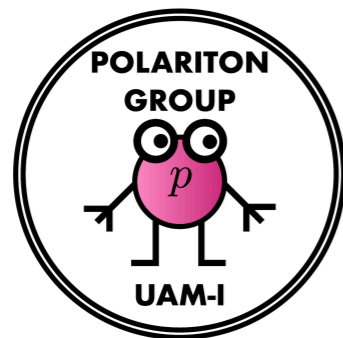


MULTIFRACTALIDAD Y CAOS EN EL MODELO DE DICKE



**MIGUEL A.
BASTARRACHEA
MAGNANI**

**ÁREA DE FÍSICA TEÓRICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA**

**En colaboración con D. Villaseñor, J. Chávez Carlos,
S. A. Lerma Hernández, L. F. Santos y J. G. Hirsch.**

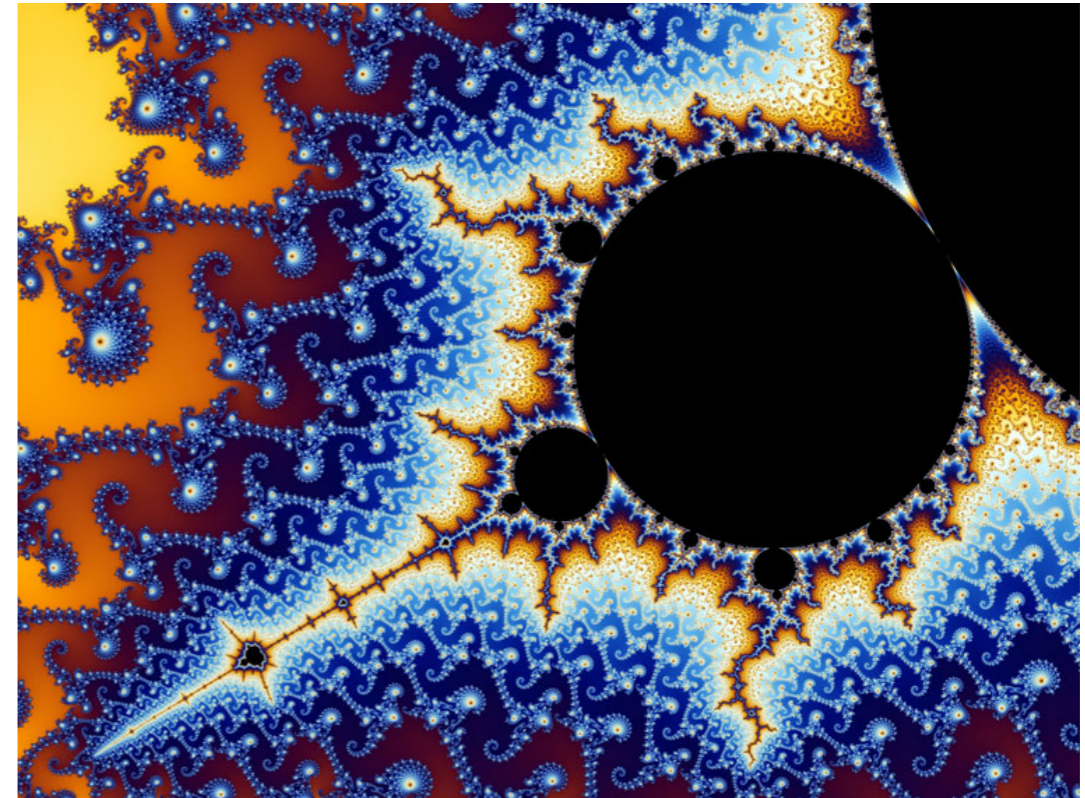
**6a reunión anual del grupo de investigación en caos y termalización
en sistema cuánticos de muchos cuerpos
Universidad Veracruzana (UV)
Xalapa, Veracruz, jueves 19 de enero 2023.**



Universidad Veracruzana

MULTIFRACTALIDAD

La multifractalidad fue introducida originalmente por Mandelbrot para describir la disipación fluctuaciones en la turbulencia.



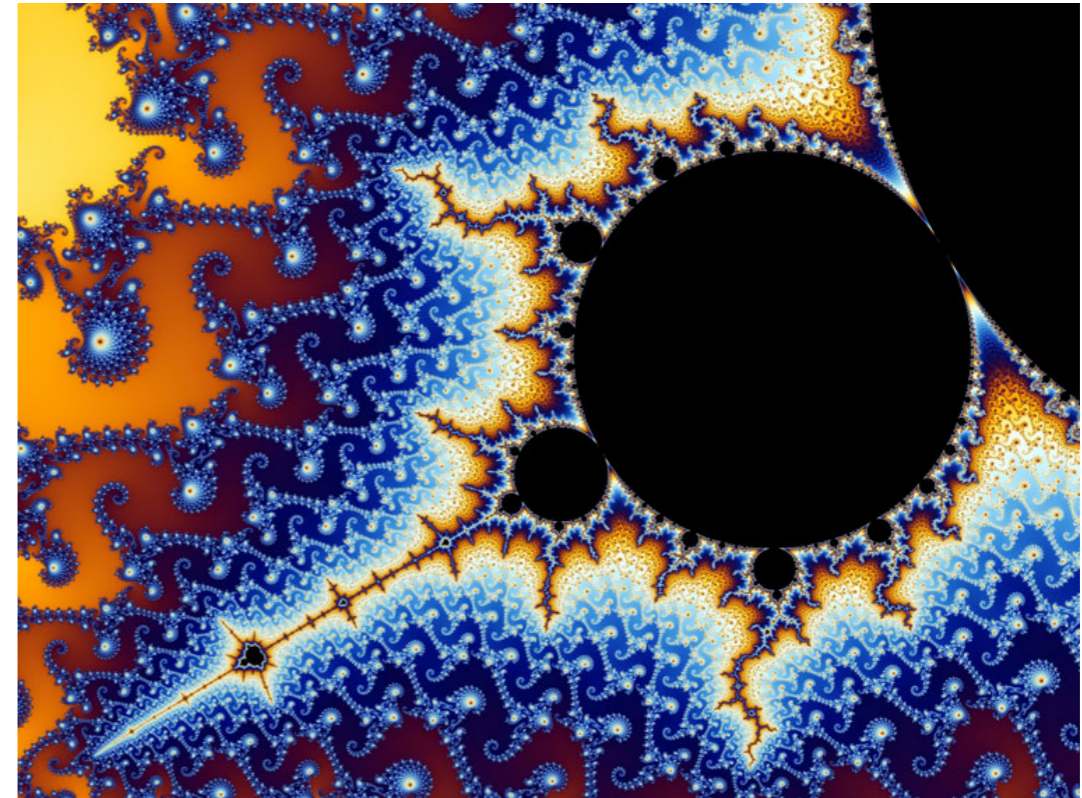
- B. B. Mandelbrot, *Journal of Fluid Mechanics* 62, 331 (1974).
- P. C. Ivanov, et al., *Nature* 399, 461 (1999).
- D. La Rocca, et al., *Journal of Neuroscience Methods* 309, 175 (2018).
- A. Rodríguez, et al., *Phys. Rev. B* 84, 134209 (2011).

MULTIFRACTALIDAD

La multifractalidad fue introducida originalmente por Mandelbrot para describir la disipación fluctuaciones en la turbulencia.

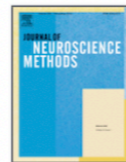
Multifractality in human heartbeat dynamics

Plamen Ch. Ivanov^{*†}, Luís A. Nunes Amaral^{*†}, Ary L. Goldberger[†], Shlomo Havlin[‡], Michael G. Rosenblum[§], Zbigniew R. Struzik^{||} & H. Eugene Stanley^{*}



Journal of Neuroscience Methods

Volume 309, 1 November 2018, Pages 175-187



Self-similarity and multifractality in human brain activity: A wavelet-based analysis of scale-free brain dynamics ☆

Daria La Rocca^{a, b}✉, Nicolas Zilber^{a, b}✉, Patrice Abry^c✉, Virginie van Wassenhove^{a, d}✉, Philippe Ciuciu^{a, b}✉

