

Base eficiente de Diagonalización en el modelo de Dicke

El modelo:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{J}_x$$

Objetivo: diagonalizar numéricamente el Hamiltoniano anterior

Problema: El espacio de Hilbert es de dimensión infinita debido a la parte bosónica

Solución: Introducir un corte en la parte bosónica (Nmax) suficientemente grande para que los estados propios no dependan de él.

Base de Fock

Lo más sencillo, la base de Fock:

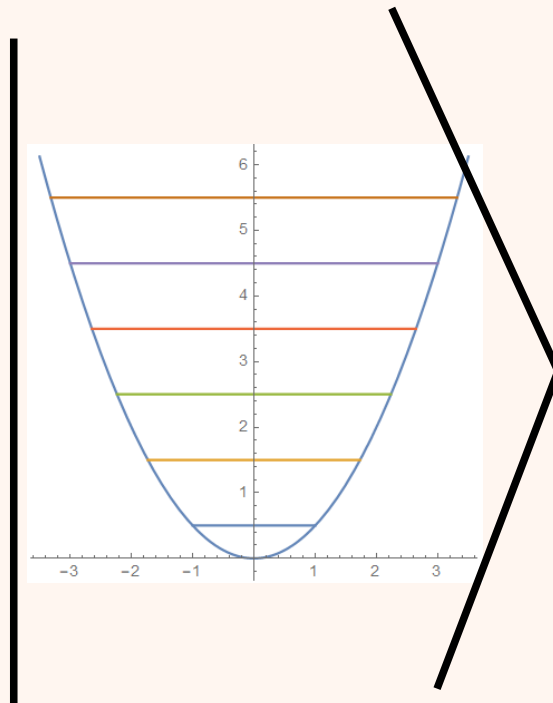
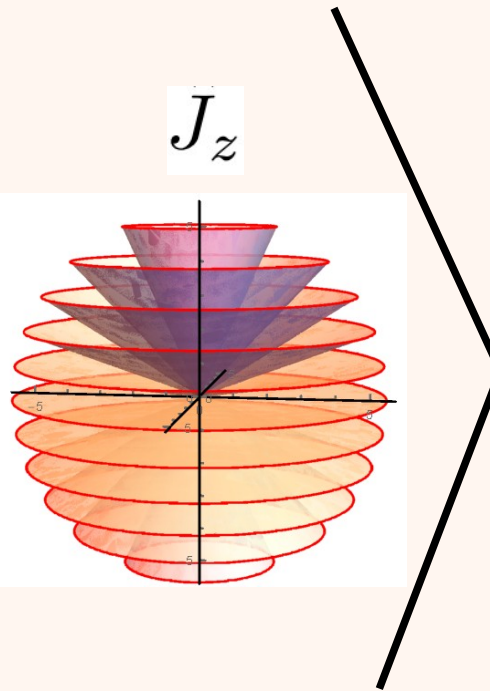
$$|jm\rangle \otimes |n\rangle$$

Con:

