : X \rightarrow X$  es acotada.
2. Sea  $x_0 \in [a, b]$  y  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $T(f) = f(x_0)$ .

Un operador lineal es acotado si y solo si

1. Es continuo.
2. Es continuo en el punto 0.
3. Es continuo en algún punto.

# Dimensión finita

Cada transformación lineal  $T_A : V \rightarrow W$  está dada por

$$T_A(x) = Ax,$$

donde  $A$  es la matriz de  $T$  en bases dadas de  $V$  y  $W$  respectivamente.

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$T_A$  es acotada.

Si  $\dim V < \infty$  entonces  $T$  es acotado

¿Y si  $\dim W < \infty$ ?

# Conway

It is unfortunate for the world we live in that all of the operators arise naturally are not bounded. But that is indeed the case.

En algunos libros: Operador que no está definido en todo el espacio se llama no acotado.

En algunos libros: Operador que no está definido en todo el espacio se llama no acotado.

En otros:

Un operador es acotado si es acotado en su dominio.

En algunos libros: Operador que no está definido en todo el espacio se llama no acotado.

En otros:

Un operador es acotado si es acotado en su dominio.

En el contexto de espacios de Hilbert  $\mathcal{H}$ :

Un operador acotado siempre se puede extender a  $\mathcal{H}$  de tal forma que dicha extensión sea acotada:

En algunos libros: Operador que no está definido en todo el espacio se llama no acotado.

En otros:

Un operador es acotado si es acotado en su dominio.

En el contexto de espacios de Hilbert  $\mathcal{H}$ :

Un operador acotado siempre se puede extender a  $\mathcal{H}$  de tal forma que dicha extensión sea acotada:

Se extiende continuamente a  $\overline{D(T)}$  y se hace cero en  $D(T)^\perp$

# Ejemplos de operadores no acotados

## Ejemplos de operadores no acotados

1. Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados con bases (normalizadas)  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$  y  $\{b_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$  respectivamente. Tomemos conjuntos numerables de dichas bases  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$T(a_n) = nb_n.$$

## Ejemplos de operadores no acotados

1. Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados con bases (normalizadas)  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$  y  $\{b_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$  respectivamente. Tomemos conjuntos numerables de dichas bases  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$T(a_n) = nb_n.$$

2.  $\mathcal{P}$  = polinomios como subespacio de  $C[0, 1]$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$

$$T(P) = P'$$

$$\|T(x^n)\|_\infty = n.$$

## Ejemplos de operadores no acotados

1. Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados con bases (normalizadas)  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$  y  $\{b_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$  respectivamente. Tomemos conjuntos numerables de dichas bases  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$T(a_n) = nb_n.$$

2.  $\mathcal{P}$  = polinomios como subespacio de  $C[0, 1]$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$

$$T(P) = P'$$

$$\|T(x^n)\|_\infty = n.$$

3.  $C'[0, 1]$ ,  $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$$\left\| T\left(\frac{x^n}{1+n}\right) \right\| = \frac{n^2}{1+n}.$$

# Dominios de operadores no acotados

Un operador puede estar definido solamente en un subespacio de un espacio normado. Las propiedades del operador dependen del dominio. Por ejemplo:  $\mathcal{P}_n$ =Polinomios de grado menor o igual que  $n$  visto como subespacio de  $C[0, 1]$

$$P \mapsto P'$$

es acotado. Pero si se extiende a todos los polinomios ya no lo es.

# Suma y composición de operadores no acotados: cuidado con los dominios

$$D(S + T) = D(S) \cap D(T)$$

$$D(ST) = ?$$

# Suma y composición de operadores no acotados: cuidado con los dominios

$$D(S + T) = D(S) \cap D(T)$$

$$D(ST) = ? \quad D(ST) = T^{-1}(D(S))$$

## Cosas que pasan

$$(T_1 + T_2)T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$$

$$T_1T_2 + T_1T_3 \subset T_1(T_2 + T_3)$$

## Cosas que pasan

$$(T_1 + T_2)T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$$

$$T_1T_2 + T_1T_3 \subset T_1(T_2 + T_3)$$

$$V = C[0, 1], T_1 = \frac{\partial}{\partial x}, T_2 = -\frac{\partial}{\partial x}, T_3 = \frac{\partial}{\partial x}$$

