Modelo LMG Pateado

Jesús Alfonso Segura Landa

Facultad de Física. Universidad Veracruzana.

24 de enero de 2023

Conceptos preliminares

Vamos a estudiar la versión pateada del modelo de Lipkin-Meshkov-Glick con Hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \hat{J}_z + \frac{\gamma_x}{2J-1}\hat{J}_x^2 + \frac{\gamma_y}{2J-1}\hat{J}_y^2. \tag{1}$$

El Hamiltoniano total se obtiene añadiendo el término pateado que denotaremos como H_k

$$\hat{H}_k = \epsilon \hat{J}_j \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) \tag{2}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_k \tag{3}$$

Evolución temporal

El operador evolución para un modelo pateado es conocido como operador de Floquet. Es un operador de evolución *discreto*, en el sentido de que indica la evolución de un estado a cada n-patadas.

$$\hat{F} = \exp\left(-i\tau \hat{H}_0\right) \cdot \exp\left(-i\hat{H}_k\right), \tag{4}$$

Para $\epsilon \approx 0$, muchas de las propiedades de H_0 se heredan a F. Los eigenvalores del operador de Floquet son conocidos como *cuasienergías*

$$\hat{F}\left|f_k\right\rangle = e^{-i\varphi_k}\left|f_k\right\rangle, \quad \varphi_k \rightarrow \text{cuasienergías.} \tag{5}$$

Las cuasienergías están asociadas a la cantidad e^{-iE_k}, con E_k las energías del sistema H_0.

Una cantidad de interés serán además los valores de expectación:

$$\langle f_k|\hat{H}_0|f_k\rangle \, , \quad \hat{F}\,|f_k\rangle = e^{-i\varphi}\,|f_k\rangle \, , \tag{6}$$

que está asociada a la energía del sistema E_k. Además, la entropía de entrelazamiento:

$$EE_A = -\,\mathrm{Tr}[\rho_A \log(\rho_A)], \quad \rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}). \tag{7}$$

Hamiltoniano clásico

En términos de los estados coherentes

$$|\alpha\rangle = (1+|\alpha|^2)^{-j} \sum_{m=-j}^{j} \alpha^{j-m} \binom{2j}{j+m}^{1/2} |jm\rangle\,, \quad \alpha = e^{-i\phi}\tan\theta/2, \tag{8}$$

podemos encontrar la aproximación semi-clásica

$$\langle\alpha|\hat{H}_0|\alpha\rangle = J\left[z + \frac{1-z^2}{2}(\gamma_x\cos^2\phi + \gamma_y\sin^2\phi) + C\right], \quad C = \frac{\gamma_x+\gamma_y}{2(2j+1)}. \tag{9}$$

Clásicamente las patadas pueden expresarse como

$$\langle\alpha|J_x|\alpha\rangle = \sqrt{1-z^2}\cos\phi, \quad \langle\alpha|J_z|\alpha\rangle = z. \tag{10}$$

Análisis clásico

En términos de las variables canónicas

$$Q = \sqrt{2(1+z)}\cos\phi, \qquad P = -\sqrt{2(1+z)}\sin\phi \tag{11}$$

$$z = \frac{Q^2+P^2}{2} - 1, \qquad \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right) \tag{12}$$

El Hamiltoniano puede expresarse como

$$H = \frac{Q^2+P^2}{2}\left(1 - \frac{1}{4}(\gamma_x Q^2 + \gamma_y P^2)\right) + \frac{1}{2}(\gamma_x Q^2 + \gamma_y P^2) + (C-1). \tag{13}$$

Exponentes de Lyapunov

Para calcular los exponentes de Lyapunov se resuelven simultáneamente las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{14}$$

y la ecuación variacional[1]:

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(x_0, t) = D_x f(\mathbf{x}(x_0, t)) \cdot \mathbf{\Phi}(x_0, t), \quad \mathbf{\Phi}(x_0, t = t_0) \equiv \mathbb{I}, \tag{15}$$

donde $D_x f(\mathbf{x}(t))$ ies la matriz Jacobiana de (14).

[1] Parker and Chua. Practical Numerical algorithms for Chaotic systems.

Conceptos preliminares

La condición de cruzamientos reales y evitados [2]

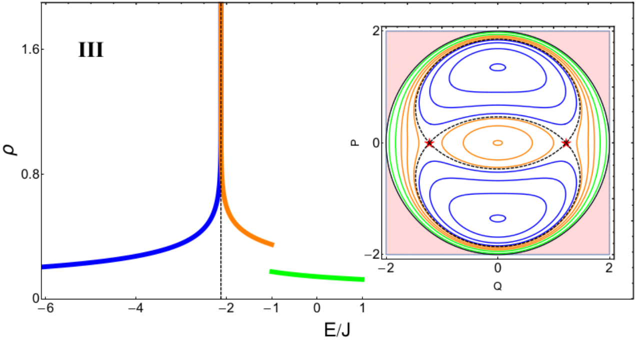
$$\gamma_x \gamma_y = \left(\frac{2J-1}{2J-N} \right)^2 , \tag{16}$$

donde N es un número entero dentro del intervalo $(0, 2J)$. Si fijamos $\gamma_x = 3\gamma_y$ entonces la ecuación de arriba se convierte

$$\gamma_x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2J-1}{2J-N} \right) . \tag{17}$$

Para N par tendremos cruces evitados, mientras que para N impar cruces reales. Valores fraccionarios no arrojarán ningun tipo de cruzamiento.

