

# Bases eficientes de diagonalización

Campos-Uscanga, Adair

Lerma-Hernández, Sergio

Enero 20, 2023

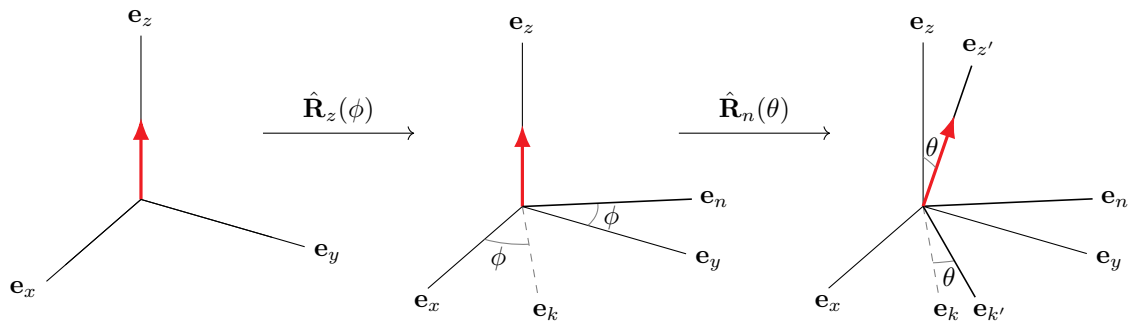
# Base general con ortonormalidad inducida

Parámetros libres a controlar:

- Desplazamiento:  $\hat{\mathbf{A}}_{\omega_1, x_0} = \hat{\mathbf{b}}_{\omega_1} - \hat{\alpha}$ .
  - En el esp. de configuraciones:  $\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{m\omega_1}{2\hbar}} x_0 \hat{\mathbb{I}}$
  - Tipo base coherente eficiente:  $\hat{\alpha} = \frac{2\gamma}{\omega\sqrt{\mathcal{N}}} \hat{\mathbf{J}}_x$ .
- Squeezing:  $\hat{\mathbf{A}}_{\omega_2, x_0} = c_1 \hat{\mathbf{A}}_{\omega_2, x_0} - c_2 \hat{\mathbf{A}}_{\omega_2, x_0}^\dagger$ ,

$$\text{donde } c_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \right)^{-1} \mp \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \right].$$

# Base desplazada para el modelo de Dicke ( $\hat{J}_{z'}$ )



$$\hat{\mathbf{R}}_n(\theta)\hat{\mathbf{R}}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$[\hat{\mathbf{R}}_n(\theta)\hat{\mathbf{R}}_z(\phi)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

# Alineación de $J_{z'}$ a los estados de mínima energía

Como resultado de las rotaciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{z'} &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \hat{\mathbf{J}}_{z'}(\theta, \phi) &= \hat{\mathbf{J}}_x \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{J}}_y \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{J}}_z \cos \theta. \end{aligned}$$

■ Para  $\gamma \leq \gamma_c$ :

$\phi_m$ indeterminado
$x_m = p_m = 0$
$\theta_m = \pi$

■ Para  $\gamma \geq \gamma_c$ :

$\phi_m = 0$	$\phi_m = \pi$
$x_m = -x_0$	$x_m = x_0$
$\cos \theta_m = -\left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^2, p_m = 0$ $x_0 = \frac{2\gamma\sqrt{j}}{\omega} \sin \theta_m$	

# Alineación de $J_{z'}$ a los estados de mínima energía

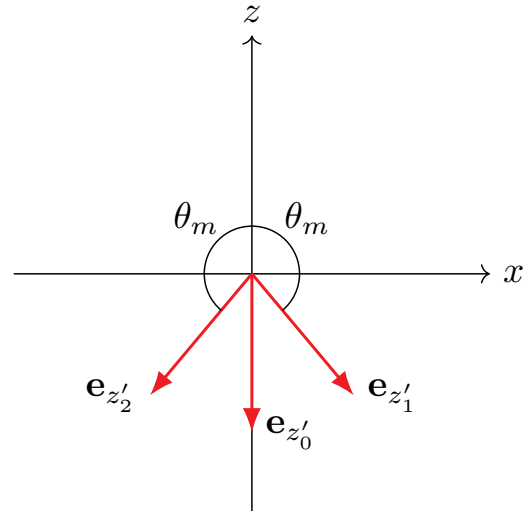
Para  $\gamma \leq \gamma_c$ :