## El operador de multiplicación en $\ell^2$

$$T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1, 2a_2, \dots, na_n, \dots).$$

## El operador de multiplicación en $\ell^2$

$$T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1, 2a_2, \dots, na_n, \dots).$$

$$D(T) = \{(a_n) : (na_n) \in \ell^2\}$$

## El operador de multiplicación en $\ell^2$

$$T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1, 2a_2, \dots, na_n, \dots).$$

$$D(T) = \{(a_n) : (na_n) \in \ell^2\}$$

y es un operador de multiplicación por  $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$ .

$$a = (a_n) \mapsto M_a : D(M_a) \rightarrow \ell^2$$

## El operador de multiplicación en $\ell^2$

$$T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1, 2a_2, \dots, na_n, \dots).$$

$$D(T) = \{(a_n) : (na_n) \in \ell^2\}$$

y es un operador de multiplicación por  $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$ .

$$a = (a_n) \mapsto M_a : D(M_a) \rightarrow \ell^2$$

Sucesión  $b = (b_n)$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots).$$

## El operador de multiplicación en $\ell^2$

$$T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1, 2a_2, \dots, na_n, \dots).$$

$$D(T) = \{(a_n) : (na_n) \in \ell^2\}$$

y es un operador de multiplicación por  $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$ .

$$a = (a_n) \mapsto M_a : D(M_a) \rightarrow \ell^2$$

Sucesión  $b = (b_n)$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots).$$

$$D(M_b) = \{(a_n) : (a_n b_n) \in \ell^2\}.$$

## El operador de multiplicación en $\ell^2$

$$T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1, 2a_2, \dots, na_n, \dots).$$

$$D(T) = \{(a_n) : (na_n) \in \ell^2\}$$

y es un operador de multiplicación por  $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$ .

$$a = (a_n) \mapsto M_a : D(M_a) \rightarrow \ell^2$$

Sucesión  $b = (b_n)$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots).$$

$$D(M_b) = \{(a_n) : (a_n b_n) \in \ell^2\}.$$

¿Qué se puede decir sobre  $D(M_b)$ ?

## Operadores cerrados $T : X \rightarrow Y$

Un operador  $T$  es cerrado si su gráfica es cerrada en  $X \times Y$ .

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\}$$

Equivalentemente  $T$  es cerrado si su dominio  $\text{Dom}(T)$  es cerrado con respecto a la norma

$$\|x\|_2^2 = \|x\|^2 + \|T(x)\|^2$$

$\| \cdot \|$

$\text{Dom}(T)$

$\| \cdot \|_2$

# Equivalencias: Kreysig, Cap. 10

## Teorema

*Sea  $T : D(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Entonces*

# Equivalencias: Kreysig, Cap. 10

## Teorema

Sea  $T : D(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Entonces

1.  $T$  es cerrado si y solamente si

$$x_n \rightarrow x \text{ con } x_n \in D(T) \text{ y } T(x_n) \rightarrow y$$

implican que  $x \in D(T)$  y  $y = T(x)$ .

# Equivalencias: Kreysig, Cap. 10

## Teorema

Sea  $T : D(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Entonces

1.  $T$  es cerrado si y solamente si

$$x_n \rightarrow x \text{ con } x_n \in D(T) \text{ y } T(x_n) \rightarrow y$$

implican que  $x \in D(T)$  y  $y = T(x)$ .

2. Si  $T$  es cerrado y  $D(T)$  es cerrado entonces  $T$  es acotado.

# Equivalencias: Kreysig, Cap. 10

## Teorema

Sea  $T : D(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  con  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Entonces

1.  $T$  es cerrado si y solamente si

$$x_n \rightarrow x \text{ con } x_n \in D(T) \text{ y } T(x_n) \rightarrow y$$

implican que  $x \in D(T)$  y  $y = T(x)$ .

2. Si  $T$  es cerrado y  $D(T)$  es cerrado entonces  $T$  es acotado.
3. Sea  $T$  acotado. Entonces  $T$  es cerrado si y solamente si  $D(T)$  es cerrado.