[2] Nader D., and Lerma S. and Gónzales-Rodríguez (2021). Avoided crossings and dynamical tunneling close to excited-state quantum phase transitions



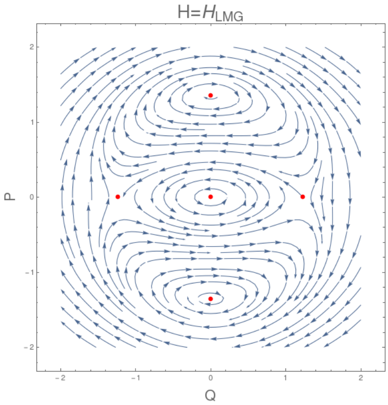


Figura 1: Densidad de estados cláica (izquierda) y trayectorias clásicas (derecha). Imágen recuperada del trabajo de Nader et. al.

Entropía de Entrelazamiento

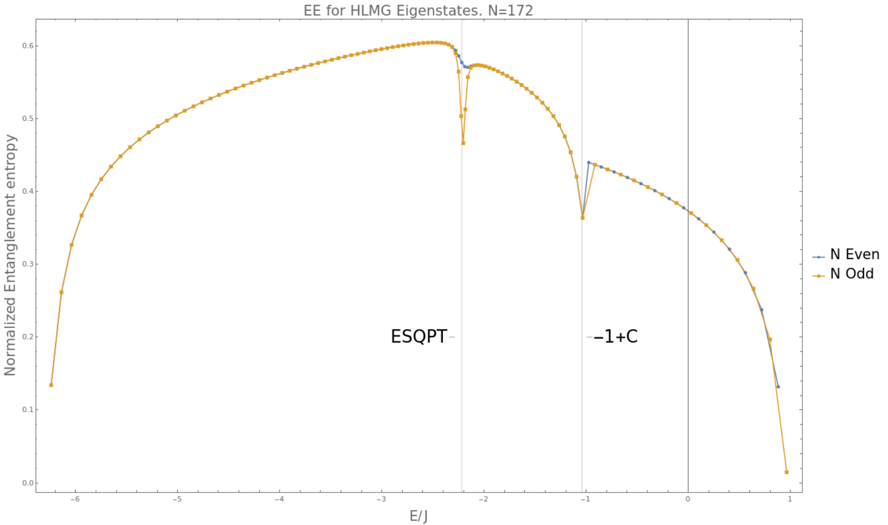


Figura 2: Entropía de entrelazamiento para N=172 (cruce evitado).

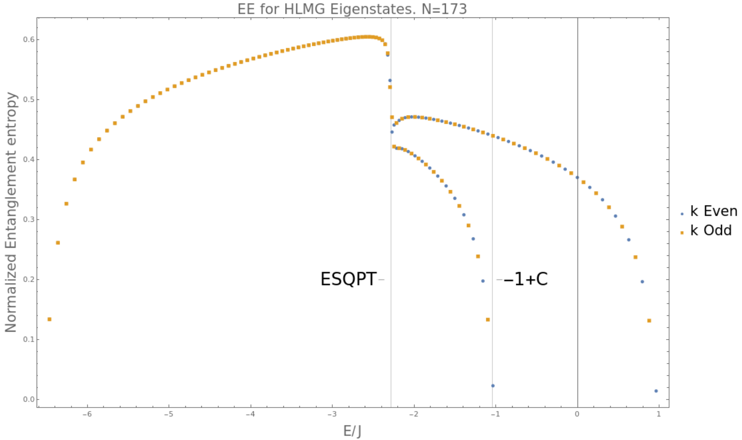
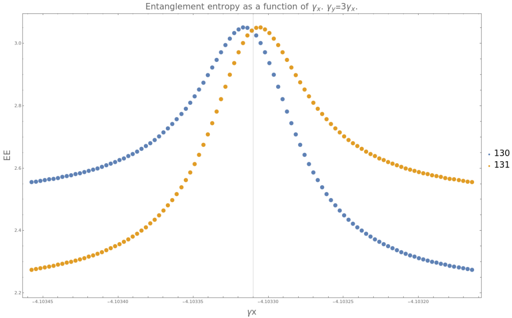
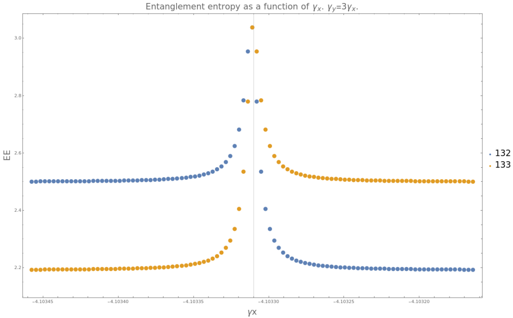


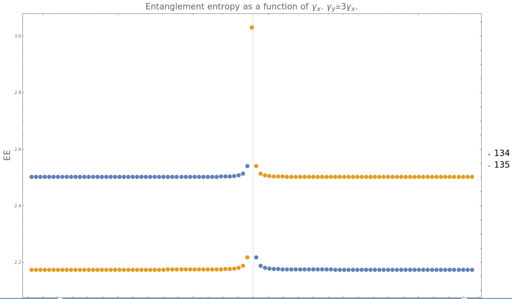
Figura 3: Entropía de entrelazamiento para N=173 (cruce real).