B. B. Mandelbrot, *Journal of Fluid Mechanics* 62, 331 (1974).

P. C. Ivanov, et al., *Nature* 399, 461 (1999).

D. La Rocca, et al., *Journal of Neuroscience Methods* 309, 175 (2018).

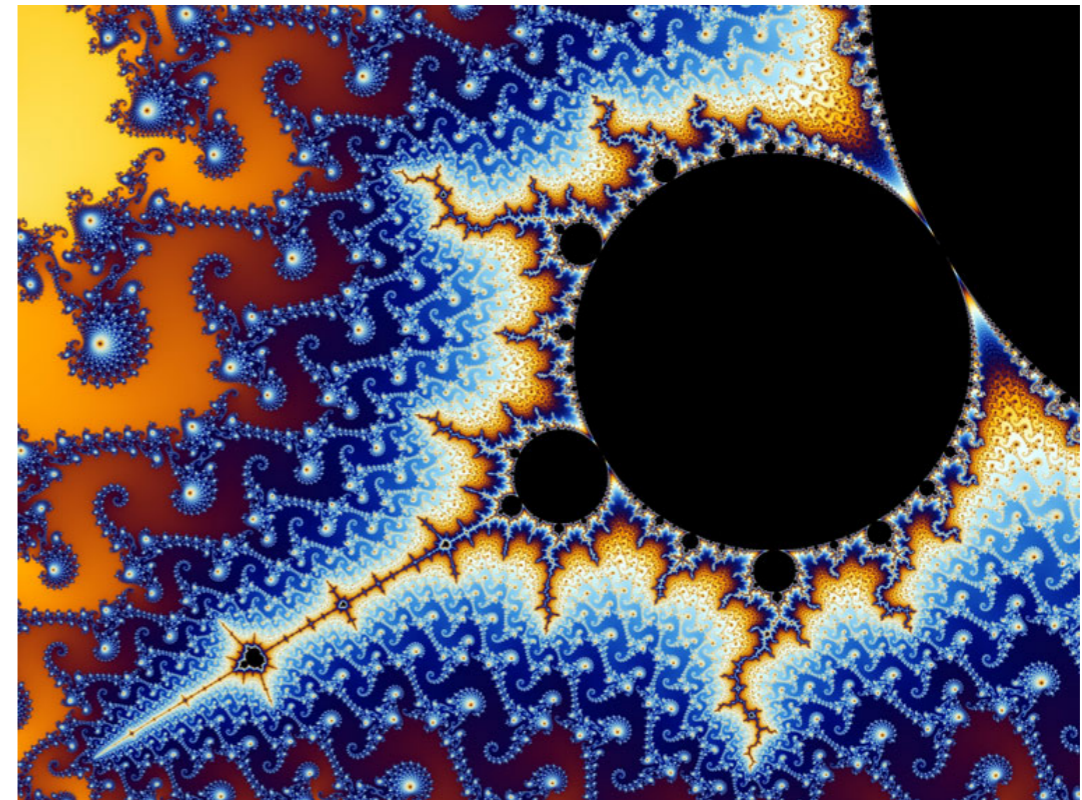
A. Rodriguez, et al., *Phys. Rev. B* 84, 134209 (2011).

MULTIFRACTALIDAD

La multifractalidad fue introducida originalmente por Mandelbrot para describir la disipación fluctuaciones en la turbulencia.

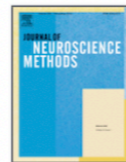
Multifractality in human heartbeat dynamics

Plamen Ch. Ivanov^{*†}, Luís A. Nunes Amaral^{*†}, Ary L. Goldberger[†], Shlomo Havlin[‡], Michael G. Rosenblum[§], Zbigniew R. Struzik^{||} & H. Eugene Stanley^{*}



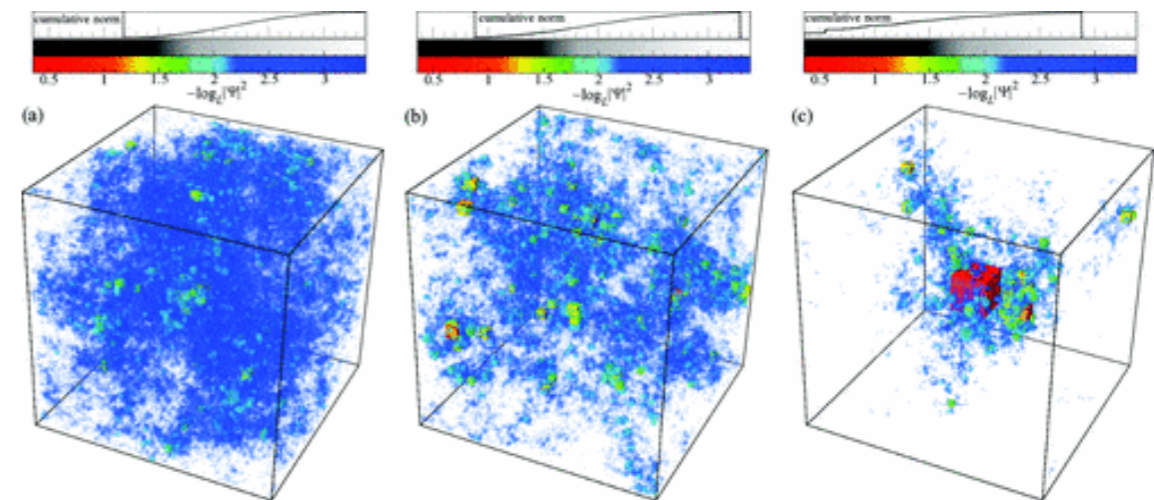
Journal of Neuroscience Methods

Volume 309, 1 November 2018, Pages 175-187



Self-similarity and multifractality in human brain activity: A wavelet-based analysis of scale-free brain dynamics ☆

Daria La Rocca^{a, b}, Nicolas Zilber^{a, b}, Patrice Abry^c, Virginie van Wassenhove^{a, d}, Philippe Ciuciu^{a, b}



Función de onda: modelo 3D de Anderson

- B. B. Mandelbrot, *Journal of Fluid Mechanics* 62, 331 (1974).
- P. C. Ivanov, et al., *Nature* 399, 461 (1999).
- D. La Rocca, et al., *Journal of Neuroscience Methods* 309, 175 (2018).
- A. Rodriguez, et al., *Phys. Rev. B* 84, 134209 (2011).

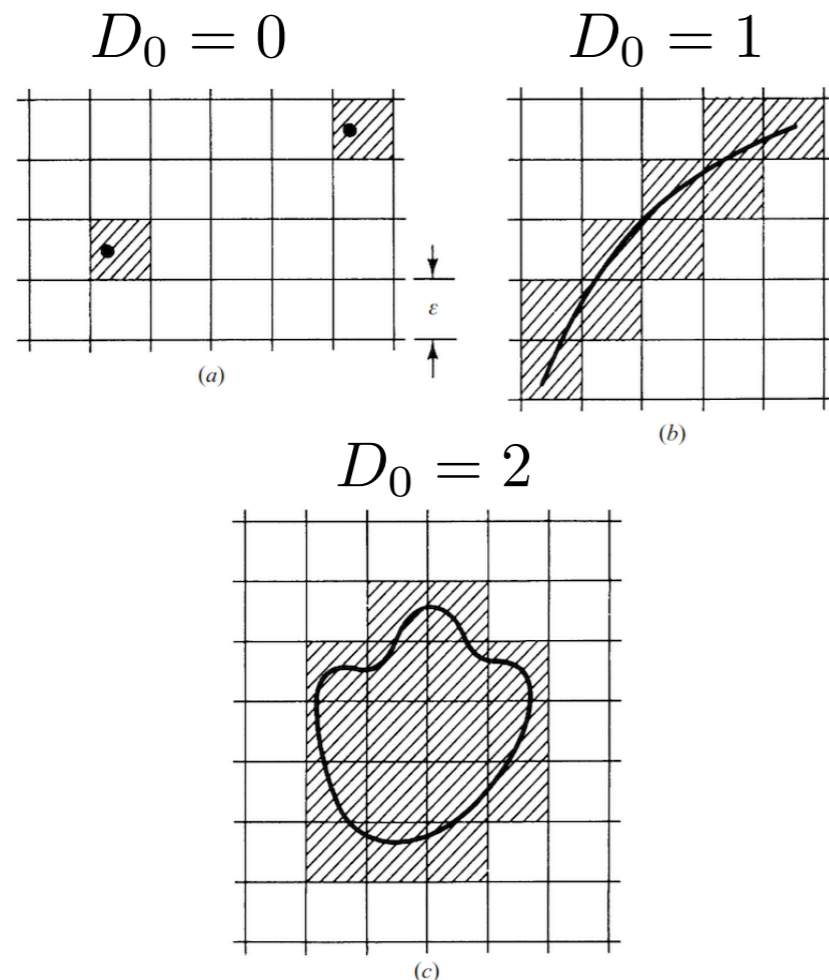
DIMENSIÓN FRACTAL

Imaginemos que tenemos un objeto y que cierto evento puede ocurrir en una parte de él. Entonces, si lo dividimos en partes, podemos preguntarnos por la probabilidad de tener el evento ahí.

Luego, nos preguntamos por el **escalamiento** de la probabilidad conforme el tamaño del objeto aumenta.