# Operadores cerrables, cerradura de operadores

Sea  $S : D(S) \in \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . El operador  $T$  se llama extensión de  $S$  si  $D(S) \subset D(T)$  y  $T|_{D(S)} = S$ . Se denota

$$S \subset T$$

Un operador  $T$  se llama cerrable si tiene una extensión lineal cerrada. Si existe una extensión lineal cerrada minimal, ésta se llama la Cerradura de  $T$  y se denota por  $\overline{T}$ .

**Ejemplo:** Sea  $T : C_{00} \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dado por

$$T(a_n) = (na_n).$$

# Operadores cerrables, cerradura de operadores

Sea  $S : D(S) \in \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . El operador  $T$  se llama extensión de  $S$  si  $D(S) \subset D(T)$  y  $T|_{D(S)} = S$ . Se denota

$$S \subset T$$

Un operador  $T$  se llama cerrable si tiene una extensión lineal cerrada. Si existe una extensión lineal cerrada minimal, ésta se llama la Cerradura de  $T$  y se denota por  $\overline{T}$ .

**Ejemplo:** Sea  $T : C_{00} \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dado por

$$T(a_n) = (na_n).$$

1. ¿Es  $T$  cerrado?

# Operadores cerrables, cerradura de operadores

Sea  $S : D(S) \in \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . El operador  $T$  se llama extensión de  $S$  si  $D(S) \subset D(T)$  y  $T|_{D(S)} = S$ . Se denota

$$S \subset T$$

Un operador  $T$  se llama cerrable si tiene una extensión lineal cerrada. Si existe una extensión lineal cerrada minimal, ésta se llama la Cerradura de  $T$  y se denota por  $\overline{T}$ .

**Ejemplo:** Sea  $T : C_{00} \subset \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dado por

$$T(a_n) = (na_n).$$

1. ¿Es  $T$  cerrado?
2. Si no es cerrado ¿tiene alguna extensión cerrada?

¿Cuándo un conjunto  $G$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$  es la gráfica de un operador  $T$  de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{K}$ ?

1. Como la gráfica de un operador es espacio vectorial entonces  $G$  debe de ser un espacio vectorial.

¿Cuándo un conjunto  $G$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$  es la gráfica de un operador  $T$  de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{K}$ ?

1. Como la gráfica de un operador es espacio vectorial entonces  $G$  debe de ser un espacio vectorial.
2. Si  $(0, k) \in G(T) \rightarrow k = 0$ .

¿Cuándo un conjunto  $G$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$  es la gráfica de un operador  $T$  de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{K}$ ?

1. Como la gráfica de un operador es espacio vectorial entonces  $G$  debe de ser un espacio vectorial.
2. Si  $(0, k) \in G(T) \rightarrow k = 0$ .

### Teorema

*Si  $G$  cumple los dos puntos anteriores entonces  $G$  es la gráfica de un operador.*

¿Cuándo un conjunto  $G$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$  es la gráfica de un operador  $T$  de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{K}$ ?

1. Como la gráfica de un operador es espacio vectorial entonces  $G$  debe de ser un espacio vectorial.
2. Si  $(0, k) \in G(T) \rightarrow k = 0$ .

### Teorema

*Si  $G$  cumple los dos puntos anteriores entonces  $G$  es la gráfica de un operador.*

## ¿Cuándo un conjunto $G$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ es la gráfica de un operador $T$ de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ ?

1. Como la gráfica de un operador es espacio vectorial entonces  $G$  debe de ser un espacio vectorial.
2. Si  $(0, k) \in G(T) \rightarrow k = 0$ .