Entanglement entropy as a function of γ_x. γ_y=3γ_x.
EE
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
−4.10345
−4.10340
−4.10335
−4.10330
−4.10325
−4.10320
γx
130
131



Entanglement entropy as a function of γ_x. γ_y=3γ_x.
EE
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
−4.10345
−4.10340
−4.10335
−4.10330
−4.10325
−4.10320
γx
132
133



Entanglement entropy as a function of γ_x. γ_y=3γ_x.
EE
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
134
135

Análisis pateado

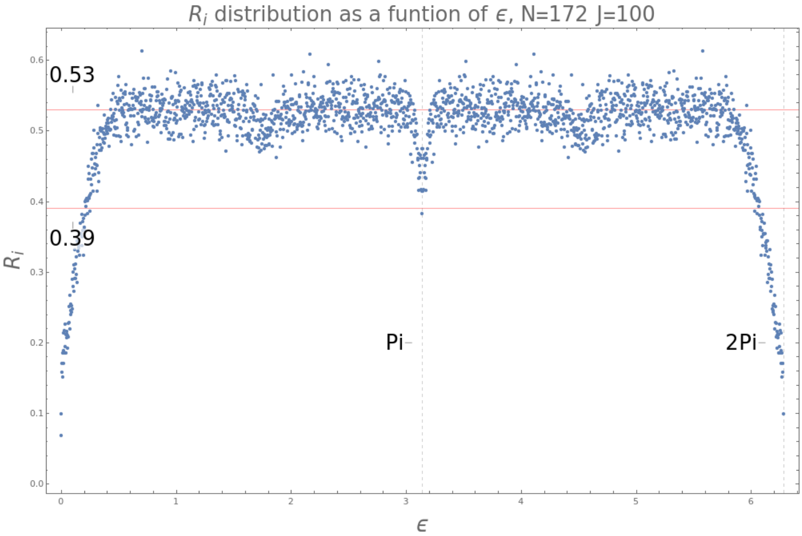
Distribución de espaciado de niveles

Una cantidad útil para determinar la transición al caos de un sistema cuántico es

$$r_n = \mathrm{Min}\left(\frac{\varphi_{n+2}-\varphi_{n+1}}{\varphi_{n+1}-\varphi_n}, \frac{\varphi_{n+1}-\varphi_n}{\varphi_{n+2}-\varphi_{n+1}}\right). \tag{18}$$

donde φ son las cuasienergías. Empíricamente se sabe que si este valor tiene a aproximadamente 0,53, el sistema será caótico. Si tiende a 0,39 será regular.

Distribución de espaciado de niveles



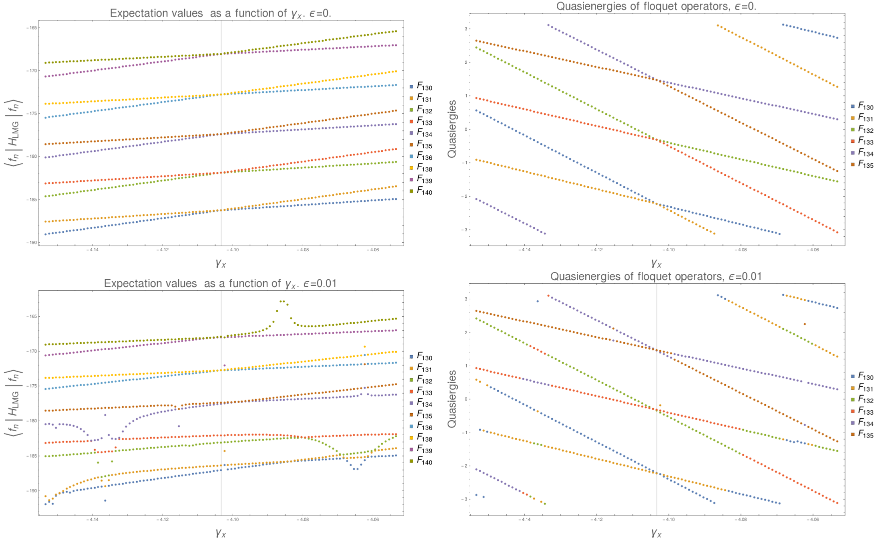


Figura 6: Valores de expectación (izquierda) y cuasienergías (derecha), para una patada en J_x.

Cantidades útiles a observar:

- IPR (para los eigenvectores del operador de Floquet en términos de la base de $\hat{H}_0$)

$$H\left|E_n\right\rangle = E_n\left|E_n\right\rangle, \qquad \left|f_n\right\rangle = \sum_k c_k \left|E_n\right\rangle, \qquad \mathrm{IPR} = \sum_k |c_k|^4 \tag{19}$$

- Entropías de Rényi (para estados coherentes en la base propia de $\hat{F}$):

$$S_q = \frac{1}{1-q}\ln\left(\sum_n |c_n|^{2q}\right) \tag{20}$$

1. Para q=1, S_1 recuperamos la entropía de Shannon.
2. Para q=2, S_2 recuperamos el logarítmo de la razón de participación.