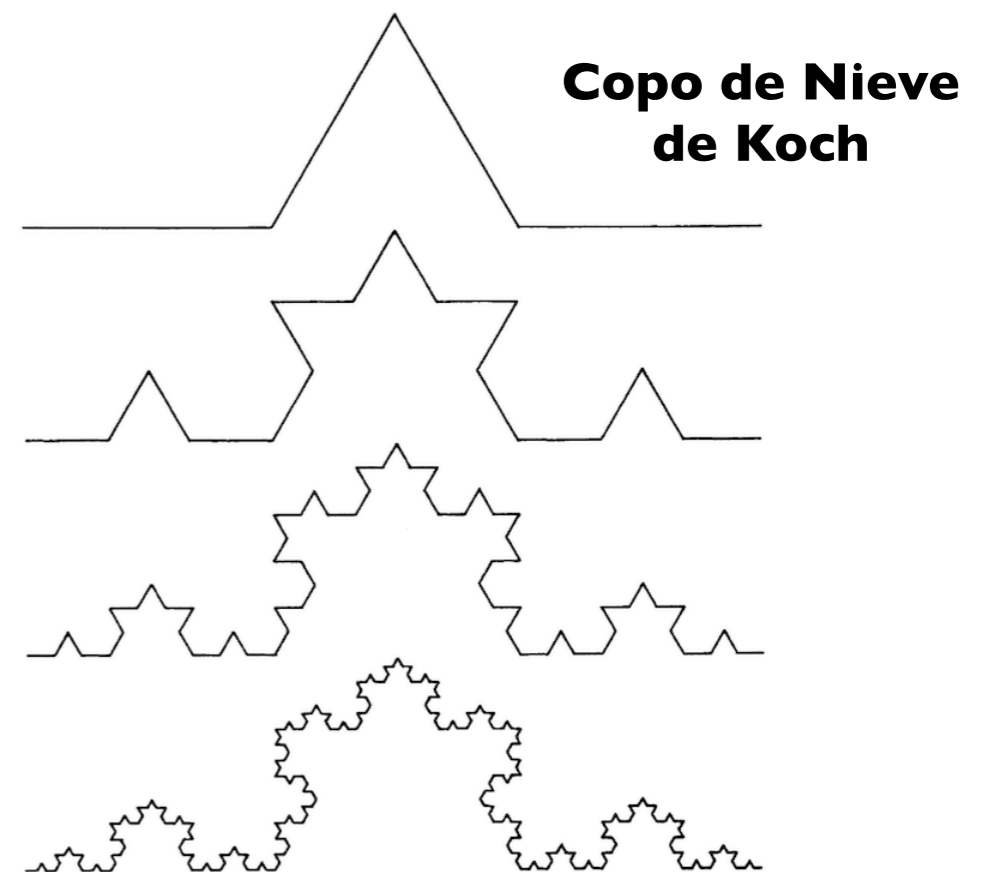
$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_0}$$

Dimensión “box counting”



$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

Dimensión de Hausdorff



$$D_0 = 1.2619$$

MULTIFRACTALIDAD

Si un conjunto de dimensiones fractales de un objeto tiene, a su vez, propiedades fractales, hablamos de que es **multifractal**.

¿Cómo calcular la multifractalidad?

Probabilidad $p_i = \int_{i\epsilon}^{(i+1)\epsilon} d\mu,$

$$Z(q) = \sum_{i=1}^N p_i^q, \quad \text{Función de partición}$$

$$Z(q) \sim \epsilon^{\tau(q)},$$

$$Z(1) = 1, \quad \tau(1) = 0,$$

MULTIFRACTALIDAD

Si un conjunto de dimensiones fractales de un objeto tiene, a su vez, propiedades fractales, hablamos de que es **multifractal**.

Probabilidad $p_i = \int_{i\epsilon}^{(i+1)\epsilon} d\mu,$

$Z(q) = \sum_{i=1}^N p_i^q,$ **Función de partición**

$$Z(q) \sim \epsilon^{\tau(q)},$$

$$Z(1) = 1, \quad \tau(1) = 0,$$

¿Cómo calcular la multifractalidad?

Entonces, si contamos el número de partes que tienen la misma ley de escalamiento, nos podemos preguntar cuál es el escalamiento de ese conjunto.

$$\tau(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z(q, \epsilon)}{1/\epsilon} - D_0$$

Exponentes de masa o multiescalamiento

$$\tau(q) = D_q(q - 1).$$

Dimensión generalizada

D_0 Dimensión de Hausdorff o fractal

D_2 Dimensión de correlación

MULTIFRACTALIDAD

$$\frac{d\tau(q)}{dq} > 0, \quad \frac{d^2\tau(q)}{dq^2} \leq 0.$$

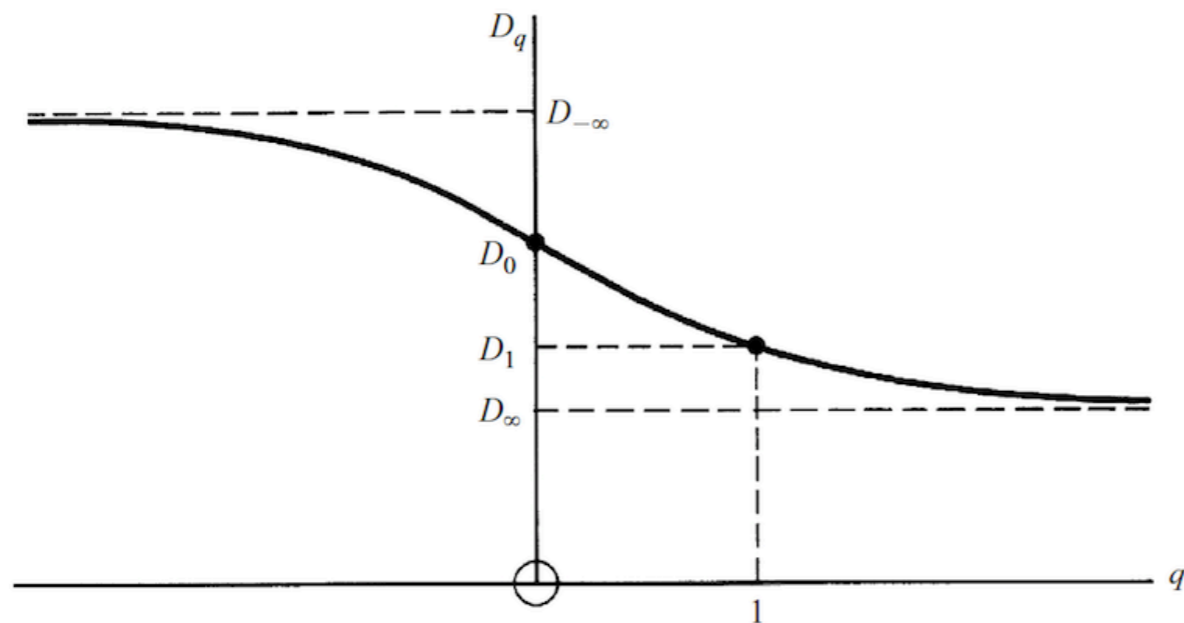
Son funciones monótonas crecientes con curvatura negativa.

$$\frac{dD(q)}{dq} \leq 0 \quad D_{\pm\infty} = D(q \rightarrow \pm\infty).$$

$$0 \leq D_{\infty} \leq D(q) \leq D_{-\infty}$$

Deben ser funciones positivas, monótonas decrecientes y acotadas.

Ejemplo: mapeo de Baker's (atractor hiperbólico)



E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, 2002).

Criterio para la multifractalidad

$$\tau(q) = D_q(q - 1).$$

En un sistema de un sólo fractal:

$$\tau_q \text{ Es lineal} \quad D_q = D_0$$

En un sistema multifractal:

$$\tau_q \text{ Es no lineal} \quad D_q \neq cte$$

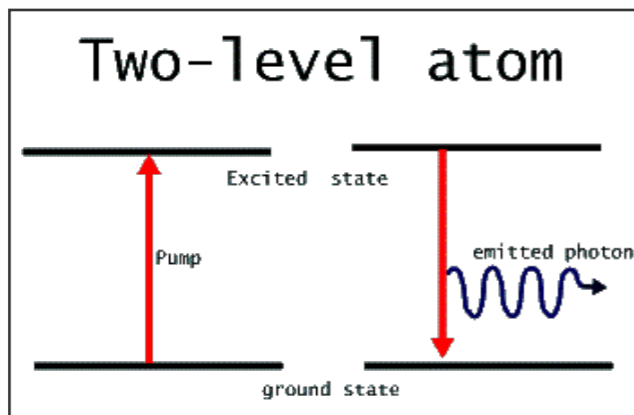
H. Hentschel and I. Procaccia, *Physica D* 8, 435 (1983).
T. C. Halsey, et al., *Phys. Rev. A* 33, 1141 (1986).

HAMILTONIANO DE DICKE

Originalmente, fue planteado como un Hamiltoniano para describir la interacción luz-materia de N átomos en una cavidad.

$$H_M = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p}_i + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \right)^2 + V(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{8\pi} \int d^3\vec{r} \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right)$$

$$\hbar = 1$$



Hipótesis:

1. Gas diluido (sin interacciones entre átomos).
2. Átomos de un sólo electrón.
3. Campo espacialmente homogéneo (LWA).
4. Campo cuantizado en la cavidad.
5. Aproximación de dos niveles.

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2\gamma}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{J}_x.$$

Frecuencia del campo.