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$$

$$\hat{J}_z |jm\rangle = m |jm\rangle$$

$$n = 0, 1, \dots, n_{max}$$



$$\dim = (n_{max} + 1)(2j + 1)$$

Base de Fock

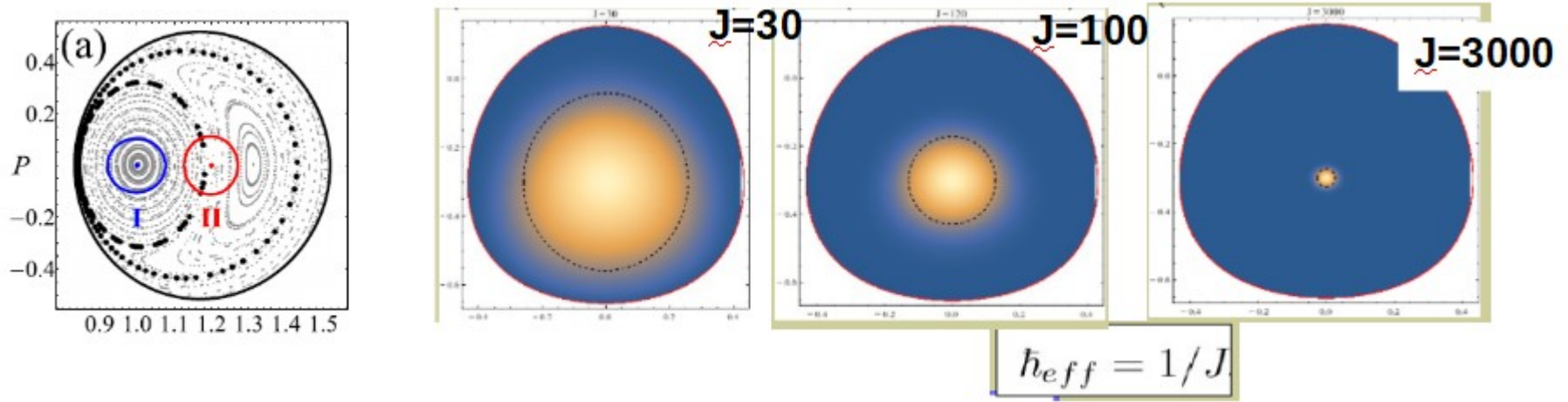
Elementos de matriz muy fáciles de calcular

Convergencia muy mala de los estados propios en la fase superradiante

Típicamente se pueden alcanzar tamaños $j \sim 30$

¿Para qué estudiar sistemas con j grandes?

1- Aumento de la correspondencia clásico-cuántica



permite interpretar más claramente los resultados cuánticos y capturar las estructuras clásicas más finas.

2.- Análisis de escala relevantes para

Multifractalidad (plática de Miguel)

Hipótesis de termalización de eigenestados (ETH)

Base eficiente

¿Cómo llegar a J mayores ($J \sim 100$)?

Usando una base que capture mejor la estructura de los estados propios en la fase superradiante

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \cancel{\omega_0 \hat{J}_z} + \frac{2\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{J}_x$$

$$\left(\omega a^\dagger a + \frac{2\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (a + a^\dagger) \hat{J}_x \right) |jm_x\rangle |\phi\rangle_{bos} =$$

$$\left(\omega a^\dagger a + \frac{2\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (a + a^\dagger) m_x \right) |jm_x\rangle |\phi\rangle_{bos}$$

Nos queda un
OA desplazado
para la parte
bosónica

Base eficiente

$$\hat{A}_{q_{m_x}} = \hat{a} - \frac{q_{m_x}}{\sqrt{2}}$$

Con desplazamiento

$$q_{m_x} = \frac{2\sqrt{2}\gamma m_x}{\omega\sqrt{N}}$$

$$\left(\omega \hat{A}_{q_{m_x}}^\dagger \hat{A}_{q_{m_x}} - \frac{4\gamma^2 m_x^2}{\omega N} \right) |jm_x\rangle |\phi\rangle_{bos}$$

$$|\phi\rangle_{bos} = |N\rangle_{q_{m_x}} \equiv \frac{\left(\hat{A}_{q_{m_x}}^\dagger \right)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_{q_{m_x}}$$

Base eficiente

$$\left(\omega \hat{A}_{q_{m_x}}^\dagger \hat{A}_{q_{m_x}} - \frac{4\gamma^2 m_x^2}{\omega \mathcal{N}} \right) |jm_x\rangle |N\rangle_{q_{m_x}} =$$

$$\left(\omega N - \frac{4\gamma^2 m_x^2}{\omega \mathcal{N}} \right) |jm_x\rangle |N\rangle_{q_{m_x}}$$