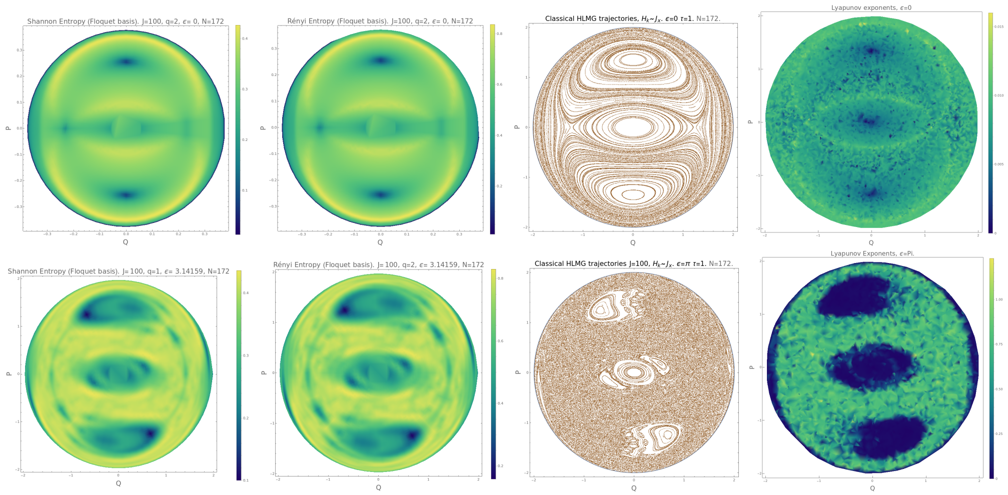


Figura 7: Correspondencia clásico-cuántica .Entropía de Shannon ($q = 1$), Entropía de Rényi ($q = 2$), sección de Poincaré y exponentes de Lyapunov.

IPR y rompimiento de la superposición (dirección Jz)