Energía de los dos niveles.

Número de átomos.

Acoplamiento luz-materia.

$$\hat{J}_\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_\mu.$$

$$\mu = x, y, z.$$

FASE SUPERRADIANTE

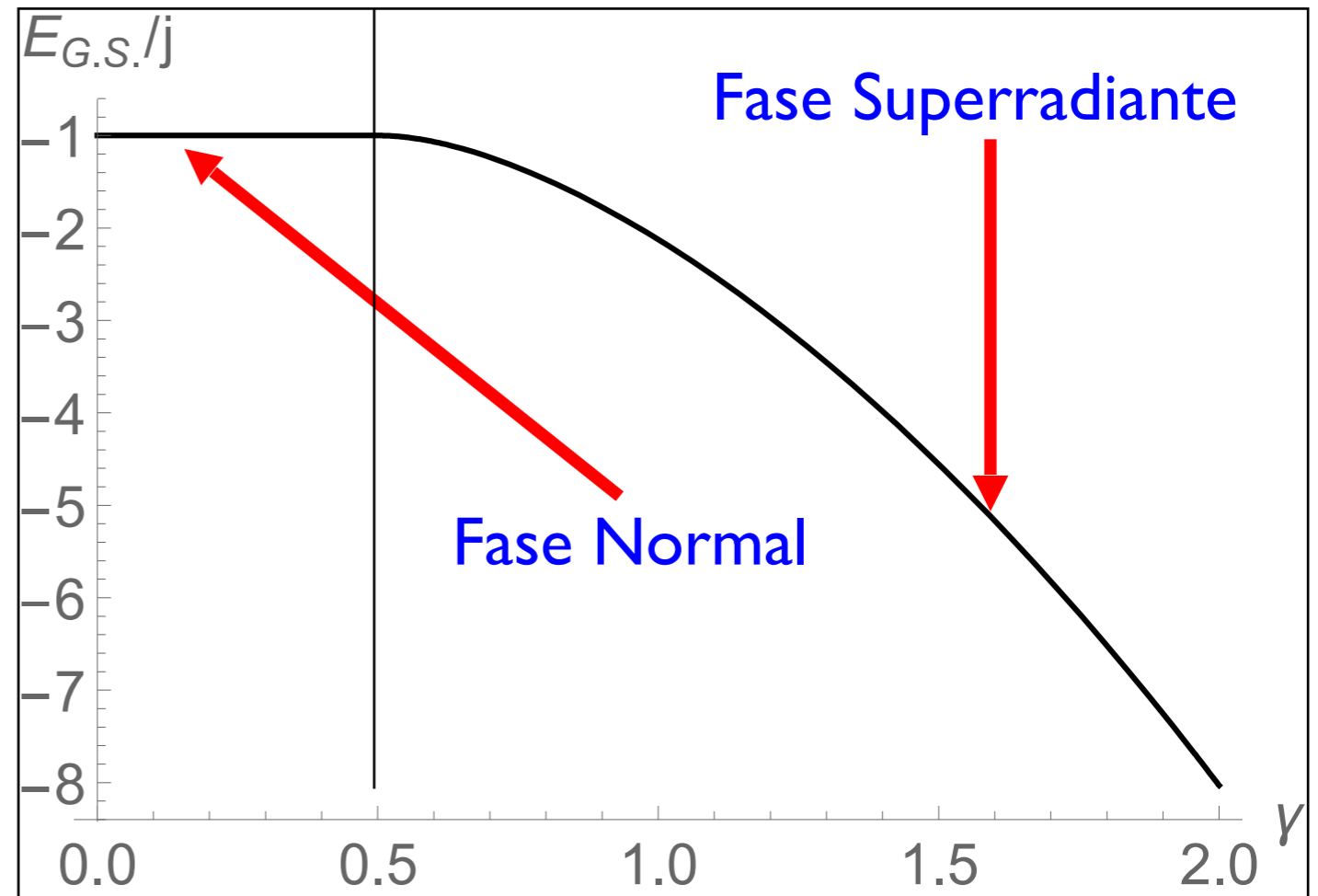
$$\mathcal{U}_{FN}(T) = -\omega_0 \tanh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) \quad \mathcal{U}_{FS}(T) = -\frac{\omega_0}{2} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2 \tanh^2\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\chi(T)\right) + \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^2 \right]$$

Energía interna $T \rightarrow 0$

$$\frac{E_{g.s.}}{\omega_0 j} = \begin{cases} -1 & \gamma < \gamma_c \\ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2 \right] & \gamma > \gamma_c \end{cases}$$

Transición de Fase Cuántica (QPT): Una singularidad en las propiedades del estado base conforme los parámetros del Hamiltoniano varían.

$$\gamma_c = \frac{\sqrt{\omega\omega_0}}{2}$$



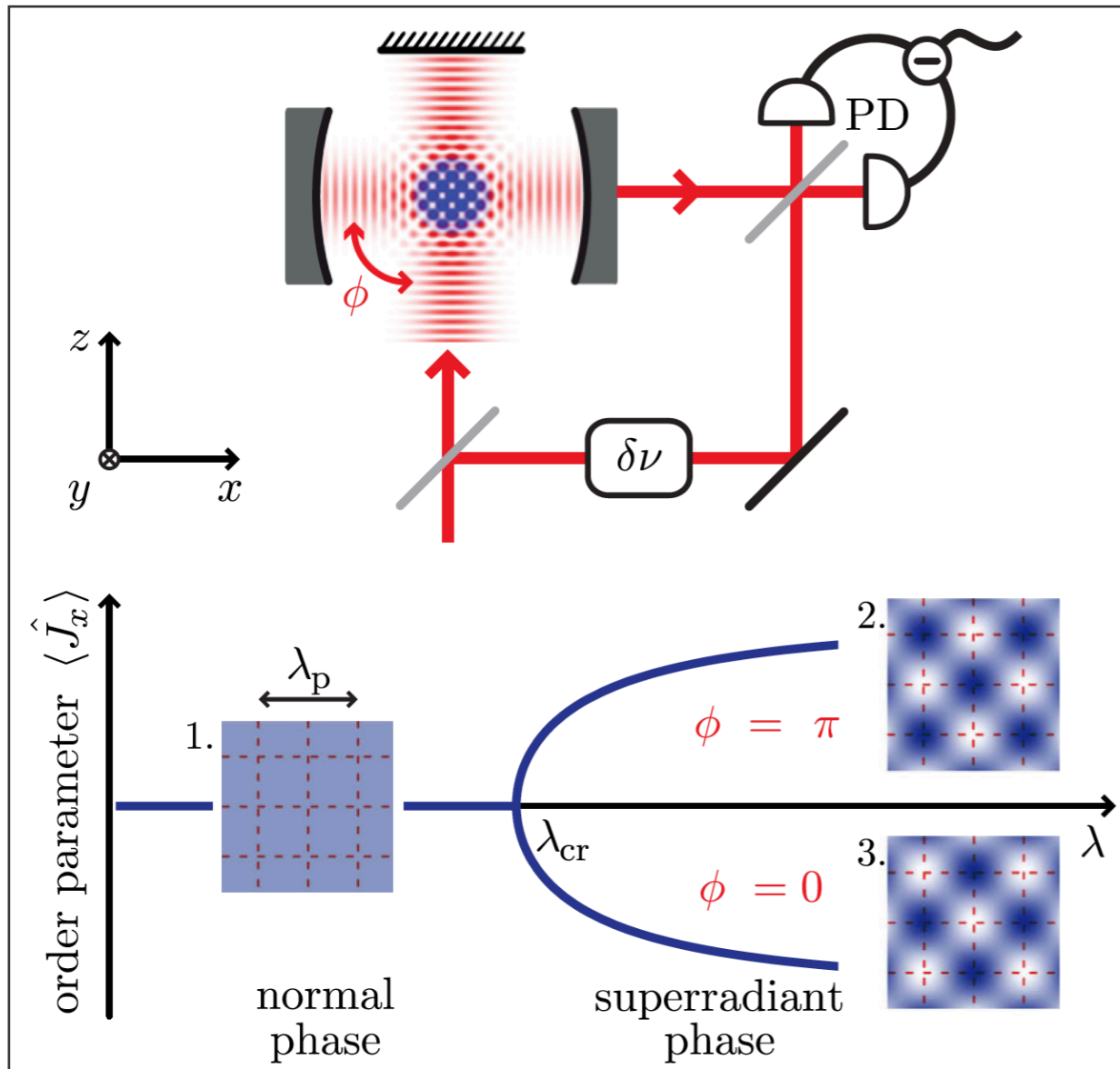
S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, 2011).