### Teorema

*Si  $G$  cumple los dos puntos anteriores entonces  $G$  es la gráfica de un operador.*

**Dem:** Sea

$$\{h \in \mathcal{H} : \text{existe } k \in \mathcal{K} \text{ con } (h, k) \in G.$$

Si  $(h, k_1)$  y  $(h, k_2)$  pertenecen a  $G \rightarrow (0, k_1 - k_2) \in G \rightarrow k_1 = k_2$ . Esto es, para cada  $h \in D$  existe un único  $k \in \mathcal{K}$  tal que  $(h, k) \in G$ . Definimos

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}, Ah = k$$

$$G = G(A).$$

## Teorema

*Un operador  $T$  es cerrable si y solamente si  $\overline{G(T)}$  es la gráfica de un operador.*

## Teorema

*Un operador  $T$  es cerrable si y solamente si  $\overline{G(T)}$  es la gráfica de un operador.*

## Teorema

*Un operador  $T$  es cerrable si y solamente si  $\overline{G(T)}$  es la gráfica de un operador.*

**Dem:** Si  $\overline{G(T)}$  es la gráfica de un operador  $A$  entonces  $A$  es cerrado y es extensión de  $T$  por lo que  $T$  es cerrable.

Si  $T$  es cerrable entonces tiene una extensión cerrada  $A$ . Si  $(0, k) \in \overline{G(T)}$  entonces  $(0, k) \in G(A) \rightarrow k = 0 \rightarrow \overline{G(T)}$  es la gráfica de un operador.

Si  $T$  es cerrable, el operador que tiene como gráfica  $\overline{G(T)}$  es la cerradura de  $T$ .

## El operador de Multiplicación

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $a$  una función medible. Definimos

$$M_a : \text{Dom}(M_a) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$f \mapsto af$$

## El operador de Multiplicación

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $a$  una función medible. Definimos

$$M_a : \text{Dom}(M_a) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$f \mapsto af$$

$$\text{Dom}(M_a) = \{f \in L^2(\Omega) : af \in L^2(\Omega)\}$$

## El operador de Multiplicación

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $a$  una función medible. Definimos

$$M_a : \text{Dom}(M_a) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$f \mapsto af$$

$$\text{Dom}(M_a) = \{f \in L^2(\Omega) : af \in L^2(\Omega)\}$$

$$\text{Dom}(M_a) = \left\{ \frac{f}{1 + \|a\|} : f \in L^2(\Omega) \right\}$$

## El operador de Multiplicación

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $a$  una función medible. Definimos

$$M_a : \text{Dom}(M_a) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$f \mapsto af$$

$$\text{Dom}(M_a) = \{f \in L^2(\Omega) : af \in L^2(\Omega)\}$$

$$\text{Dom}(M_a) = \left\{ \frac{f}{1 + \|a\|} : f \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\overline{\text{Dom}(M_a)} = L^2(\Omega)$$

## El operador de Multiplicación

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $a$  una función medible. Definimos

$$M_a : \text{Dom}(M_a) \rightarrow L^2(\Omega)$$

$$f \mapsto af$$

$$\text{Dom}(M_a) = \{f \in L^2(\Omega) : af \in L^2(\Omega)\}$$

$$\text{Dom}(M_a) = \left\{ \frac{f}{1 + \|a\|} : f \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\overline{\text{Dom}(M_a)} = L^2(\Omega)$$

Sea  $h \perp \overline{\text{Dom}(M_a)}$ , entonces para toda  $f \in L^2(\Omega)$

$$0 = \left\langle \frac{f}{1 + \|a\|}, h \right\rangle = \left\langle f, \frac{h}{1 + \|a\|} \right\rangle$$

# Propiedades del operador de multiplicación

1. Si  $a$  es acotada entonces  $M_a$  es acotado y  $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ .

# Propiedades del operador de multiplicación

1. Si  $a$  es acotada entonces  $M_a$  es acotado y  $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ .
2. Si  $a$  es acotado  $M_a^* = M_{\bar{a}}$ .

# Propiedades del operador de multiplicación

1. Si  $a$  es acotada entonces  $M_a$  es acotado y  $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ .
2. Si  $a$  es acotado  $M_a^* = M_{\bar{a}}$ .

# Propiedades del operador de multiplicación

1. Si  $a$  es acotada entonces  $M_a$  es acotado y  $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ .
2. Si  $a$  es acotado  $M_a^* = M_{\bar{a}}$ .

El operador de multiplicación en  $L^2(-\infty, \infty) : M_x$

$$D(M_x) = \{f \in L^2(-\infty, \infty) : xf(x) \in L^2(-\infty, \infty)\}.$$

$$f \mapsto xf(x)$$

Propiedades:

- $D(M_x) \neq L^2(-\infty, \infty)$ .