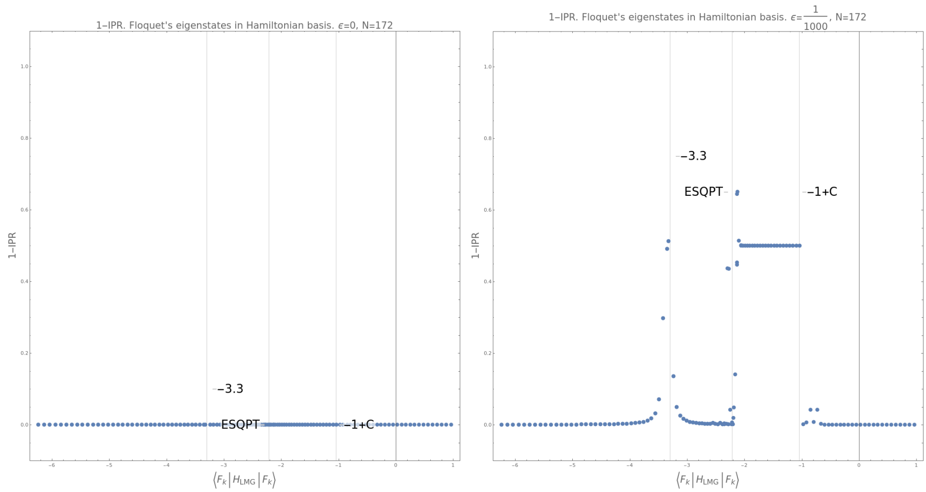
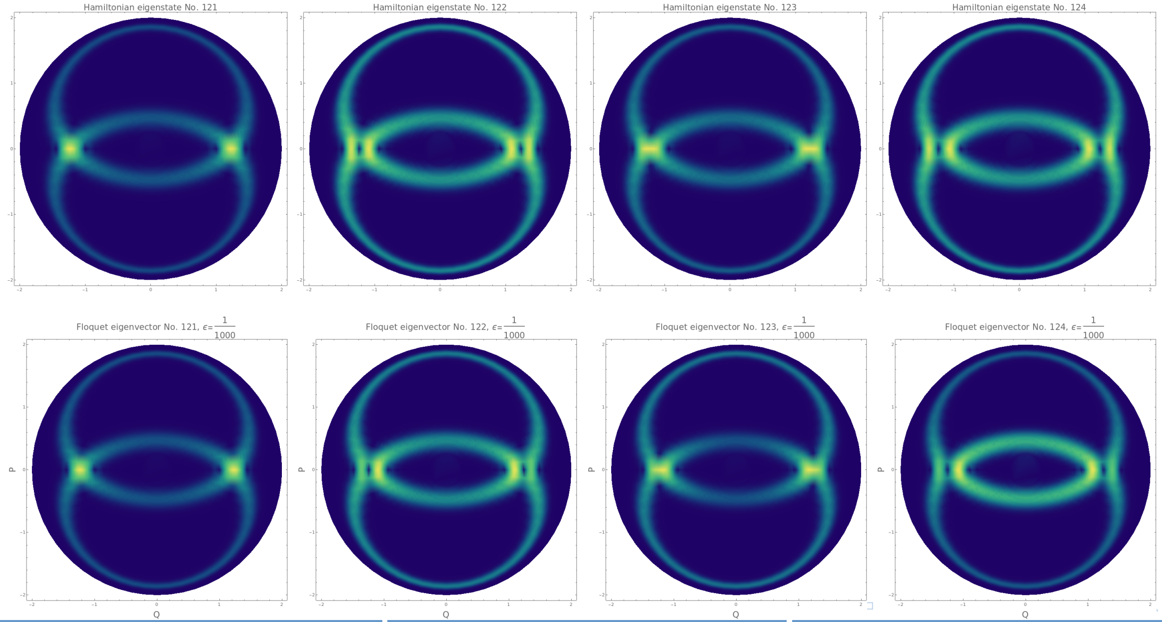
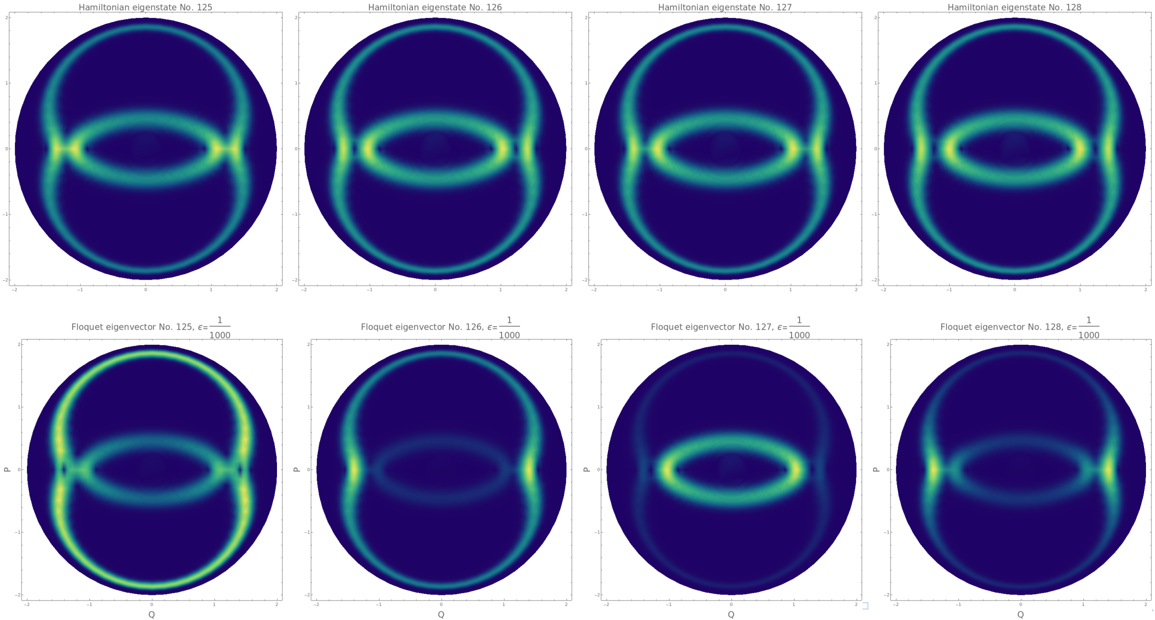
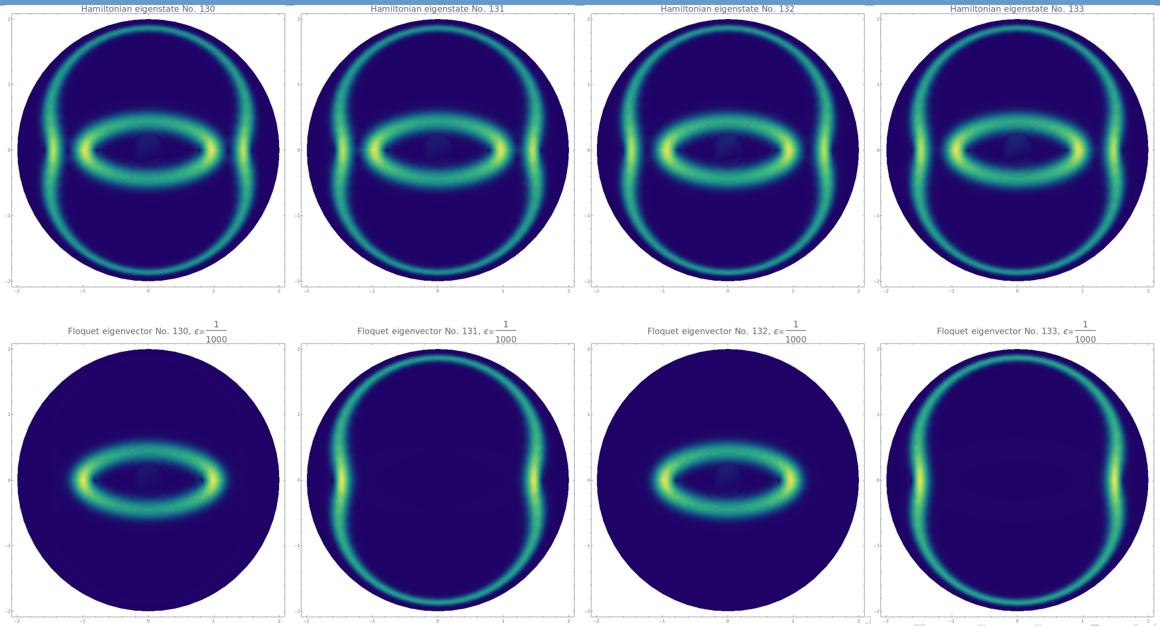


Figura 8: IPR para los eigenvectores de Floquet en la base $\hat{H}_0$, $\epsilon = 0$ (izquierda) y $\epsilon = \frac{\pi}{10000}$ (derecha).