K. Hepp and E. H. Lieb, *Ann. Phys. (N.Y.)* 76, 360 (1973); *PRA* 8 (5), 2517 (1973).

C. Emary and T. Brandes, *PRE* 67, 066203 (2003); *PRL*. 90, 044101 (2003).

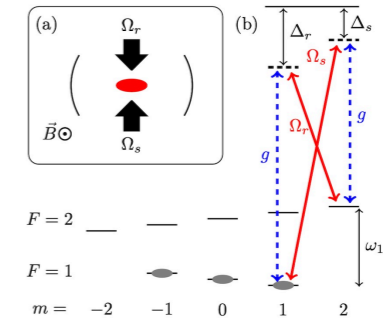
HAMILTONIANO DE DICKE

Transiciones Raman.



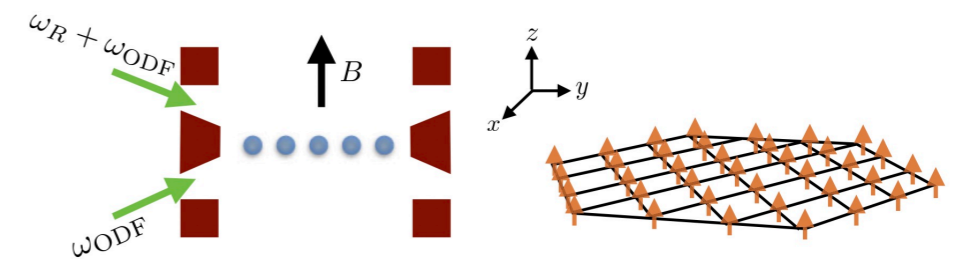
K. Baumann, et al. PRL 107, 140402 (2011).

Átomos en cavidades, qubits superconductores [1], puntos cuántico [2], NV centros en diamante [3], átomos fríos en redes ópticas [4], sistemas optomecánicos [5], and polaritones moleculares [6].



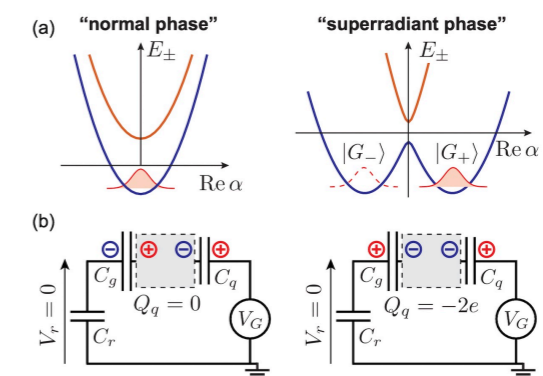
Z. Zhang, et al. PRA 97, 043858 (2018).

Trampa de iones



A. Safavi-Naini, et al. PRL 121, 040503 (2018)

Qubits superconductores



T. Jaako, et al. PRA 94, 033850 (2016).

[1] A. Mezzacapo et al., Sci. Rep. 4, 7482 (2014). [2] M. Scheibner, et al. Nat. Phys. 3 106 (2007). [3] L. J. Zou, et al., PRL 113, 023603 (2014). [4] D. Schneble, Science 300 475 (2003); K. Baumann, et al., Nature 464, 1301 (2010). [5] J. Mumford, et al., Ann. der Phys. 527 115 (2015). [6] J. A. Cwik, et al., PRA 93, 033840 (2016).

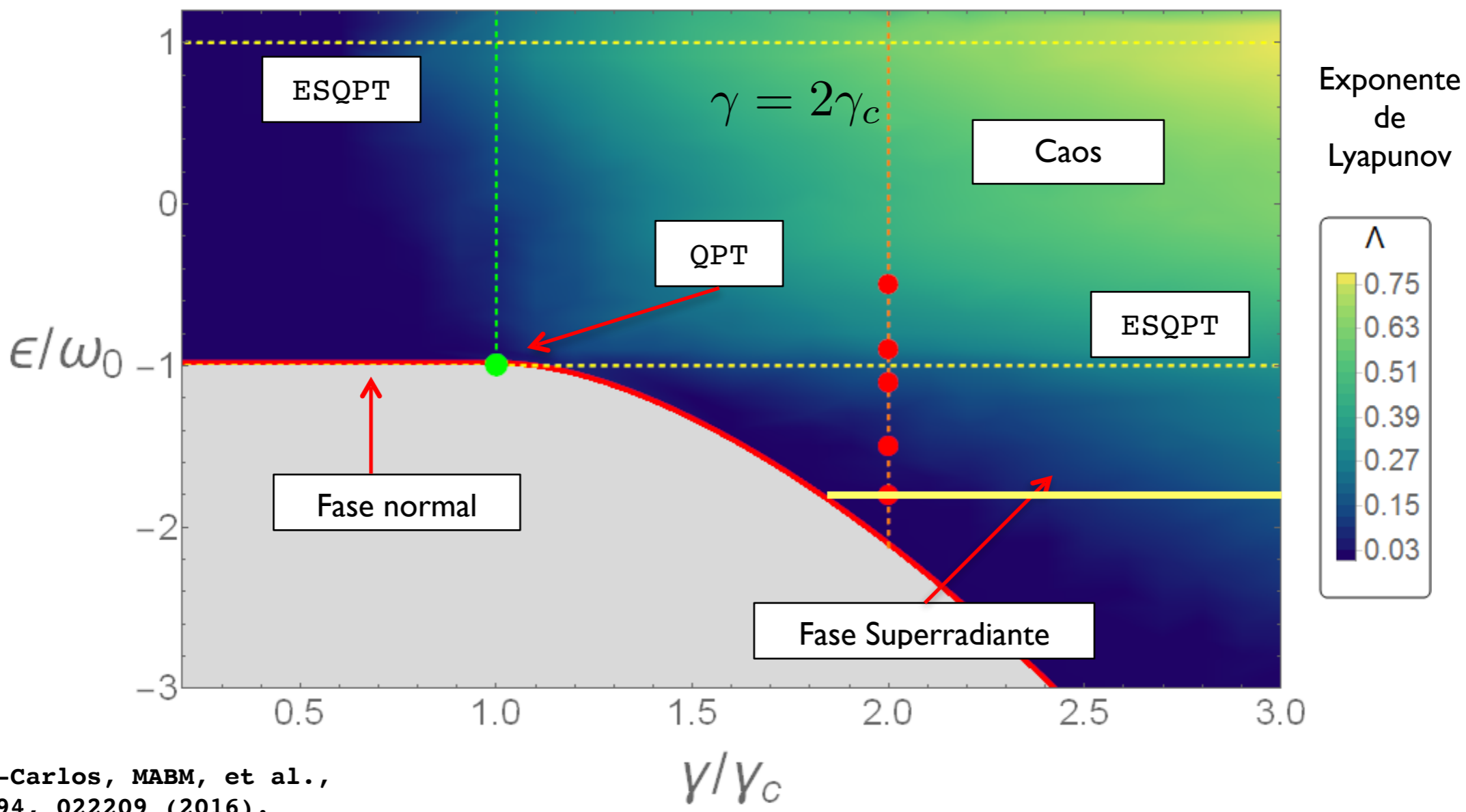
MAPA CLÁSICO DE CAOS Y REGULARIDAD

$h_D^{cl} = j \langle \alpha, z | \hat{H}_D | z, \alpha \rangle$. Valor esperado en estados coherentes de Bloch y Glauber

$$h_D^{cl} = \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2) + \omega_0 j_z + 2\gamma \sqrt{1 - j_z^2} q \cos(\phi).$$