$$\hat{\mathbf{J}}_{z'}(\pi, \phi) = -\hat{\mathbf{J}}_z$$

Para  $\gamma \geq \gamma_c$ :

$$\hat{\mathbf{J}}_{z'}^{(1)}(\theta_m, 0) = \hat{\mathbf{J}}_x \sin \theta_m + \hat{\mathbf{J}}_z \cos \theta_m$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{z'}^{(2)}(\theta_m, \pi) = -\hat{\mathbf{J}}_x \sin \theta_m + \hat{\mathbf{J}}_z \cos \theta_m.$$



# Alineación de $J_{z'}$ a los estados de mínima energía

Parte atómica: eigenestados de  $\hat{\mathbf{J}}^2$  y  $\hat{\mathbf{J}}_{z'} = \hat{\mathbf{J}}_{\theta,\phi}$ .

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{J}}_{\theta,\phi} |j, m_{\theta,\phi}\rangle &= m_{\theta,\phi} |j, m_{\theta,\phi}\rangle \\ \hat{\mathbf{J}}^2 |j, m_{\theta,\phi}\rangle &= j(j+1) |j, m_{\theta,\phi}\rangle.\end{aligned}$$

Parte bosónica: operadores de aniquilación y creación desplazados.

$$\begin{aligned}|N\rangle_{\theta,\phi} &= \frac{(\hat{C})^N}{\sqrt{N!}} \left| z = \frac{x_0}{j} m_{\theta,\phi} \right\rangle \\ \hat{C} &= \hat{\mathbf{b}} - \frac{x_0}{j} m_{\theta,\phi} \hat{\mathbf{I}}.\end{aligned}$$

**Notación:**  $|N; j, m_{\theta,\phi}\rangle = |N\rangle_{\theta,\phi} \otimes |j, m_{\theta,\phi}\rangle$

# Estrategia 1: Base coherente eficiente

Caso particular:

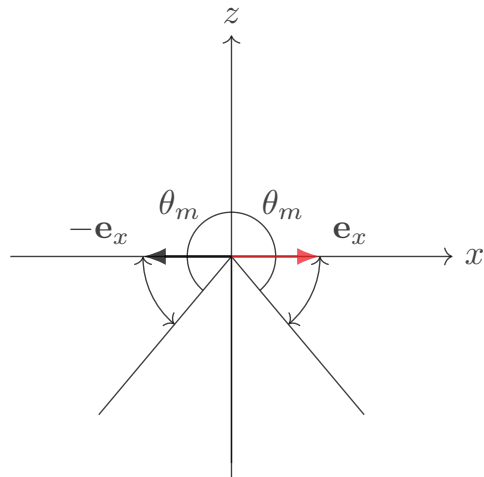
- Desplazamiento  $\hat{\alpha} = \frac{2\gamma}{\omega\mathcal{N}} \hat{\mathbf{J}}_x$ .
- Parámetro de compresión  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$ .

Virtudes:

- El efecto del operador paridad sobre la base  $\{|N; j, m_x\rangle\}$ :

$$\Pi |N; j, m_x\rangle = (-1)^N |N; j, -m_x\rangle.$$

- Existe un ordenamiento en el espacio de parámetros  $\{m_x, N\}$ .