Hamiltonian eigenstate No. 121
Hamiltonian eigenstate No. 122
Hamiltonian eigenstate No. 123
Hamiltonian eigenstate No. 124
Floquet eigenvector No. 121, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 122, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 123, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 124, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
P
Q

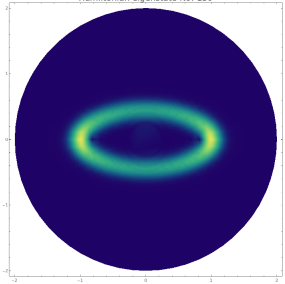


Hamiltonian eigenstate No. 125
Hamiltonian eigenstate No. 126
Hamiltonian eigenstate No. 127
Hamiltonian eigenstate No. 128
Floquet eigenvector No. 125, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 126, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 127, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 128, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
P
Q

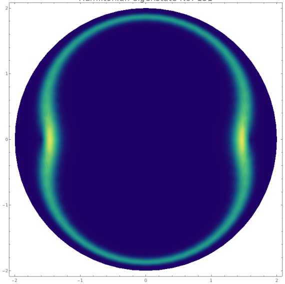

Hamiltonian eigenstate No. 130
Hamiltonian eigenstate No. 131
Hamiltonian eigenstate No. 132
Hamiltonian eigenstate No. 133
Floquet eigenvector No. 130, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 131, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 132, $\epsilon=\frac{1}{1000}$
Floquet eigenvector No. 133, $\epsilon=\frac{1}{1000}$

Funciones de Husimi en la condición de cruce real

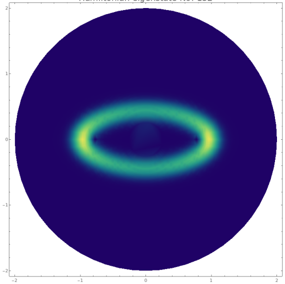
Hamiltonian eigenstate No. 130



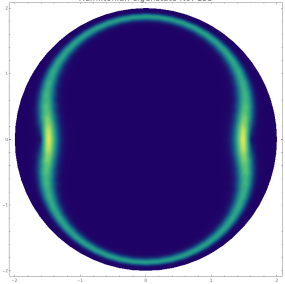
Hamiltonian eigenstate No. 131



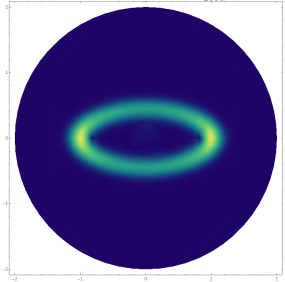
Hamiltonian eigenstate No. 132



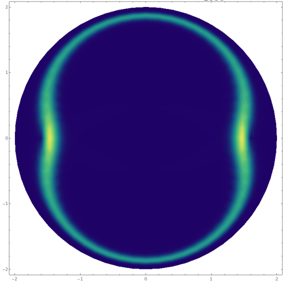
Hamiltonian eigenstate No. 133



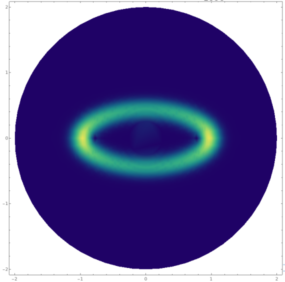
Floquet eigenvector No. 130, $\epsilon=\frac{1}{1000}$



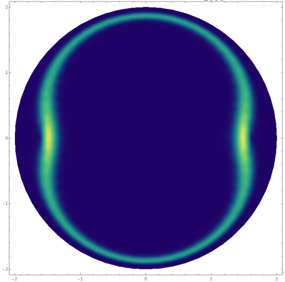
Floquet eigenvector No. 131, $\epsilon=\frac{1}{1000}$



Floquet eigenvector No. 132, $\epsilon=\frac{1}{1000}$



Floquet eigenvector No. 133, $\epsilon=\frac{1}{1000}$



Fenómeno de resonancias

Podemos encontrar los periodos de las trayectorias clásicas en el espacio fase fijando [3]

$$\rho_{\rm sc}(E) = \frac{1}{2\pi}\int_{\phi\in\Phi_\epsilon} \frac{d\phi}{\sqrt{1-A(\phi)[2\epsilon - A(\phi)]}} \times \int_{-1}^{1} dz[\delta(z-z_+)+\delta(z-z_-)],$$

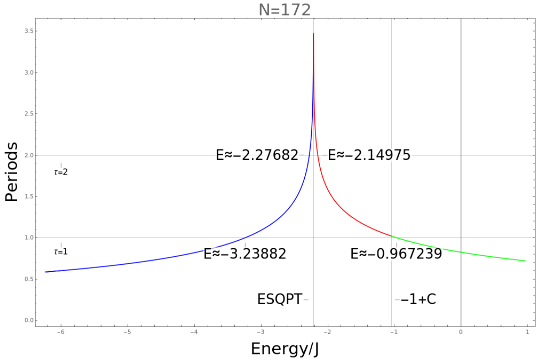
con

$$A(\phi) = \gamma_x \cos^2\phi + \gamma_y \sin^2\phi, \quad z_\pm = \frac{1}{A(\phi)} \pm \frac{1}{A(\phi)}\sqrt{1-A(\phi)[2\varepsilon - A(\phi)]}. \tag{21}$$

Para $\epsilon << 1$, puede visualizarse un fenómeno interesante. Ocurren cuando el periodo de las trayectorias clásicas del LMG y el periodo de las patadas es un número entero y se manifiesta en todas las cantidades cuánticas.

