Modelo de Tavis-Cummings: ¿solución analítica?

Viani Suhail Morales Guzmán

Jaynes-cummings

- Jaynes Cummings: un sistema de dos niveles y un campo cuantizado (RWA).
- Jaynes Cummings k-fotones: un sistema de dos niveles interactuando con un modo de radiación pero el átomo hace transiciones de dos fotones.

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_0 + \lambda\left(\sigma_+(\hat{a})^2 + \sigma_-(\hat{a}^\dagger)^2\right),$$

Eur. Phys. J. D (2018) 72: 142
https://doi.org/10.1140/epjd/e2018-90106-y

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURN

Regular Article

!Espectro correcto!

Matrix diagonalization and exact solution of the k-photon Jaynes–Cummings model

Enrique Choreño[1,a], Didier Ojeda-Guillén[2], and Víctor David Granados[1]

[1] Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Ed. 9, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738 Ciudad de México, Mexico

[2] Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, Av. Juan de Dios Bátiz esq. Av. Miguel Othón de Mendizábal, Col. Lindavista, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738, Ciudad de México, Mexico

- Trabajan con la parte interactuante

$$\hat{H}_I = (\hbar\omega_0 - 2\hbar\omega)\,J_0 + \lambda\left(J_+(\hat{a})^2 + J_-(\hat{a}^+)^2\right).$$

- Aplican una transformación

$$D(\xi) = e^{\xi J_+ - \xi^* J_-}$$

$$D^\dagger(\xi)\hat{H}_I D(\xi) D^\dagger(\xi)\Psi = E_I D^\dagger(\xi)\Psi,$$
$$\hat{H}_I'\Psi' = E_I\Psi'.$$

- Expresan el H transformado de forma matricial

$$\hat{H}_I' = \begin{pmatrix} (\frac{\hbar\omega_0}{2} - \hbar\omega)(2\epsilon+1) - \frac{\lambda\xi^*\delta(\hat{a})^2}{2|\xi|} - \frac{\lambda\xi\delta(\hat{a}^\dagger)^2}{2|\xi|} & \frac{(\hbar\omega_0-2\hbar\omega)\delta\xi}{2|\xi|} + \lambda(\epsilon+1)(\hat{a})^2 + \frac{\lambda\epsilon\xi(\hat{a}^\dagger)^2}{\xi^*} \\ \frac{(\hbar\omega_0-2\hbar\omega)\delta\xi^*}{2|\xi|} + \frac{\lambda\epsilon\xi^*(\hat{a})^2}{\xi} + \lambda(\epsilon+1)(\hat{a}^\dagger)^2 & (\hbar\omega - \frac{\hbar\omega_0}{2})(2\epsilon+1) + \frac{\lambda\xi^*\delta(\hat{a})^2}{2|\xi|} + \frac{\lambda\xi\delta(\hat{a}^\dagger)^2}{2|\xi|} \end{pmatrix}$$

- Proponen los eigenvectores de

In order to find the eigenvalues of this matrix Hamiltonian, we assume that the eigenvectors of H_I' are of the form

$$\phi'^{(1)}_{n} = \begin{pmatrix} |\psi'^{(1)}_{n}\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi'^{(2)}_{n'} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\psi'^{(2)}_{n'}\rangle \end{pmatrix}, \tag{7}$$

- Este es un procedimiento muy complicado para diagonalizar un H de 2x2.

$$\left[\left(\frac{\hbar\omega_0}{2} - \hbar\omega\right)(2\epsilon + 1) - \frac{\lambda\xi^*\delta}{2|\xi|}(\hat{a})^2 - \frac{\lambda\xi\delta}{|2\xi|}(\hat{a}^\dagger)^2\right]|\psi'^{(1)}_n\rangle = E_I^{(1)}|\psi'^{(1)}_n\rangle, \tag{8}$$

$$\left[(\hbar\omega_0 - 2\hbar\omega)\frac{\delta\xi^*}{2|\xi|} + \frac{\lambda\epsilon\xi^*}{\xi}(\hat{a})^2 + \lambda(\epsilon + 1)(\hat{a}^\dagger)^2\right]|\psi'^{(1)}_n\rangle = 0. \tag{9}$$

- Se buscan los parámetros de la transformación $D(\xi) = e^{\xi J_+ - \xi^* J_-}$ para obtener un H diagonal

$$\hat{H}'_I = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\hbar\omega_0 - 2\hbar\omega)^2 + 4\lambda^2 \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2} & 0 \\ 0 & \mp\frac{1}{2}\sqrt{(\hbar\omega_0 - 2\hbar\omega)^2 + 4\lambda^2 \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2} \end{pmatrix}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\sqrt{\hat{a}^2(\hat{a}^\dagger)^2}}{\hbar\omega_0 - 2\hbar\omega}\right), \quad \varphi = i\ln\left[\frac{(\hbar\omega_0 - 2\hbar\omega)\delta}{\lambda(2\epsilon+1)(\hat{a}^\dagger)^2}\right].$$

$$\xi = -\tfrac{1}{2}\theta e^{-i\varphi}$$

- Este es un procedimiento muy complicado para diagonalizar un H de 2x2.