$|N\rangle_{q_{m_x}}$

Estados propios de un oscilador armónico desplazado

$$|jm_x; N\rangle \equiv |jm_x\rangle |N\rangle_{q_{m_x}}$$

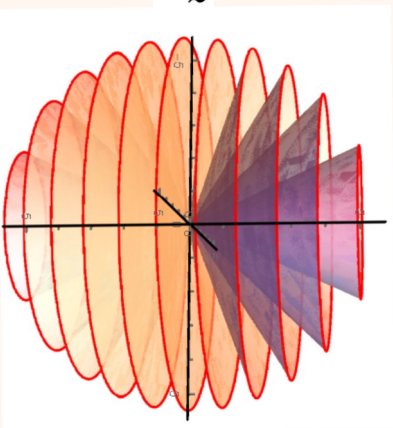
Base coherente eficiente

$|0\rangle_{q_{m_x}}$

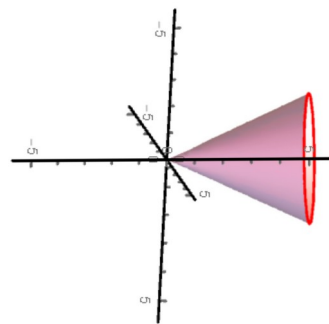
→ estado coherentes de Glauber

Visualización de la base eficiente

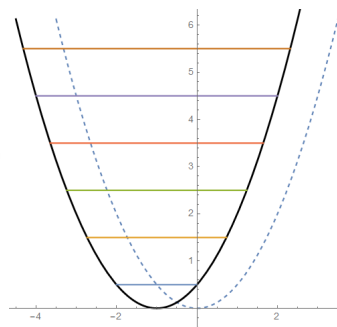
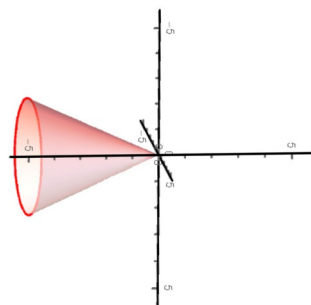
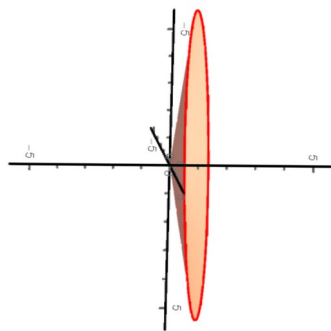
J_z



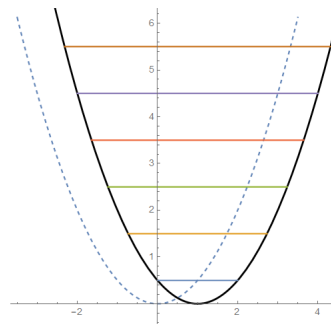
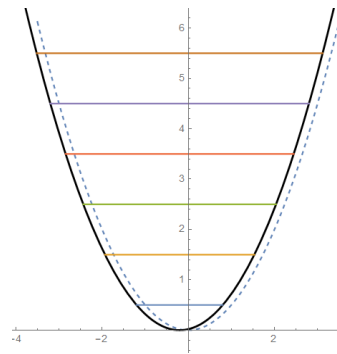
J_x



⋮



⋮



$$|jm_x = j\rangle |N\rangle_{q_{m_x}}$$

⋮

$$|jm_x = 1\rangle |N\rangle_{q_{m_x}}$$

⋮

$$|jm_x = -j\rangle |N\rangle_{q_{m_x}}$$

Algunas propiedades de la Base Coherente Eficiente

1.- Ortogonal...

$$\langle jm'_x; N' | jm_x; N \rangle = \delta_{m'_x m_x} \delta_{N' N}$$

Pero no ortogonal de manera separada para la parte bosónica

$$q_{m'_x} \langle N' | N \rangle q_{m_x} \neq \delta_{N' N}$$

Desplazamientos distintos, pero fórmula analítica conocida:

$$\begin{aligned} \langle l | \hat{D}(\alpha) | n \rangle &= (n! / l!)^{1/2} \alpha^{l-n} e^{-1/2|\alpha|^2} \\ &\quad \times \mathcal{L}_n^{(l-n)}(|\alpha|^2), \end{aligned}$$