# El truncamiento diferenciado

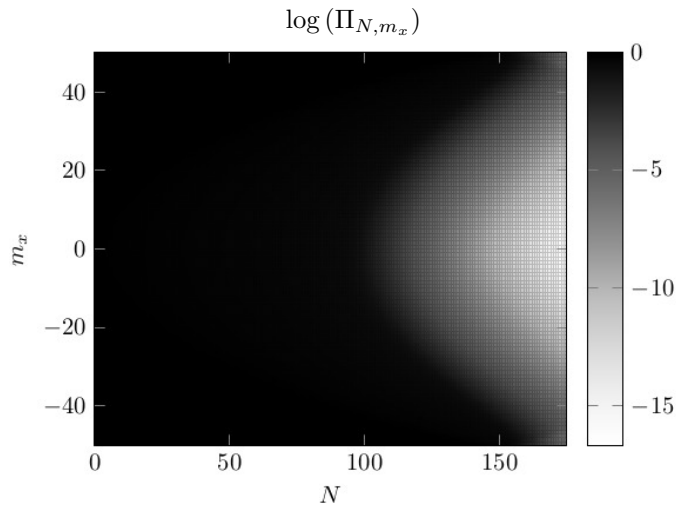
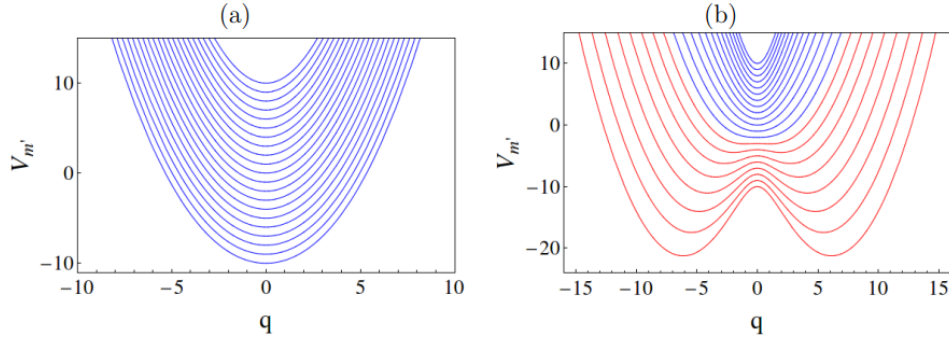


Figura 1:  $\Pi_{m_x} = \sum_{k=1}^{N_{max}} \left| C_{N,m_x}^{(k)} \right|^2$  en el plano  $\{N, m_x\}$ .



# El truncamiento diferenciado



**Figure 1.** Effective potential  $V_{m'}(q)$ , in the case  $\omega/\omega_o = 1$  and  $j = 10$ , for the normal (a),  $f = \gamma/\gamma_c = 0.6$ , and superradiant phase (b),  $f = \gamma/\gamma_c = 2$ . From below, the different curves correspond, respectively, to  $m' = -10, -9, \dots, 9, 10$ . Red curves correspond to potentials with spontaneous breaking of the parity symmetry, which appears only in the superradiant phase

(1) Bastarrachea-Magnani, M. A., Relaño, A., Lerma-Hernández, S., López-del-Carpio, B., Chávez-Carlos, J., & Hirsch, J. G. (2017). Adiabatic invariants for the regular region of the Dicke model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(14), 144002.

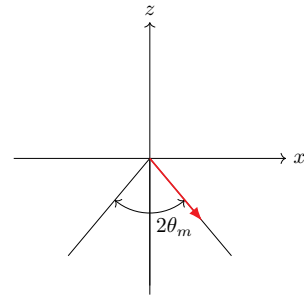
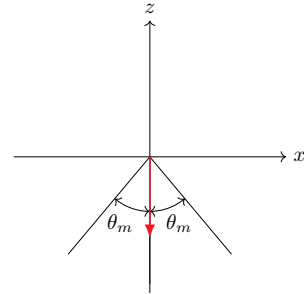
# Estrategia 2: Base adaptada para el modelo de Dicke

Efecto del operador paridad  $\Pi$  sobre eigenestados de  $\hat{\mathbf{J}}_{\theta,\phi}$ :

$$\Pi \underbrace{|N; j, m_{\theta_m, 0}\rangle}_{\text{eigenvector de } \hat{\mathbf{J}}_{\theta_m, 0}} = (-1)^N \underbrace{|N; j, m_{\theta_m, \pi}\rangle}_{\text{eigenvector de } \hat{\mathbf{J}}_{\theta_m, \pi}}$$

Se propone una base con paridad definida

$$\left\{ |N; j, m_{\theta}; p\rangle = |N; j, m_{\theta_m, 0}\rangle + p(-1)^N |N; j, m_{\theta_m, \pi}\rangle \right\}.$$



# Comentarios sobre la base adaptada

## Ventajas:

- Se requiere prácticamente un estado para replicar el estado base.

