Fenómenos críticos en sistemas luz-materia con interacciones colectivas de la materia

Proyecto de Investigación

Ricardo Herrera Romero
Asesores: Dr. Miguel Ángel Bastarrachea Magnani
Dr. Román Linares Romero

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

19 de enero 2023

Contenido

Hamiltoniano de Dicke con Interacciones qubit-qubit

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[(\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-) + \xi (\hat{a}^\dagger \hat{J}_+ + \hat{a}\hat{J}_-) \right] + \frac{1}{N} \left(\eta_x \hat{J}_x^2 + \eta_y \hat{J}_y^2 + \eta_z \hat{J}_z^2 \right). \tag{1}$$

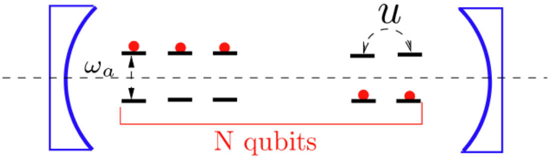


Figura: Yi-Xiang, Y., Ye, J., & Liu, W. M. (2013). Goldstone and Higgs modes of photons inside a cavity. Scientific reports, 3(1), 1-8.

Límite de Dicke $\xi = 1$
Límite de Tavis Cummings $\xi = 0$

Interacciones qubit-qubit

- Sistemas atómicos con interacciones dipolares.

  Chen, G., Zhao, D., & Chen, Z. (2006). Quantum phase transition for the Dicke model with the dipole–dipole interactions. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 39(16), 3315.

- Efecto Stark en configuraciones optomecánicas.

  Abdel-Rady, A. S., Hassan, S. S., Osman, A. N. A., & Salah, A. (2017). Evolution of Extended JC-Dicke Quantum Phase Transition with a Coupled Optical Cavity in Bose-Einstein Condensate System. International Journal of Theoretical Physics, 56(11), 3655-3666.

- Utilizar en circuitos y trampa de iones QED. Yuan, J. B., Lu, W. J., Song, Y. J., &

  Kuang, L. M. (2017). Single-impurity-induced Dicke quantum phase transition in a cavity-Bose-Einstein condensate. Scientific Reports, 7(1), 1-9.

Transiciones de Fase Cuántica (QPT)

- QPT $\rightarrow$ se definen como cambios en las propiedades del estado base de un sistema cuántico.
- Ejemplo QPT en Dicke: Transiciones de fase superradiante.

¿Qué es una fase superradiante?
Se caracteriza por el valor de expectación diferente de cero del número de fotones cuando el acoplamiento luz-materia alcanza un valor crítico en el límite termodinámico.

Hepp, K., & Lieb, E. H. (1973). On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model. Annals of Physics, 76(2), 360-404.

Correspondencia clásica del Hamiltoniano

Consideraciones para la correspondencia clásica

- Límite Termodinámico $N \to \infty$
- Límite Clásico $\hbar \to 0$
- $N\hbar =$ cte

El Hamiltoniano Clásico se obtiene tomando el valor de expectación con el producto tensorial de los estados coherentes de Glauber $|z\rangle$ y Bloch $|\omega\rangle$

$$|z\rangle \otimes |w\rangle = \frac{e^{-|z|^2/2}}{(1+|w|^2)^j} e^{z\hat{a}^\dagger} e^{w\hat{J}_+} |0\rangle \otimes |j,-j\rangle. \tag{2}$$

$$H_{\text{cl}}^{(\xi)}(z,w) = j^{-1}\langle z,w|\hat{H}_D|z,w\rangle =$$

$$H_{cl}^{(\xi)} = \frac{\omega}{2}(q^2+p^2) + j_z\left(\omega_0 + \frac{\eta_z j_z}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1-j_z^2\right)\left(\eta_x \cos^2\phi + \eta_y \sin^2\phi\right) + \tag{3}$$
$$+\gamma\sqrt{1-j_z^2}\,[(1+\xi)q\cos\phi - (1-\xi)p\sin\phi]\,.$$