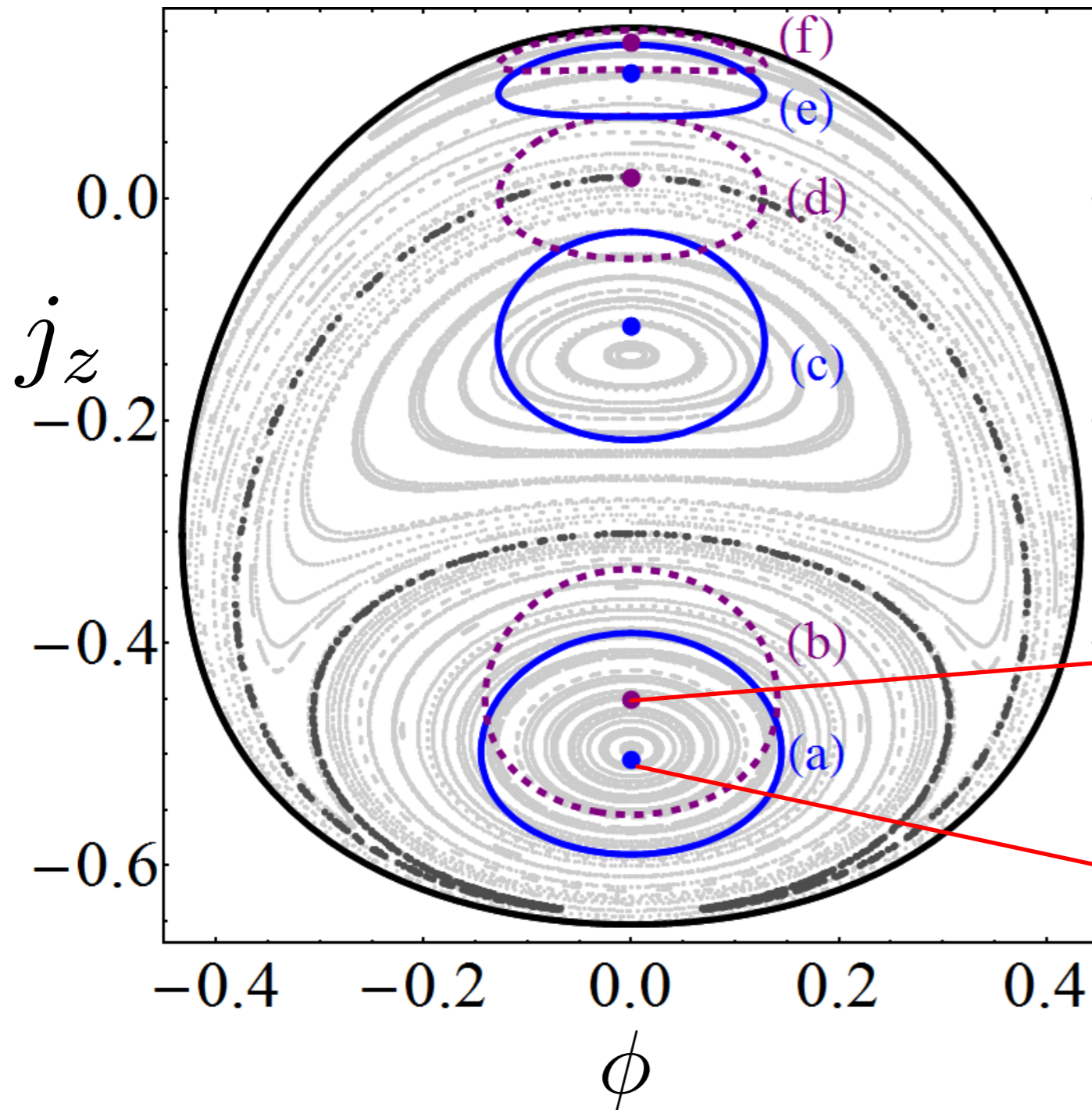
Superficie Hamiltoniana Clásica

M. A. M. de Aguiar, et al., *Quantum Optics* 3, 305 (1991).
 M. A. M. de Aguiar, et al., *Ann. Phys.* 216, 291 (1992).



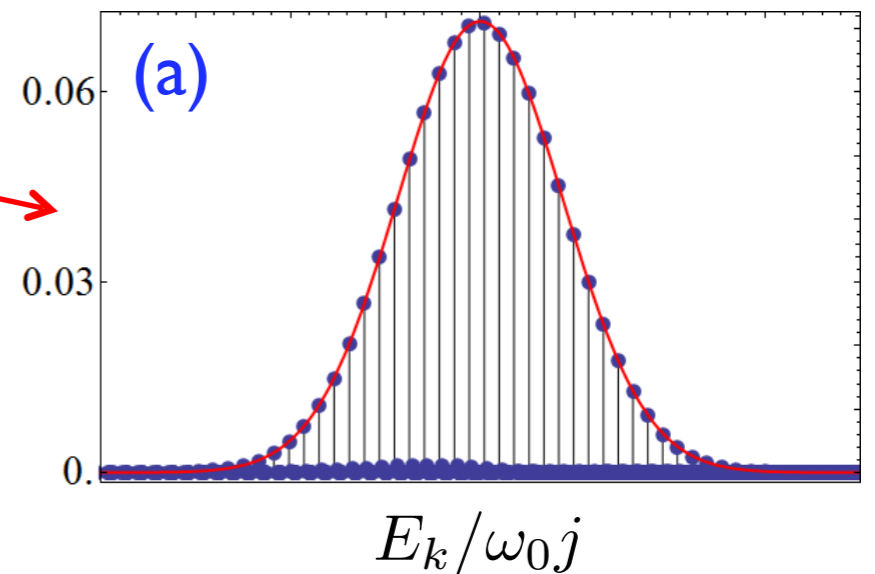
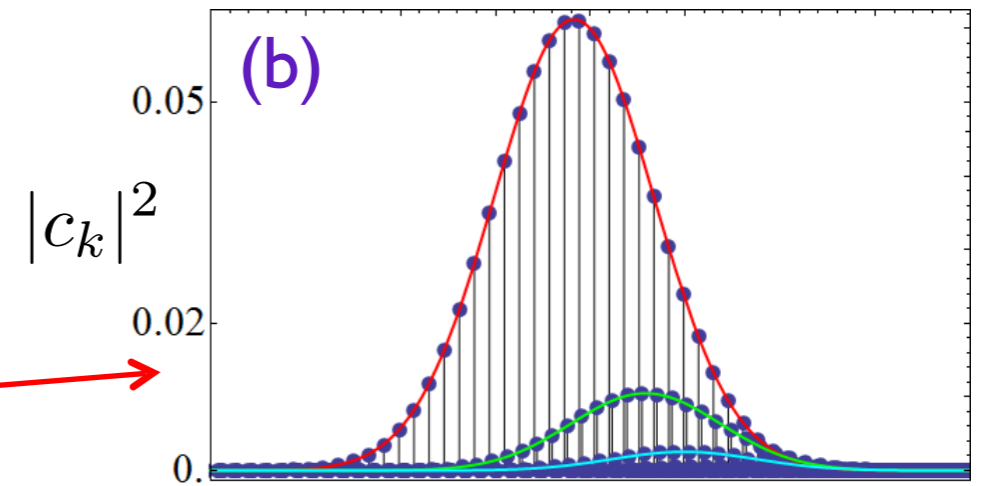
J. Chávez-Carlos, MABM, et al.,
 PRE, 94, 022209 (2016).

ESTADO COHERENTE



$$|\alpha, z\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{(1 + |z|^2)^j} e^{(\alpha \hat{a}^\dagger + z \hat{J}_+)} |0\rangle \otimes |j, -j\rangle.$$

$$(\alpha_0, z_0) = (p^0, q_{\pm}^0, j_z^0, \phi^0)$$



Un punto en el espacio fase clásico será representado por un estado coherente cuyos parámetros coinciden con las coordenadas del punto.

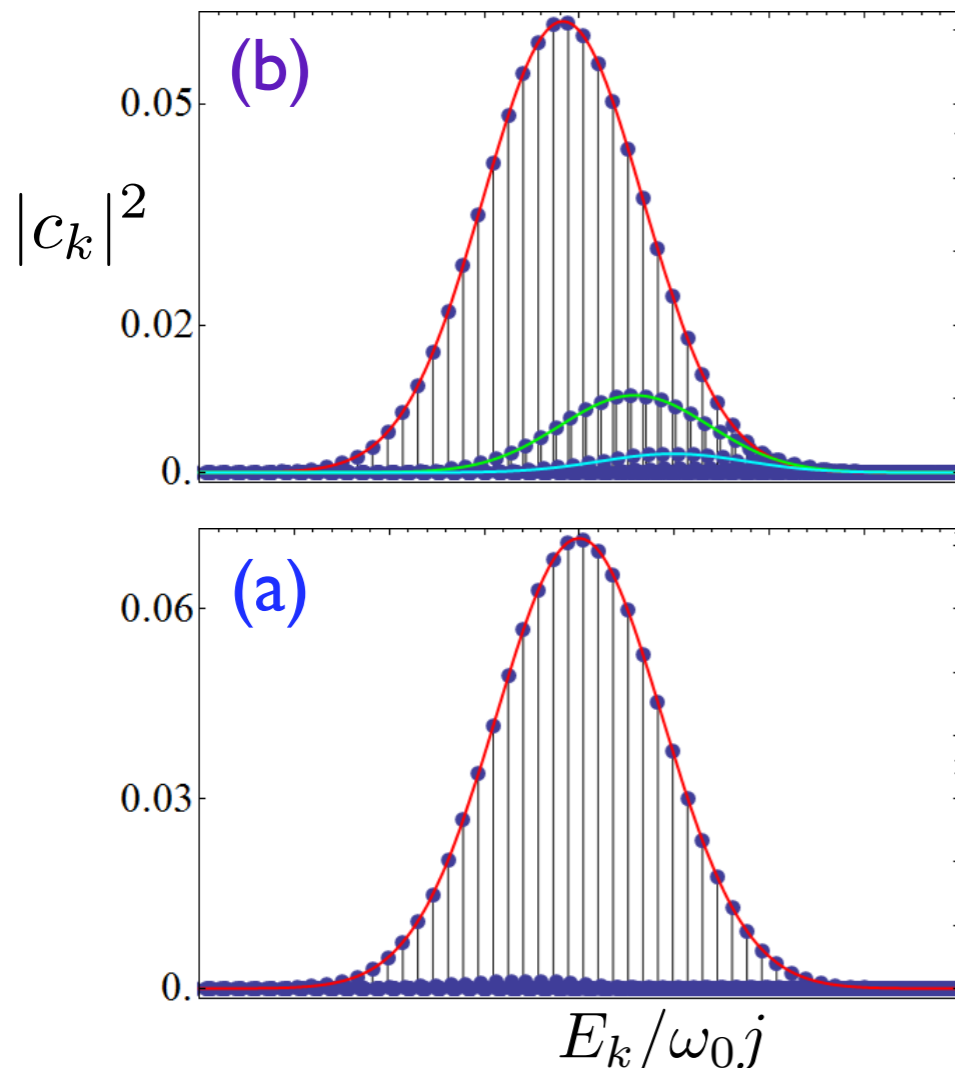
RAZÓN DE PARTICIPACIÓN

$$|\alpha, z\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{(1+|z|^2)^j} e^{(\alpha\hat{a}^\dagger + z\hat{J}_+)} |0\rangle \otimes |j, -j\rangle.$$