# Propiedades del operador de multiplicación

1. Si  $a$  es acotada entonces  $M_a$  es acotado y  $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ .
2. Si  $a$  es acotado  $M_a^* = M_{\bar{a}}$ .

El operador de multiplicación en  $L^2(-\infty, \infty) : M_x$

$$D(M_x) = \{f \in L^2(-\infty, \infty) : xf(x) \in L^2(-\infty, \infty)\}.$$

$$f \mapsto xf(x)$$

Propiedades:

- $D(M_x) \neq L^2(-\infty, \infty)$ .
- $D(M_x)$  es denso en  $L^2(-\infty, \infty)$ .

# Propiedades del operador de multiplicación

1. Si  $a$  es acotada entonces  $M_a$  es acotado y  $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ .
2. Si  $a$  es acotado  $M_a^* = M_{\bar{a}}$ .

El operador de multiplicación en  $L^2(-\infty, \infty) : M_x$

$$D(M_x) = \{f \in L^2(-\infty, \infty) : xf(x) \in L^2(-\infty, \infty)\}.$$

$$f \mapsto xf(x)$$

Propiedades:

- $D(M_x) \neq L^2(-\infty, \infty)$ .
- $D(M_x)$  es denso en  $L^2(-\infty, \infty)$ .
- $T$  es simétrico:  $\langle M_x(f), g \rangle = \langle f, M_x(g) \rangle, f, g \in D(M_x)$ .

## El operador de multiplicación no es acotado

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x < n+1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\|T_x(f_n)\|^2 = \int_n^{n+1} t^2 dt > n^2$$

# Teorema de Hellinger-Toeplitz

$T$  es autoadjunto si

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}$$

## Teorema

*Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y cumple la ecuación anterior entonces  $T$  es acotado.*

# Teorema de Hellinger-Toeplitz

$T$  es autoadjunto si

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}$$

## Teorema

*Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y cumple la ecuación anterior entonces  $T$  es acotado.*

## Teorema de Hellinger-Toeplitz

$T$  es autoadjunto si

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}$$

### Teorema

*Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y cumple la ecuación anterior entonces  $T$  es acotado.*

**Demostración:** Supongamos que  $T$  no es acotado y que cumple la ecuación anterior.

## Teorema de Hellinger-Toeplitz

$T$  es autoadjunto si

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}$$

### Teorema

*Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y cumple la ecuación anterior entonces  $T$  es acotado.*

**Demostración:** Supongamos que  $T$  no es acotado y que cumple la ecuación anterior. Entonces existe una sucesión  $(y_n)$  en  $\mathcal{H}$  con  $\|y_n\| = 1$  y

$$\|T(y_n)\| \rightarrow \infty.$$

Defina el funcional

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle$$

## Teorema de Hellinger-Toeplitz

$T$  es autoadjunto si

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}$$

### Teorema

*Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y cumple la ecuación anterior entonces  $T$  es acotado.*

**Demostración:** Supongamos que  $T$  no es acotado y que cumple la ecuación anterior. Entonces existe una sucesión  $(y_n)$  en  $\mathcal{H}$  con  $\|y_n\| = 1$  y

$$\|T(y_n)\| \rightarrow \infty.$$

Defina el funcional

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle = \langle x, T(y_n) \rangle$$

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \|T(y_n)\|$$

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \|T(y_n)\|$$

entonces  $f_n$  es acotado para todo  $n$ .

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \|T(y_n)\|$$

entonces  $f_n$  es acotado para todo  $n$ .

Si fijamos  $x$ :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |\langle T(x), y_n \rangle| \\ &\leq \|T(x)\| \|y_n\| = \|T(x)\| \end{aligned}$$

Entonces la sucesión  $(f_n(x))$  es acotada.

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \|T(y_n)\|$$

entonces  $f_n$  es acotado para todo  $n$ .

Si fijamos  $x$ :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |\langle T(x), y_n \rangle| \\ &\leq \|T(x)\| \|y_n\| = \|T(x)\| \end{aligned}$$

Entonces la sucesión  $(f_n(x))$  es acotada.