Hamiltoniano Clásico

Para identificar las superficies de energía y los puntos fijos:

$$\dot{q} = \frac{\partial H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p} = \omega p - \gamma\sqrt{1-j_z^2}(1-\xi)\sin\phi. \tag{4}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q} = -\omega q - \gamma\sqrt{1-j_z^2}(1+\xi)\cos\phi, \tag{5}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z} = \omega_0 + \eta_z j_z - j_z(\eta_x\cos^2\phi + \eta_y\sin^2\phi) - \frac{\gamma j_z}{\sqrt{1-j_z^2}}\left[(1+\xi)q\cos\phi - (1-\xi)p\sin\phi\right], \tag{6}$$

$$\dot{j_z} = -\frac{\partial H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi} = \left(1-j_z^2\right)(\eta_x-\eta_y)\cos\phi\sin\phi + \gamma\sqrt{1-j_z^2}\left[(1+\xi)q\sin\phi + (1-\xi)p\cos\phi\right]. \tag{7}$$

Superficies de Energía y sus extremos

Fase Normal:
Las coordenadas de los puntos estacionarios son:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = (0, 0, \pm 1, \text{indeterminate}) \tag{8}$$

la energía está dada por:

$$\epsilon_{\pm} = \pm 1 + \frac{\eta_z}{2\omega_0} \tag{9}$$

$j_{zs} = -1$ (estable), $\quad j_{zs} = +1$ (inestable)
$|j_{zs}| \leq 1$ espacio de fase disponible de la dinámica del pseudospín.

Fase Normal Deformada:

- La superficie de energía se deforma gracias a la influencia de las interacciones $-x$ y $-y$ $\rightarrow$ la simetría rotacional se rompe.
- $j_z = \pm 1$ es invariante entre las interacciones qubit-qubit en las direcciones $-x$ y $-y$

Superficie de energía

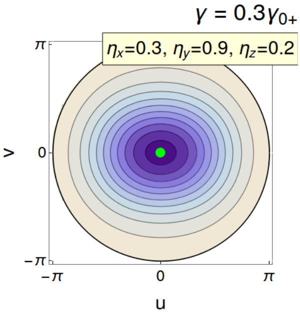


Figura: Fase Normal Deformada

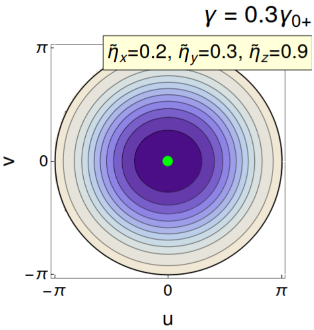


Figura: Fase Normal

$$u = \arccos(-j_z)\cos\phi$$
$$v = \arccos(-j_z)\sin\phi$$

$$\gamma_{0+} = \sqrt{\omega\omega_0}$$

- Punto estable

Límite Tavis-Cummings $\xi = 0$

$\boxed{\text{Fase Superradiante-x}}$ $\eta_x \neq \eta_y$ y $\cos\phi_s = \pm 1$ $(\sin\phi_s = 0) \to p_s = 0$

$$j_{zs} = -\left(\frac{\eta_z - \eta_x}{\omega_0} + \frac{\gamma^2}{\omega\omega_0}\right)^{-1} = -\frac{1}{f_{0x}}, \quad f_{0x} = \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0} + f_{0+}, \tag{10}$$

Acoplamiento crítico

$$\gamma_{0x}^c = \gamma_{0+}\sqrt{1 - \frac{\eta_z - \eta_x}{\omega_0}}. \tag{11}$$

Puntos fijos:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = \left(0, \mp\frac{\gamma}{\omega}\sqrt{1 - \frac{1}{f_{0x}^2}}, -\frac{1}{f_{0x}}, \pi \text{ or } 0\right), \tag{12}$$

Energía:

$$\epsilon_{s0x} = -\frac{1}{2}\left(f_{0x} + \frac{1}{f_{0x}}\right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}, \tag{13}$$

$\boxed{\text{La fase está determinada por } \eta_x \text{ independientemente de } \eta_y}$

Superficies de energía

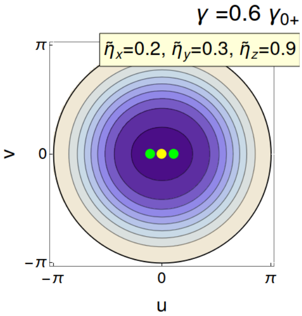


Figura: Fase Superradiante x, TC.