## Desventajas:

- No es una base ortonormal, pues

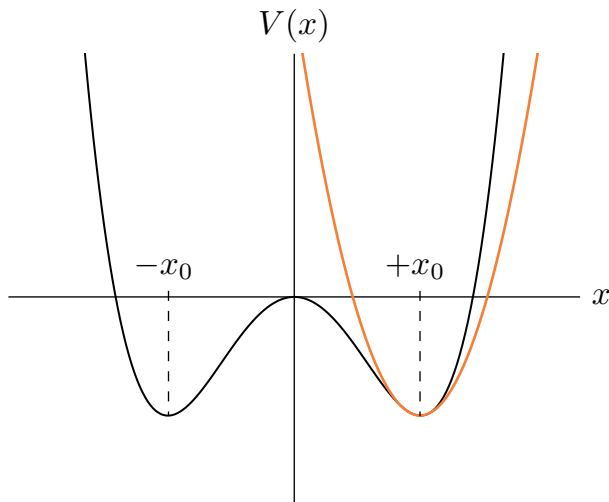
$$\langle j, m'_{\theta, \phi} | j, m_{\theta, \phi} \rangle \neq \delta_{m' m}$$

y, en consecuencia,

$$\langle N' | N \rangle \neq \delta_{m' m}.$$



# Un estudio preliminar: el potencial cuártico



$$V(x) = x^2(ax^2 - b)$$

## Motivación:

- Estructura de doble pozo
- Un grado de libertad
- Trabajos paralelos.

**Configuraciones de mínima energía** caracterizadas por  $\pm x_0$ .

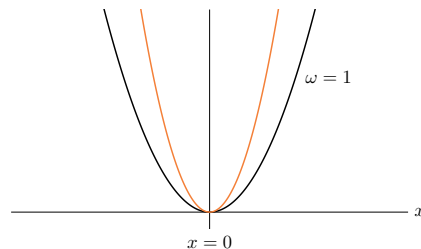
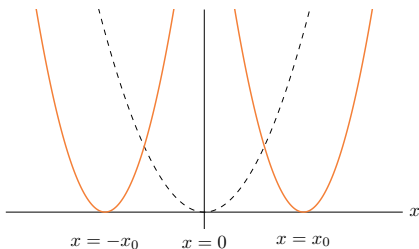
## Aproximación armónica:

$$\omega_h = 2\sqrt{\frac{b}{m}}$$

# Base adaptada para el potencial cuártico

Se explorarán los casos particulares con

- Desplazamientos  $\hat{\alpha} = 0, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 \hat{\mathbb{I}}$ .
- Parámetros de compresión  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  con  $\omega_2 = \omega_1, \omega_h$ .



# Base adaptada para el potencial cuártico

Efecto del operador paridad  $\Pi = \exp(i\pi\hat{n}_{\pm x_0, \omega})$  sobre eigenestados de  $\hat{n}_{\pm x_0, \omega}$ :

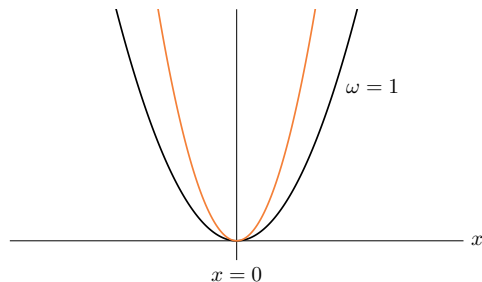
$$\Pi \underbrace{|N\rangle_{\pm x_0}}_{\text{representación } \pm x_0} = (-1)^N \underbrace{|N\rangle_{\pm x_0}}_{\text{representación } \pm x_0}$$

Se propone una base con paridad definida

$$\left\{ |N; p\rangle = |N\rangle_{+x_0} + p(-1)^N |N\rangle_{-x_0} \right\}.$$

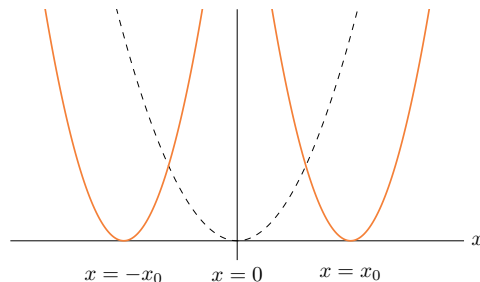
**Importante:** Tampoco es una base ortonormal, pero es más sencilla que la del modelo de Dicke.

# Primeros resultados



## Compresión sin desplazamiento

El peso de los estados se concentra en una pequeña región de eigenestados.



## Combinación lineal de desplazamiento + compresión.

Tiene un IPR más bajo que la base estándar antes de la energía crítica