Algunas propiedades de la Base Coherente Eficiente

2. Elementos de matriz de Hamiltoniano de Dicke

$$\langle jm'_x; N' | H_D | jm_x; N \rangle = \delta_{m'_x m_x} \delta_{N' N} \left(\omega N - \frac{4\gamma^2 m_x^2}{\omega \mathcal{N}} \right) + \omega_o \langle jm'_x; N' | J_z | jm_x; N \rangle$$

3. Propiedades simples ante transformaciones de paridad

$$\hat{\Pi} = e^{i\pi \Lambda} = e^{i\pi (J_z + j)} e^{i\pi a^\dagger a}$$

$$\hat{\Pi} |jm_x; N\rangle = (-1)^N |j - m_x; N\rangle$$

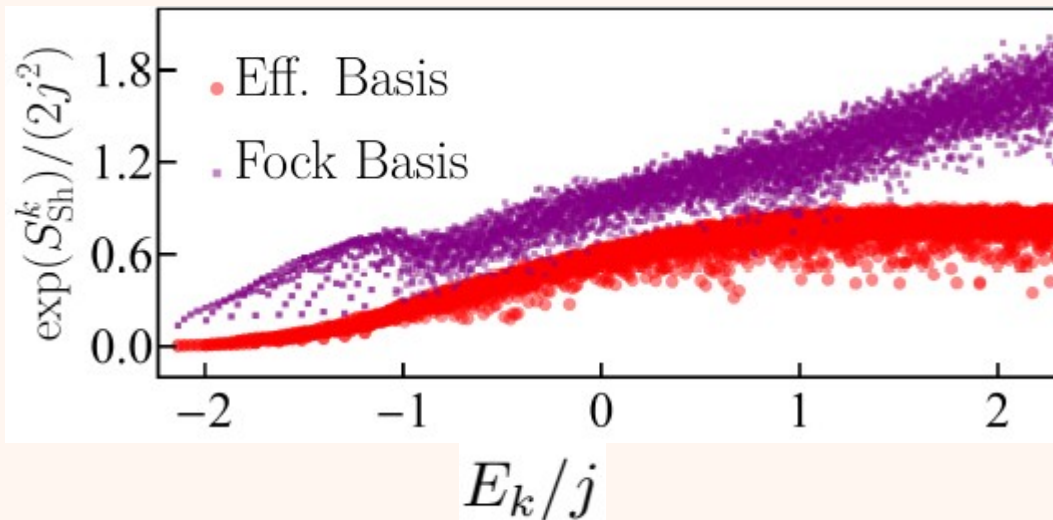
Algunas propiedades de la Base Coherente Eficiente

4.- Y sobre todo... muy eficiente para diagonalizar numericamente el Hamiltoniano de Dicke (en la fase superradiante del caso resonante)

$$|E_k\rangle = \sum_{m_x N} c_{m_x N}^{(k)} |jm_x; N\rangle = S_{\text{Sh}}^{(k)} = - \sum |c_i^{(k)}|^2 \log |c_i^{(k)}|^2$$

$$\sum_{m_x N} c_{mn}^{(k)} |jm\rangle |n\rangle$$

Medida del Número de estados de la base que participan en los eigenestados



$j=30$

$$\omega = \omega_0 = \gamma = 1$$

Ha permitido estudiar sistemas $j \sim 100$

¿Podemos encontrar bases más eficientes que nos permitan ir a j mayor?

Estrategia 1: Cortes diferenciados en la parte bosónica de la Base Coherente Eficiente

$$|jm_x; N\rangle \equiv |jm_x\rangle |N\rangle_{q_{m_x}}$$

Resultados preliminares indican que es posible obtener el mismo número de eigenestados convergidos con

$$N_{\max}^{m_x} < N_{\max}^{m'_x}$$

$$|m_x| < |m'_x|$$

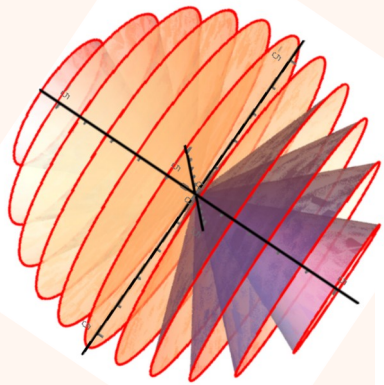
Hasta ahora...