- Punto estable
- Punto silla

$$u = \arccos\left(-j_z\right)\cos\phi$$
$$v = \arccos\left(-j_z\right)\sin\phi$$

$$\gamma_{0+} = \sqrt{\omega\omega_0}$$

Límite Tavis Cummings

Fase Superradiante-y $\eta_x \neq \eta_y$ y $\sin\phi_s = \pm 1$ $(\cos\phi_s = 0)$, $\rightarrow q_s = 0$

$$j_{zs} = -\left(\frac{\eta_z - \eta_y}{\omega_0} + \frac{\gamma^2}{\omega\omega_0}\right)^{-1} = -\frac{1}{f_{0y}}, \quad f_{0y} = \frac{\Delta\eta_{zy}}{\omega_0} + f_{0+} \tag{14}$$

Acoplamiento Crítico:

$$\gamma_{0y}^c = \gamma_{0+}\sqrt{1 - \frac{\eta_z - \eta_y}{\omega_0}}. \tag{15}$$

Puntos fijos:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = \left(\pm\frac{\gamma}{\omega}\sqrt{1 - \frac{1}{f_{0y}^2}}, 0, -\frac{1}{f_{0y}}, \pm\frac{\pi}{2}\right). \tag{16}$$

Energía:

$$\epsilon_{s0y} = -\frac{1}{2}\left(f_{0y} + \frac{1}{f_{0y}}\right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}. \tag{17}$$

La fase está determinada por η_y independientemente de η_x

Superficies de Energía

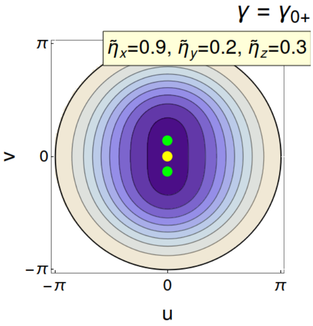


Figura: Fase superradiante y TC.

- Punto estable
- Punto silla

$$u = \arccos\left(-j_z\right)\cos\phi$$
$$v = \arccos\left(-j_z\right)\sin\phi$$

$$\gamma_{0+} = \sqrt{\omega\omega_0}$$

Límite de Tavis Cummings

Fases superpuestas.

Al combinar las interacciones de las direcciones $-x$ y $-y$ exise la posibilidad de que los puntos fijos de las diferentes direcciones aparezcan simultaneamente. Entonces hablaremos de una superposición de las fases.

- En fases superpuestas el mínimo de la superficie de energía solo le corresponderá a un conjunto de puntos fijos degenerados.
- El paso de una fase superradiante sola a una superposición de fases no va seguido de un QPT.
- Aunque el DoS cambie abruptamente anuncia el incio de nuevos ESQPT's.

Ejemplo:
Cuando η_x toma relevancia en la transición de fase:

- Fase normal: $\gamma \in [0, \gamma_{0x}^c]$
- Fase superradiante $-x$: $\gamma \in [\gamma_{0x}^c, \gamma_{0y}^c]$
- Superposición fase superradiante $-x$,$-y$: $\gamma \in [\gamma_{0y}^c, \infty]$

Superficies de Energía TC

- Punto estable, • Punto silla, • Punto Inestable

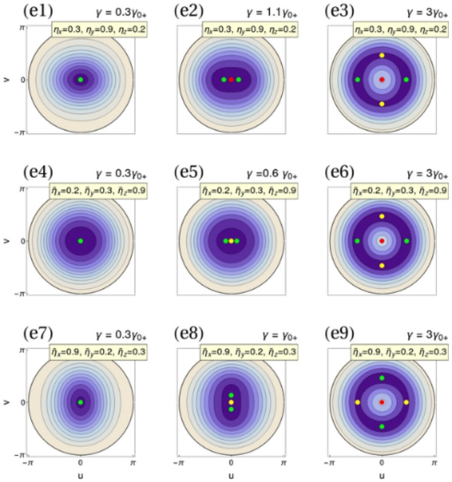
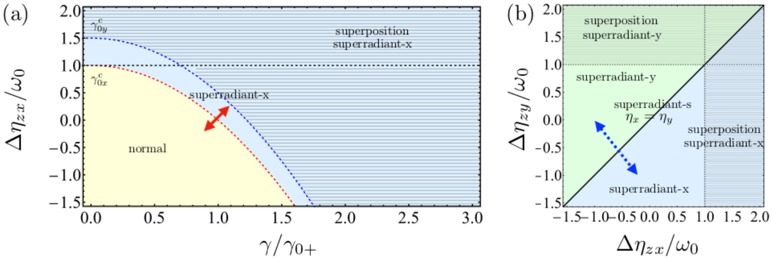