[3] Nader D., and Lerma S. and Gónzales-Rodríguez (2021). Avoided crossings and dynamical tunneling close to excited-state quantum phase transitions

Resonancias en dirección Jz



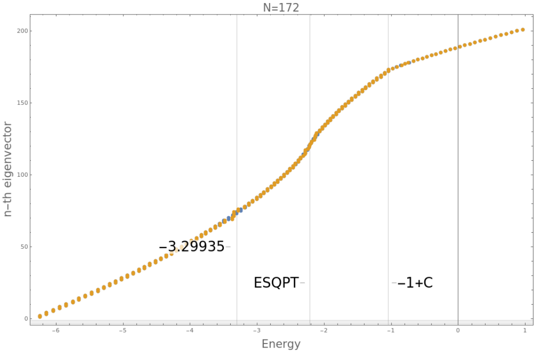


Figura 9: LMG Periods (left, $\epsilon = 0$) and Expectacion values (right, $\epsilon = \frac{\pi}{1000}$, $\tau = 1$)

Resonancias en dirección Jz

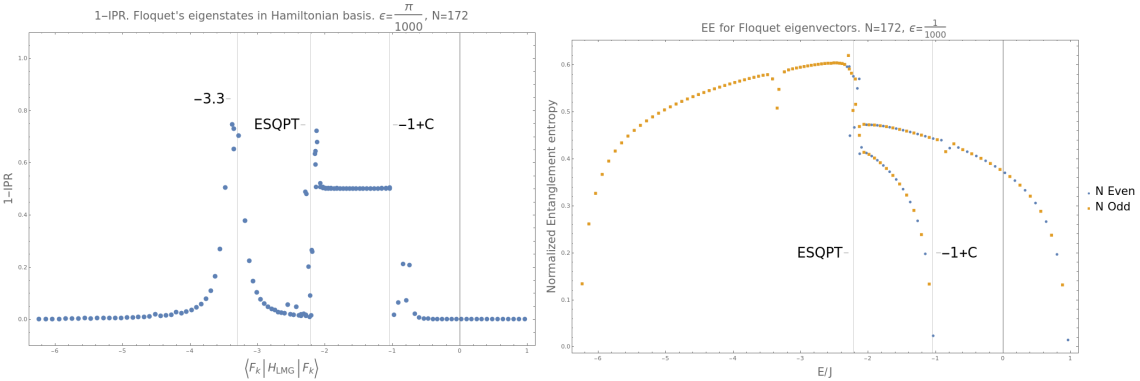


Figura 10: 1-IPR (left, $\epsilon = \frac{\pi}{1000}$) and Expectacion values (right, $\epsilon = \frac{\pi}{100}$, $\tau = 1$)

Resonancias en dirección Jz

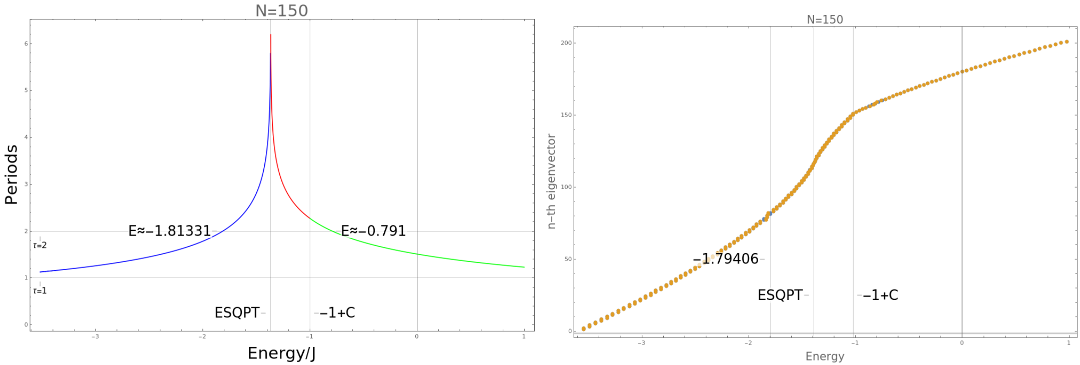


Figura 11: LMG Periods (left, $\epsilon = 0$) and Expectacion values (right, $\epsilon = \frac{\pi}{1000}$, $\tau = 1$)

Resonancias en dirección Jz

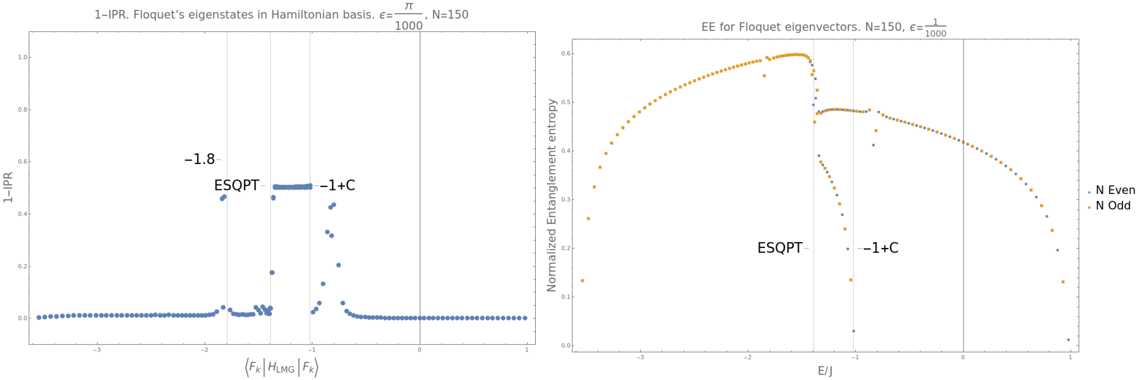


Figura 12: 1-IPR (left, $\epsilon = \frac{\pi}{1000}$) and Expectacion values (right, $\epsilon = \frac{\pi}{100}$, $\tau = 1$)