$$N = 0, 1, \dots, N_{\max}$$

pero pueden considerarse

$$N = 0, 1, \dots, N_{\max}^{m_x}$$

Estrategia 2: Bases rotadas y desplazadas más generales



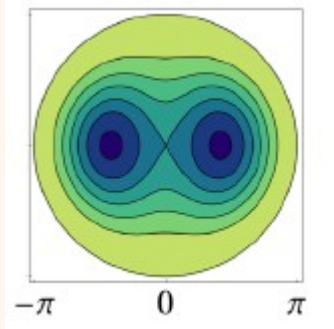
$$\hat{J}_{\theta, \phi}$$

$$|jm_{\theta, \phi}\rangle \otimes |N\rangle_{q(m_{\theta, \phi})}$$

Podemos elegir la dirección

y el desplazamiento $q(j)$ que θ, ϕ enen del análisis clásico usando estados coherentes

difícil implementar la simetría de Paridad del modelo de Dicke



$$(q_m, p_m)_{\pm} = \left[\mp \frac{2\gamma\sqrt{j}}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^4}, 0 \right]$$

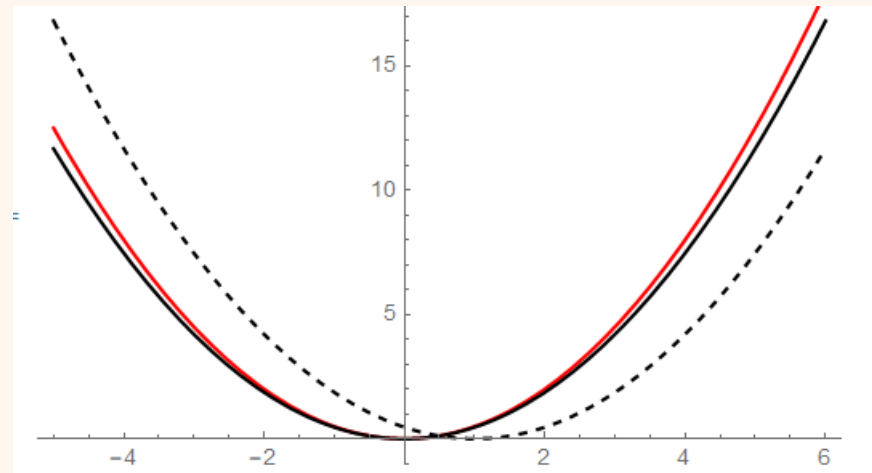
$$(\cos \phi_m, j_{zm})_{\pm} = \left[\pm 1, -j \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^2 \right],$$

Por otro lado, además de desplazamiento también podemos considerar bases con estados bosónicos comprimidos dados por los modos normales alrededor del mínimo

$$2\gamma_c^4\omega_{\pm}^2 = \omega_o^2\gamma^4 + \omega^2\gamma_c^4 \pm \sqrt{(\omega_o^2\gamma^4 - \omega^2\gamma_c^4)^2 + 4\omega^2\omega_o^2\gamma_c^8}$$

aunque para el caso $\omega = \omega_0 = \gamma = 1$ la compresión es casi nula ya que

$$\omega_- = 0.97\omega$$



Aproximación adiabática en Dicke

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{J}_x$$

$$\hat{a} = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{q - ip}{\sqrt{2}}$$

$$H_D = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2 - 1) + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} q \hat{J}_x$$

Aproximación adiabática en Dicke

$$H_D = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2 - 1) + \omega_o \hat{J}_z + \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} q \hat{J}_x$$

$$H_D = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2 - 1) + \omega_q \underbrace{(\cos \theta \hat{J}_z + \sin \theta \hat{J}_x)}$$

$$\hat{J}_{\theta, \phi=0}$$

$$\omega_q = \sqrt{\omega_o^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}\gamma q}{\mathcal{N}}\right)^2}$$