Figura: Herrera Romero, R., Bastarrachea-Magnani, M. A., & Linares, R. (2022). Critical Phenomena in Light–Matter Systems with Collective Matter Interactions. Entropy, 24(9), 1198.

Superficies de Energía TC



Límite de Dicke $\xi = 1$

Fase superradiante-x

$$j_{zs} = -\frac{1}{f_{1x}}, \quad f_{1x} = \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0} + f_{1+} \tag{18}$$

Acoplamiento crítico:

$$\gamma_{1x}^{c} = \gamma_{1+}\sqrt{1 - \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0}}. \tag{19}$$

Puntos fijos:

$$(p_s, q_s, jz_s, \phi_s) = \left(0, \pm\frac{2\gamma}{\omega}\sqrt{1 - \frac{1}{f_{1x}^2}}, -\frac{1}{f_{1x}}, 0 \text{ or } \pi\right) \tag{20}$$

Energía:

$$\epsilon_{s1x} = -\frac{1}{2}\left(f_{1x} + \frac{1}{f_{1x}}\right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}. \tag{21}$$

Límite de Dicke

$\boxed{\text{Fase Deformada}}$

$$j_{zs} = -\frac{\omega_0}{\Delta\eta_{zy}} = -\frac{1}{f_{1y}}, \tag{22}$$

¿Acoplamiento Crítico?

Puntos fijos:

$$(p_s, q_s, jz_s, \phi_s) = \left(0, 0, -\frac{1}{f_{1y}}, \pm\frac{\pi}{2}\right), \tag{23}$$

Energía mínima:

$$\epsilon_{s1y} = -\frac{1}{2f_{1y}} + \frac{\eta_y}{2\omega_0}, \tag{24}$$

Superficies de energía

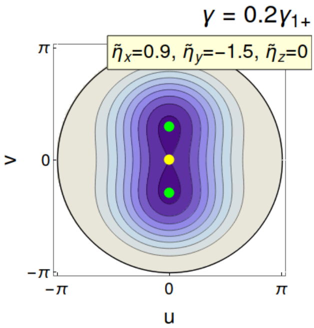


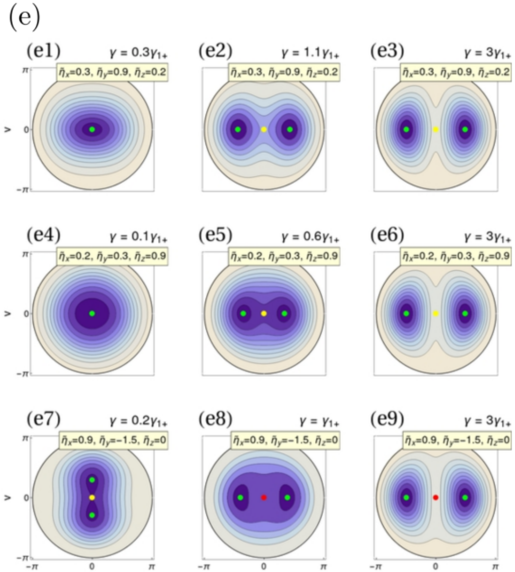
Figura: Fase Deformada Dicke

- Punto estable
- Punto silla

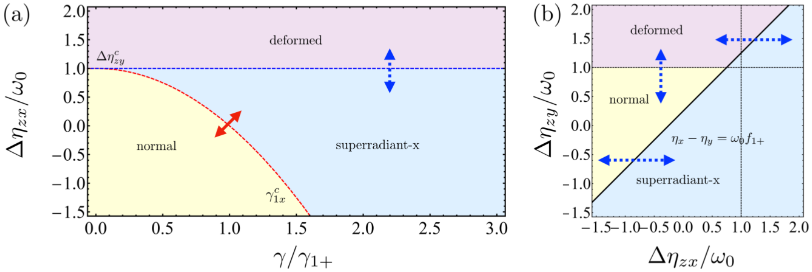
$$u = \arccos(-j_z)\cos\phi$$
$$v = \arccos(-j_z)\sin\phi$$