$$\hat{H}_D |E_k\rangle = E_k |E_k\rangle.$$

$$(\alpha_0, z_0) = (p^0, q_{\pm}^0, j_z^0, \phi^0)$$

$$IPR = \sum_k |\langle \psi | E_k \rangle|^4$$



Razón de participación inversa

R. J. Bell and P. Dean, *Discuss. Faraday Soc.* 50, 55 (1970).
D. J. Thouless, *Phys. Rep.* 13, 93 (1974).

Es una medida para cuantificar la localización de un estado cuántico en una base (depende de la base).

$$IPR = 1/N$$

Deslocalizado

$$IPR = 1$$

Localizado

Vamos a estudiar la fractalidad de un estado coherente expresado en la eigenbase a partir de las razones de participación.

RAZÓN DE PARTICIPACIÓN

$$IPR_q = \sum_k |\langle \psi | E_k \rangle|^{2q}$$

Razón de participación inversa generalizadas

$$\tau(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln IPR_q}{\ln(N)} - D_0.$$

Vamos a calcular el exponente de masa a partir de las razones de participación inversas generalizadas.

D_2 Corresponde a la razón de participación tradicional.

RAZÓN DE PARTICIPACIÓN

$$IPR_q = \sum_k |\langle \psi | E_k \rangle|^{2q}$$

Razón de participación inversa generalizadas

$$\tau(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln IPR_q}{\ln(N)} - D_0.$$

Vamos a calcular el exponente de masa a partir de las razones de participación inversas generalizadas.

D_2 Corresponde a la razón de participación tradicional.

Para obtener los exponentes de masa, se debe diagonalizar el sistema para un truncamiento dado y varios valores del número de átomos y luego, ajustar la curva para cada valor de q .

Advertencia:

El modelo de Dicke tiene un espacio de Hilbert no acotado por el espacio fotónico. En consecuencia, el análisis multifractal tradicional no se puede realizar por completo.

RAZÓN DE PARTICIPACIÓN

$$IPR_q = \sum_k |\langle \psi | E_k \rangle|^{2q}$$

Razón de participación inversa generalizadas

$$\tau(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln IPR_q}{\ln(N)} - D_0.$$

Vamos a calcular el exponente de masa a partir de las razones de participación inversas generalizadas.

D_2 Corresponde a la razón de participación tradicional.

Estado gaussiano aleatorio

$$|c_k^{(r)}|^2 = \frac{r_k}{\sum_k \exp\left(-\frac{(E_k - \bar{E})}{2\sigma^2}\right)} \exp\left(-\frac{(E_k - \bar{E})}{2\sigma^2}\right).$$

$$IPR_q^{(r)} \propto j^{(3/2)(1-q)}.$$

Para obtener los exponentes de masa, se debe diagonalizar el sistema para un truncamiento dado y varios valores del número de átomos y luego, ajustar la curva para cada valor de q .

Advertencia:

El modelo de Dicke tiene un espacio de Hilbert no acotado por el espacio fotónico. En consecuencia, el análisis multifractal tradicional no se puede realizar por completo.

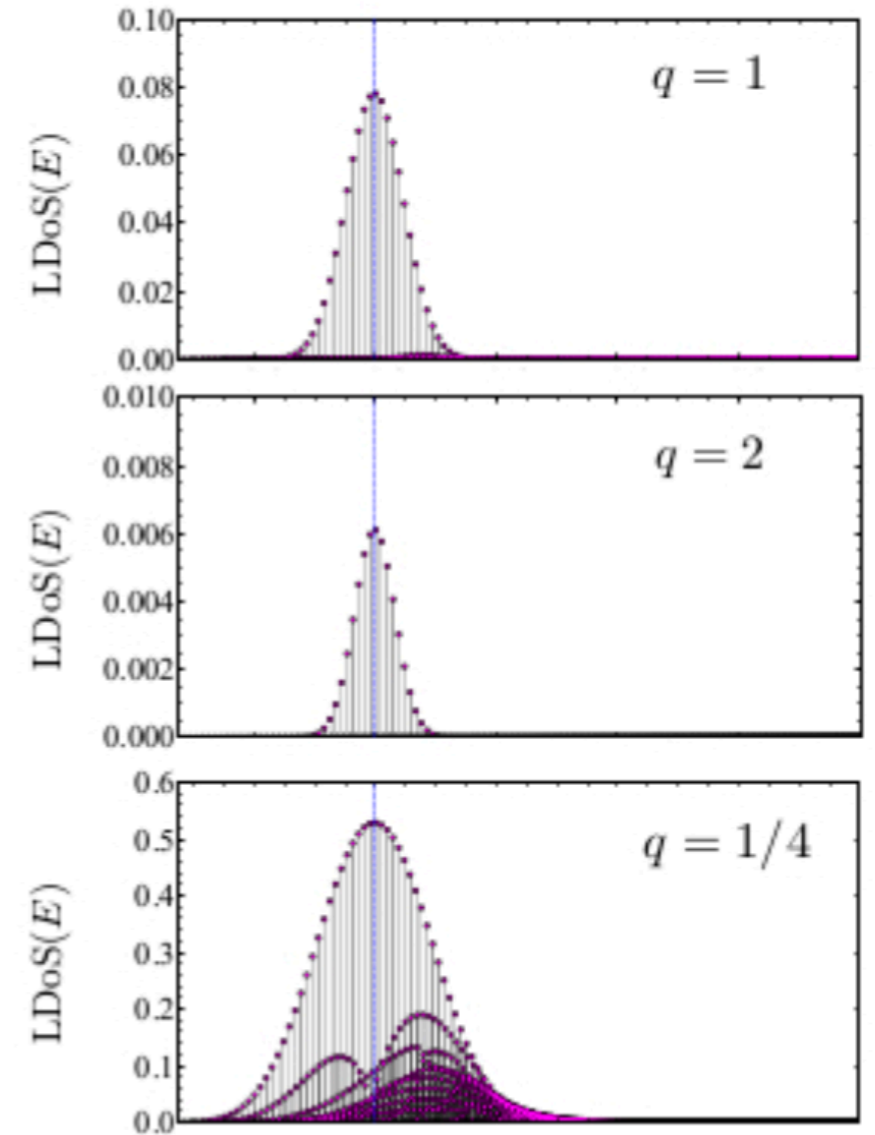
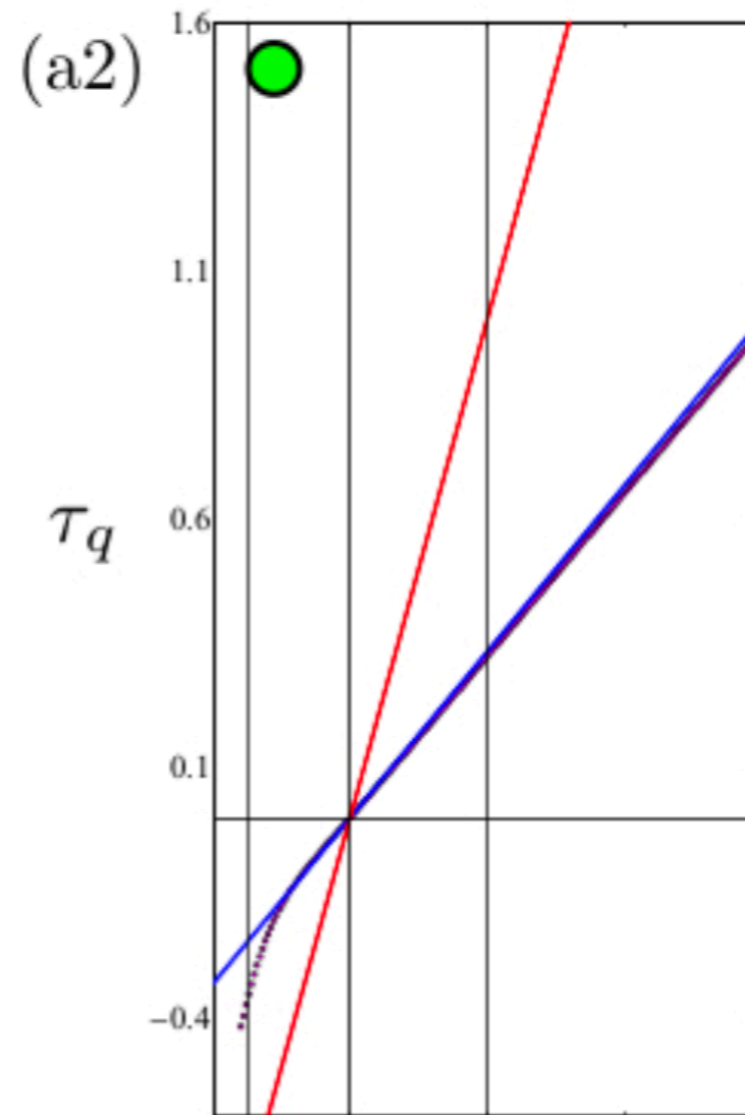
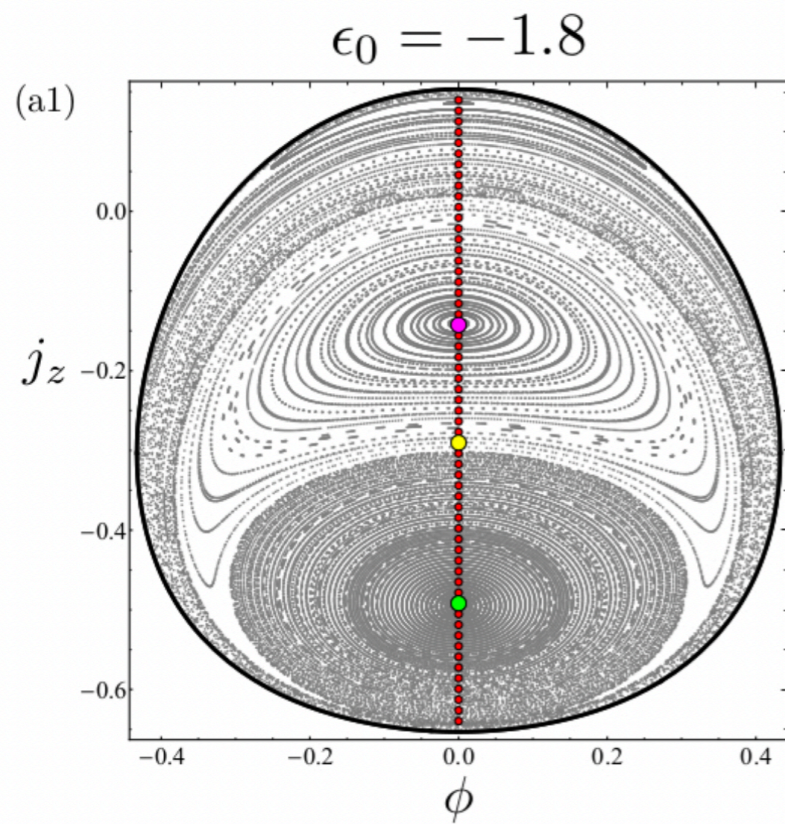
Estado gaussiano