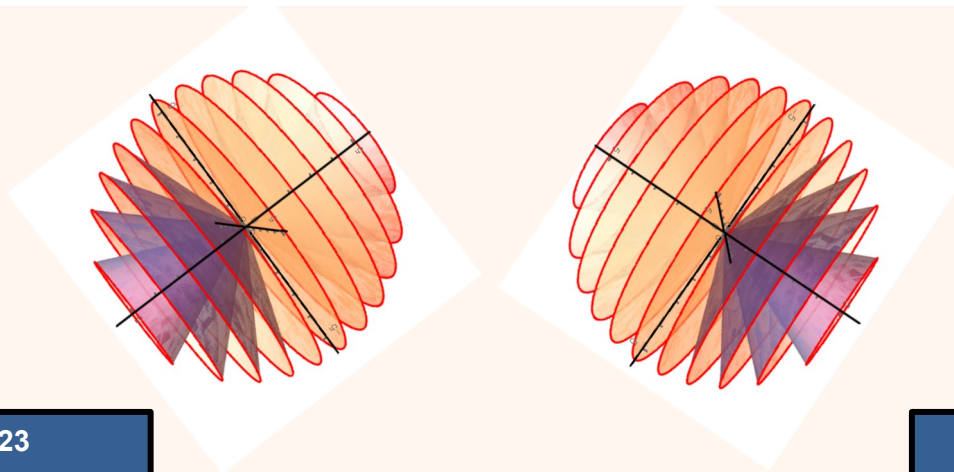
$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}\gamma q}{\sqrt{\mathcal{N}}\omega_q}$$

Aproximación adiabática en Dicke

$$H_D = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2 - 1) + \omega_q \hat{J}_{\theta, \phi=0}$$

Truco.... (aproximación adiabática)

$$H_D |jm_\theta\rangle |\phi\rangle_{\text{bos}} = \left[\frac{\omega}{2}(q^2 + p^2 - 1) + \omega_q m_\theta \right] |jm_\theta\rangle |\phi\rangle_{\text{bos}}$$

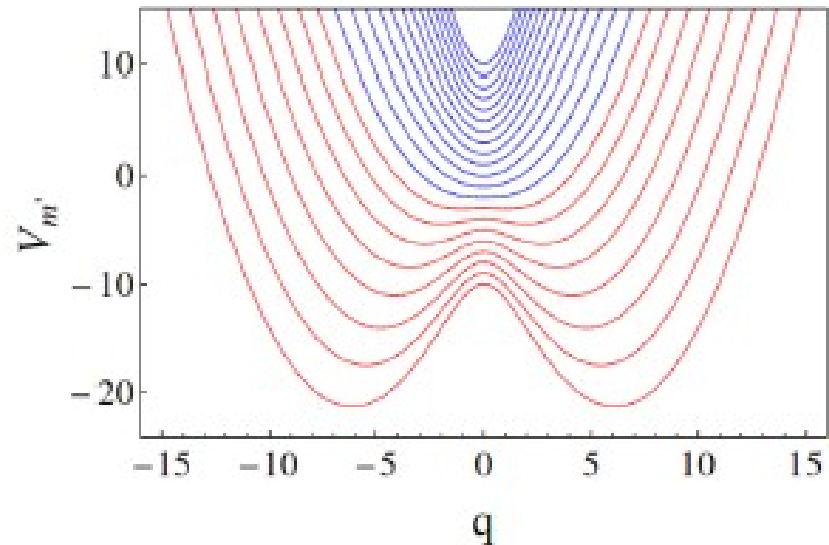


Aproximación adiabática en Dicke

Para la parte bosónica queda un potencial (adiabático efectivo)

$$V_{m_\theta}(q) = \frac{\omega}{2}q^2 + m_\theta \sqrt{\omega_o^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}\gamma q}{\mathcal{N}}\right)^2}$$

$$H_{Dbos} = \frac{\omega}{2}p^2 + V_{m_\theta}(q)$$



**Primeros resultados, en la siguiente charla
de Adair Campos**

¡Gracias!