PAU:

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \|T(y_n)\|$$

entonces  $f_n$  es acotado para todo  $n$ .

Si fijamos  $x$ :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |\langle T(x), y_n \rangle| \\ &\leq \|T(x)\| \|y_n\| = \|T(x)\| \end{aligned}$$

Entonces la sucesión  $(f_n(x))$  es acotada.

**PAU:** Si  $T_n$  es una sucesión de operadores lineales acotados  $T_n : X \rightarrow Y$  de un espacio de Banach  $X$  en un espacio normado  $Y$  con  $(\|T_n(x)\|)$  acotada para todo  $x$  entonces  $(\|T_n\|)$  es acotada.

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle$$

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle = \langle x, T(y_n) \rangle$$

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle = \langle x, T(y_n) \rangle$$

Entonces

$$\|f_n\| \leq K \text{ para alguna constante } K.$$

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle = \langle x, T(y_n) \rangle$$

Entonces

$$\|f_n\| \leq K \text{ para alguna constante } K.$$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\| \leq K \|x\|$$

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle = \langle x, T(y_n) \rangle$$

Entonces

$$\|f_n\| \leq K \text{ para alguna constante } K.$$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\| \leq K \|x\|$$

$$|f_n(T(y_n))| \leq \|f_n\| \|T(y_n)\| \leq K \|x\|$$

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle = \langle x, T(y_n) \rangle$$

Entonces

$$\|f_n\| \leq K \text{ para alguna constante } K.$$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\| \leq K \|x\|$$

$$|f_n(T(y_n))| \leq \|f_n\| \|T(y_n)\| \leq K \|x\|$$

$$\|T(y_n)\|^2 \leq K \|T(y_n)\|$$

$$f_n(x) = \langle T(x), y_n \rangle = \langle x, T(y_n) \rangle$$

Entonces

$$\|f_n\| \leq K \text{ para alguna constante } K.$$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\| \leq K \|x\|$$

$$|f_n(T(y_n))| \leq \|f_n\| \|T(y_n)\| \leq K \|x\|$$

$$\|T(y_n)\|^2 \leq K \|T(y_n)\|$$

$$K \geq \|T(y_n)\|$$

## Teorema

*Teorema de Hellinger Toeplitz: Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y es autoadjunto entonces  $T$  es acotado.*

## Teorema

*Teorema de Hellinger Toeplitz: Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y es autoadjunto entonces  $T$  es acotado.*

## Teorema

*Teorema de Hellinger Toeplitz: Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y es autoadjunto entonces  $T$  es acotado.*

El operador de multiplicación en  $L^2(-\infty, \infty) : M_x$

$$D(M_x) = \{f \in L^2(-\infty, \infty) : xf(x) \in L^2(-\infty, \infty)\}.$$

$$f \mapsto xf(x)$$

Propiedades:

- $D(M_x) \neq L^2(-\infty, \infty)$ .

## Teorema

*Teorema de Hellinger Toeplitz: Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y es autoadjunto entonces  $T$  es acotado.*

El operador de multiplicación en  $L^2(-\infty, \infty) : M_x$

$$D(M_x) = \{f \in L^2(-\infty, \infty) : xf(x) \in L^2(-\infty, \infty)\}.$$

$$f \mapsto xf(x)$$

Propiedades:

- $D(M_x) \neq L^2(-\infty, \infty)$ .
- $D(M_x)$  es denso en  $L^2(-\infty, \infty)$ .

## Teorema

*Teorema de Hellinger Toeplitz: Si un operador lineal  $T$  está definido en todo  $\mathcal{H}$  y es autoadjunto entonces  $T$  es acotado.*

El operador de multiplicación en  $L^2(-\infty, \infty) : M_x$

$$D(M_x) = \{f \in L^2(-\infty, \infty) : xf(x) \in L^2(-\infty, \infty)\}.$$

$$f \mapsto xf(x)$$

Propiedades:

- $D(M_x) \neq L^2(-\infty, \infty)$ .
- $D(M_x)$  es denso en  $L^2(-\infty, \infty)$ .
- $T$  es simétrico:  $\langle M_x(f), g \rangle = \langle f, M_x(g) \rangle, f, g \in D(M_x)$ .