$$H_I = \begin{pmatrix} \Omega & \gamma\hat{a}^2 \\ \gamma(\hat{a}^\dagger)^2 & -\Omega \end{pmatrix}$$

$$E_n = \hbar\omega(n+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\hbar\omega_0 - 2\hbar\omega)^2 + 4\lambda^2(n^2+3n+2)},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tavis-Cummings

Algebraic approach to the Tavis-Cummings model with three modes of oscillation

E. Choreño, D. Ojeda-Guillén, and V. D. Granados

Citation: Journal of Mathematical Physics **59**, 073506 (2018); doi: 10.1063/1.5012910
View online: https://doi.org/10.1063/1.5012910
View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/jmp/59/7
Published by the American Institute of Physics

- Tavis-Cummings: N sistemas de dos niveles interactuando con un modo de radiación (RWA).

$$H_{TC} = \omega \hat{c}^{\dagger}\hat{c} + \omega \hat{J}_z + \kappa\left(\hat{c}\hat{J}_+ + \hat{c}^{\dagger}\hat{J}_-\right).$$

- Representación de Schwinger de los operadores de momento angular en términos de operadores bosónicos.

$$\hat{J}_+ = \hat{a}^{\dagger}\hat{b}, \quad \hat{J}_- = \hat{a}\hat{b}^{\dagger},$$

- Hamiltoniano de tres modos interactuando entre sí.

$$H = \omega_1 \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \omega_2 \hat{b}^{\dagger}\hat{b} + \omega_3 \hat{c}^{\dagger}\hat{c} + g(\hat{a}^{\dagger}\hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{b}^{\dagger}\hat{c}^{\dagger}),$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega$$

Tavis-Cummings

Transformación de Bogoliubov.

$$\hat{b} = \hat{f}\cosh r + \hat{d}^{\dagger} e^{-i\theta}\sinh r$$
$$\hat{c} = \hat{d}\cosh r + \hat{f}^{\dagger} e^{-i\theta}\sinh r,$$

Diagonalizamos el Hamiltoniano y obtenemos una solución para los parámetros de la transformación.

$$\cosh\hat{r} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - g^2\hat{n}_a}}$$
$$\sinh\hat{r} = \frac{g\sqrt{\hat{n}_a}}{\sqrt{\omega^2 - g^2\hat{n}_a}}$$

$$e^{i\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{\hat{a}^{\dagger}}{\hat{a}}}$$
$$e^{-i\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{\hat{a}}{\hat{a}^{\dagger}}}$$

El Hamiltoniano diagonal.

$$H_{BT} = \omega_1\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \sqrt{\omega^2 - g^2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}(\hat{f}^{\dagger}\hat{f} + \hat{d}^{\dagger}\hat{d} + 1) - \omega.$$

Espectro.

$$E_{BT} = \sqrt{\omega^2 - g^2 n_a}(n_f + n_d + 1) + \omega_1 n_a - \omega.$$

¿Cómo verificamos que el espectro sea consistente con otros resultados?

$$E_{BT} = \sqrt{\omega^2 - g^2 n_a}(n_f + n_d + 1) + \omega_1 n_a - \omega.$$

- Es necesario expresar las cantidades $n_f,\ n_d$ y n_a en términos de

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}$$

$$\hat{\lambda} = \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{J}_z = \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}.$$

- Para ello necesitamos una transformación inversa

$$\hat{b} = \hat{f}\cosh r + \hat{d}^\dagger e^{-i\theta}\sinh r$$
$$\hat{c} = \hat{d}\cosh r + \hat{f}^\dagger e^{-i\theta}\sinh r,$$

$$\hat{b} = \hat{f}\cosh r + \hat{d}^{\dagger} e^{-i\theta}\sinh r$$
$$\hat{c} = \hat{d}\cosh r + \hat{f}^{\dagger} e^{-i\theta}\sinh r,$$

$\hat{u} = \cosh\hat{r}$ y $\hat{u} = e^{-i\hat{\theta}}\sinh\hat{r}.$

Si $\hat{f}$ y $\hat{d}$ satisfacen el álgebra de bosones, entonces

$$[\hat{b}, \hat{b}^{\dagger}] = \hat{u}\hat{u}^{\dagger} - \hat{v}\hat{v}^{\dagger}.$$

? La transformación de Bogoliubov no es unitaria pues $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ no conmutan.