Resonancias en dirección Jz

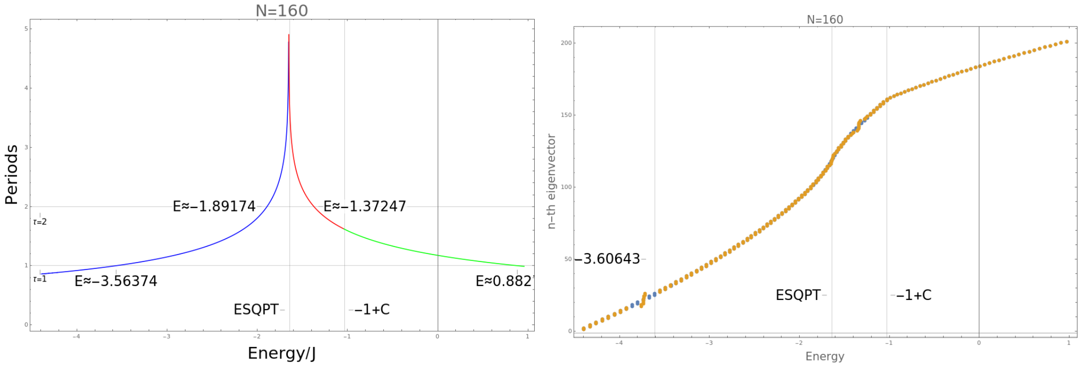
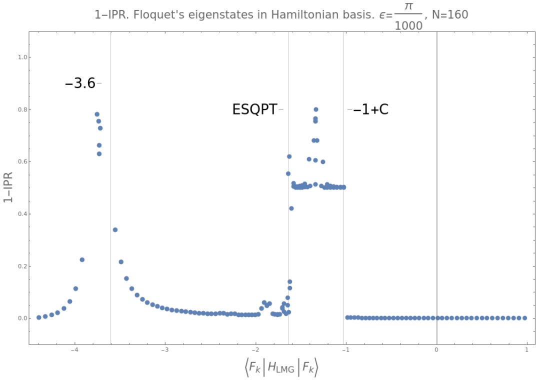


Figura 13: LMG Periods (left, $\epsilon = 0$) and Expectacion values (right, $\epsilon = \frac{\pi}{1000}$, $\tau = 1$)

Resonancias en dirección Jz



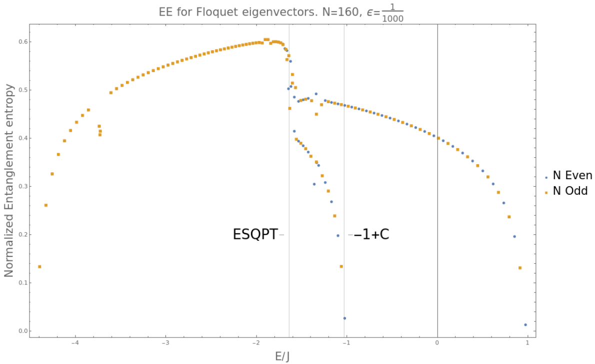


Figura 14: 1-IPR (left, $\epsilon = \frac{\pi}{1000}$) and Expectacion values (right, $\epsilon = \frac{\pi}{100}$, $\tau = 1$)

Funciones de Husimi en resonancia

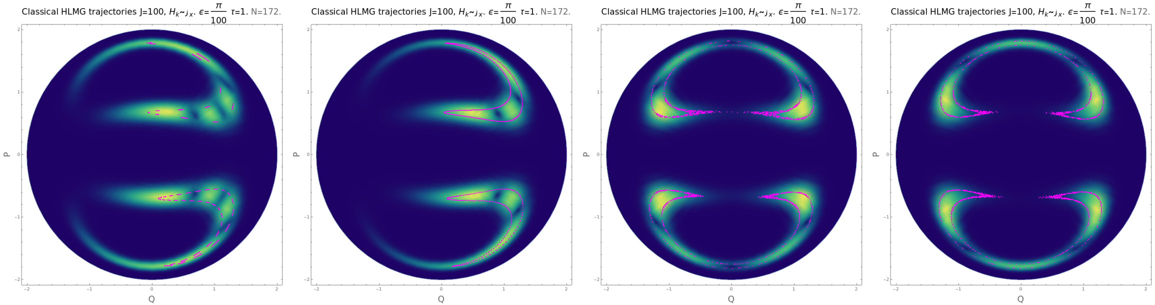


Figura 15: Caso patada Jx (izquierda) y Jz (derecha). Trayectorias clásicas con la misma energía en Magenta.

¡Muchas gracias!