$$\gamma_{1+} = \frac{\sqrt{\omega\omega_0}}{2}$$

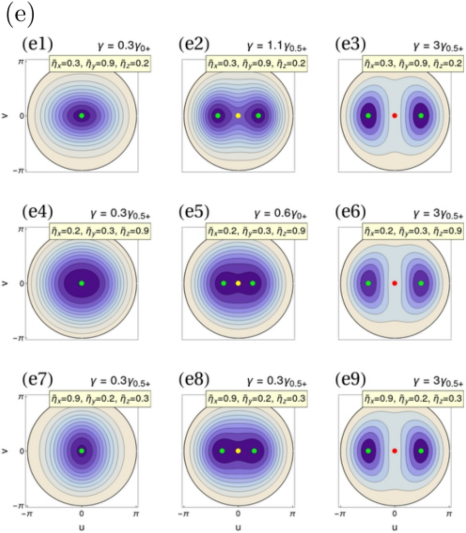
Superficies de Energía Dicke



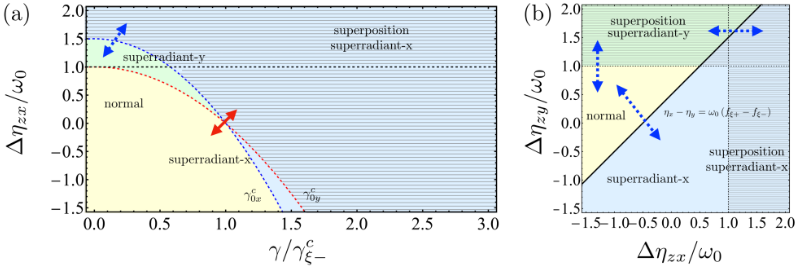
Superficies de Energía Dicke



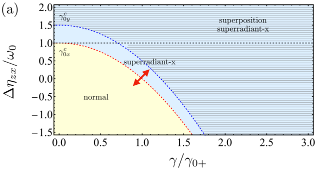
Acoplamiento Arbitrario

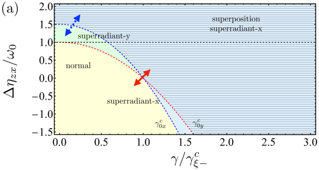


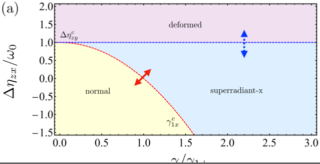
Acoplamiento Arbitrario



Resumen Diagramas Fase







Densidad de estados semiclásica

Calculamos el volumen de espacio fase disponible dada una energía:

$$\nu_\xi(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq\, dp\, dj_z\, d\phi\, \delta\left[\epsilon\omega_0 - H_{cl}^{\xi}(q, p, j_z, \phi)\right]. \tag{25}$$

$$\phi_\xi = \arccos\sqrt{g_\xi(j_z, \epsilon)} = \tag{26}$$

$$\arccos\left\{\left[\frac{2}{1-j_z^2}\left[\frac{\eta_z}{2\omega_0} j_z^2 + j_z - \epsilon\right] - \left(f_{\xi-} - \frac{\eta_y}{\omega_0}\right)\right]^{1/2}\left[\left(f_{\xi+} - f_{\xi-}\right) - \left(\frac{\eta_x}{\omega_0} - \frac{\eta_y}{\omega_0}\right)\right]^{-1/2}\right\}.$$