? Esto implica que si asumimos que $\hat{f}$ y $\hat{d}$ son bosónicos, $\hat{b}$ y $\hat{c}$ no lo son y ambas hipótesis se usan para el desarrollo del artículo.

¿Qué información sí podemos obtener del H que ellos proponen para modelar TC?

$$H = \omega_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_3 \hat{c}^\dagger \hat{c} + g(\hat{a}^\dagger \hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger),$$

- Obtenemos el valor esperado del H con respecto al estado coherente

$$E \equiv < \alpha, \beta, \gamma | H | \alpha, \beta, \gamma >= \omega n_c + \omega_0 (n_a - n_b) + g(\alpha^* \beta\gamma + \alpha\beta^*\gamma^*) - \mu(n_a + n_b - N),$$

- Minimizamos la energía y resolvemos para los parámetros.

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = (\omega_0 + \mu)\alpha^* + g\beta^*\gamma^* = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \alpha^*} = (\omega_0 + \mu)\alpha + g\beta\gamma = 0.$$

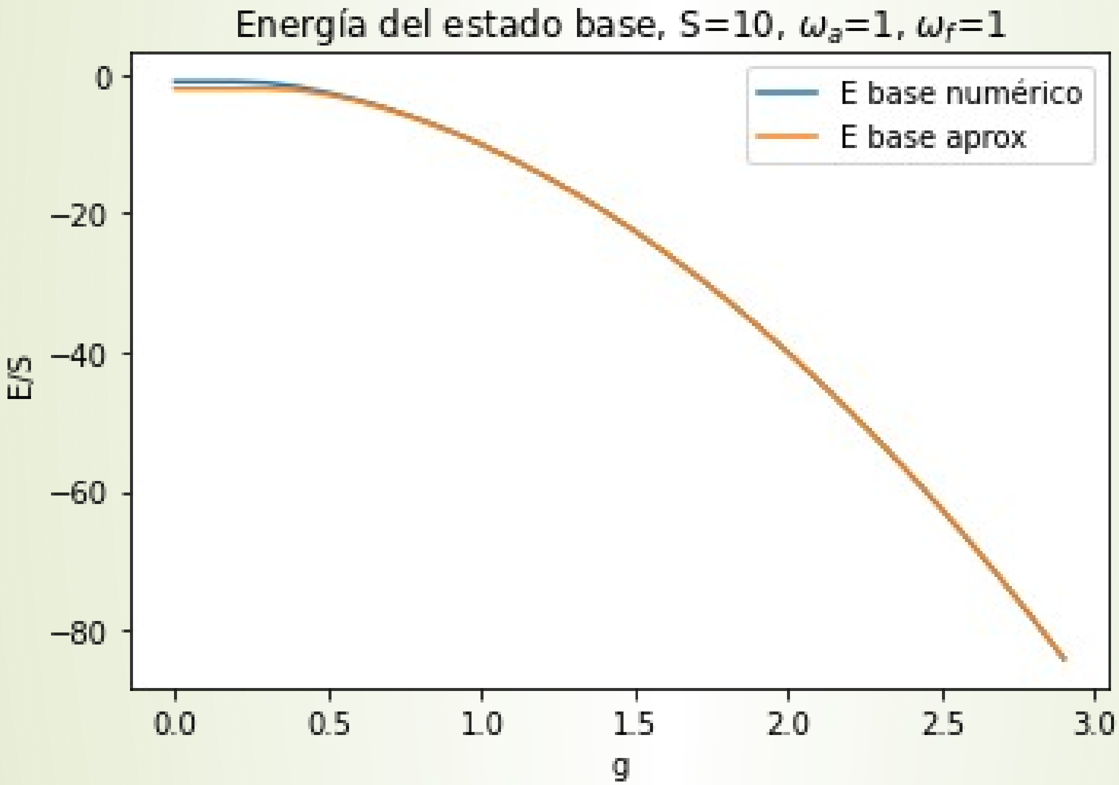
$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = (-\omega_0 + \mu)\beta^* + g\alpha^*\gamma = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \beta^*} = (-\omega_0 + \mu)\beta + g\alpha\gamma^* = 0.$$

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = \omega\gamma^* + g\alpha^*\beta = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \gamma^*} = \omega\gamma + g\alpha\beta^* = 0.$$

$$g_c \equiv \sqrt{\frac{2\,\omega\omega_0}{N}}.$$

$$g \leq g_c, \; E = -N\omega_0.$$

$$g > g_c \qquad E = -\omega\left(\frac{N^2 g^2}{4\,\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{g^2}\right)$$


Energía del estado base, S=10, ω_a=1, ω_f=1
E base numérico
E base aprox
E/S
g
0
−20
−40
−60
−80
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0