Valores límite j_z y ϵ

$\cos\phi_\pm = \pm 1 \rightarrow$

$$j_{z\xi}^{(\pm)}(\varepsilon) = -\frac{1}{f_{\xi x}}\left[1 \mp \sqrt{2 f_{\xi x}(\epsilon - \epsilon_{s\xi x})}\right] \quad (27)$$

$\cos\phi_{1,2} = 0 \rightarrow$

$$j_{z\xi}^{(1,2)}(\varepsilon) = -\frac{1}{f_{\xi y}}\left[1 \mp \sqrt{2 f_{\xi y}(\epsilon - \epsilon_{s\xi y})}\right]. \quad (28)$$

$j_{zs} = \pm 1$

$$\epsilon_\pm = \pm 1 + \frac{\eta_z}{2\omega_0} \quad (29)$$

Ejemplo: Caso partícular: $\epsilon_{s\xi x} < \epsilon_{s\xi y}$

Dominios de Energía

$$\frac{\omega}{2}\nu_\xi(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{j_{z\xi}^{(-)}}^{j_{z\xi}^{(+)}} \phi_\xi(j_z,\epsilon)dj_z, & \epsilon_{s\xi x} \leq \epsilon \leq \epsilon_{s\xi y}, \text{ and } \gamma \in [\gamma^c_{\xi x}, \gamma^c_{\xi y}], \\ \frac{1}{\pi}\left[\int_{j_{z\xi}^{(-)}}^{j_z^{(1)}} \phi_0(j_z,\epsilon)dj_z + \int_{j_{z\xi}^{(2)}}^{j_{z\xi}^{(+)}} \phi_0(j_z,\epsilon)dj_z\right] & \epsilon_{s\xi y} < \epsilon \leq \epsilon_-, \text{ and } \gamma \in [\gamma^c_{\xi y}, \infty], \\ \quad +\frac{1}{2}\left(j_{z\xi}^{(2)} - j_{z\xi}^{(1)}\right), & \\ \frac{1}{\pi}\int_{j_{z\xi}^{(1)}}^{j_{z\xi}^{(+)}} \phi_0(j_z,\epsilon)dj_z + \frac{1}{2}\left(j_{z\xi}^{(1)} + 1\right), & \epsilon_- < \epsilon \leq \epsilon_+, \text{ and } \gamma \in [0,\infty), \\ 1, & \epsilon_+ < \epsilon \text{ and } \gamma \in [0,\infty). \end{cases} \tag{30}$$

Densidad de estados como función de la energía

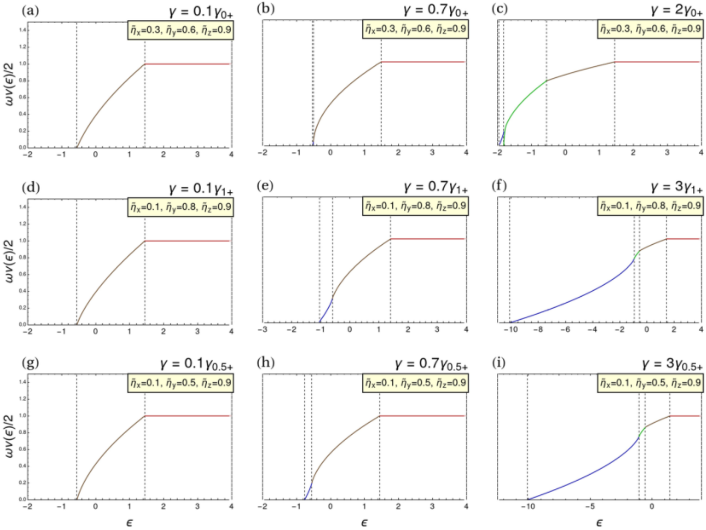


Figura: Densidad de estados $\omega\nu_\xi(\epsilon)/2$ como función de la energía (Dominios de Energía)

Conclusiones

- Se investigaron las fases cuánticas en un modelo de Dicke Generalizado.
  - Tavis-Cummings.
  - Dicke.
- Cada dirección η_i tiene un rol particular en el fenómeno crítico.
- Se confirman las transiciones de fase a través de las técnicas semiclásicas en las densidades de estado.

Gracias por su atención!!

email: ricardo.h.romero@outlook.com