(Estado coherente centrado en una Isla de regularidad)

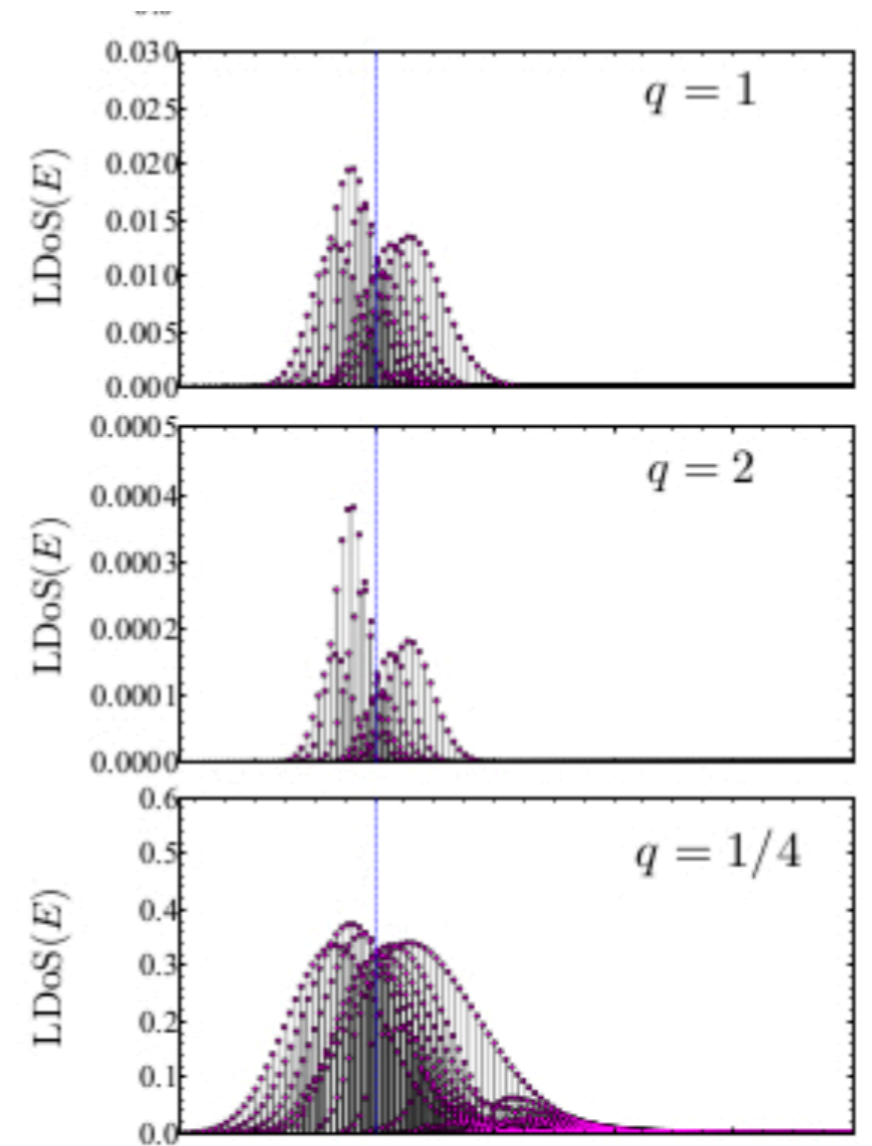
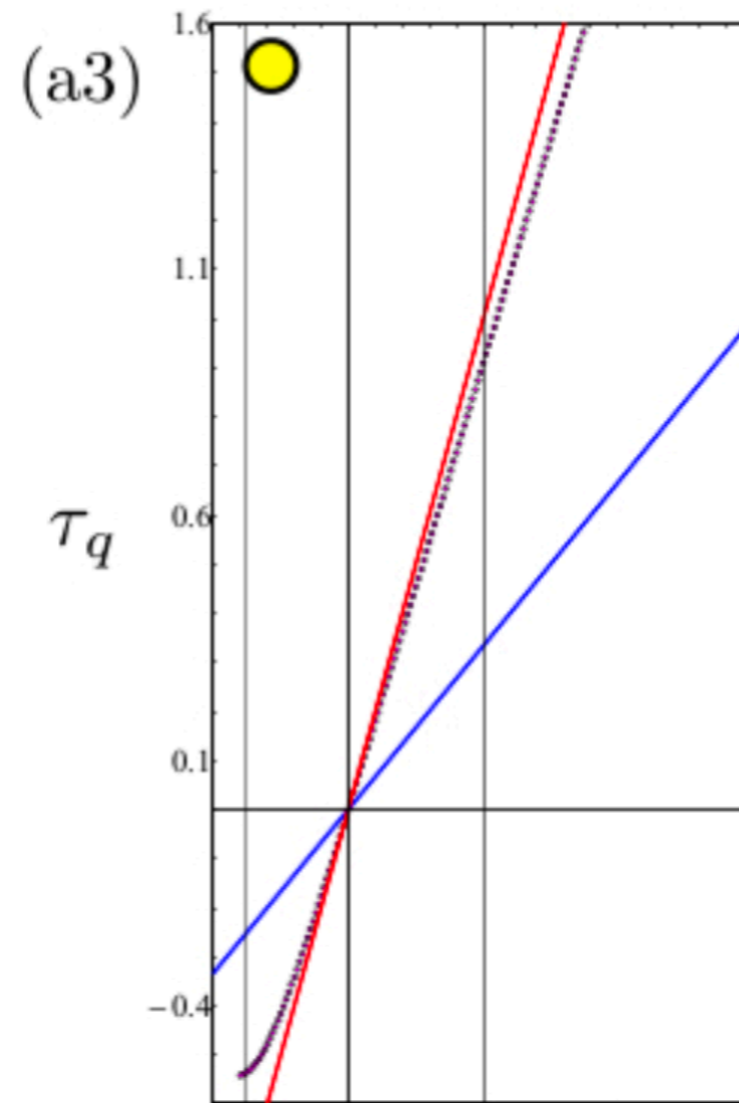
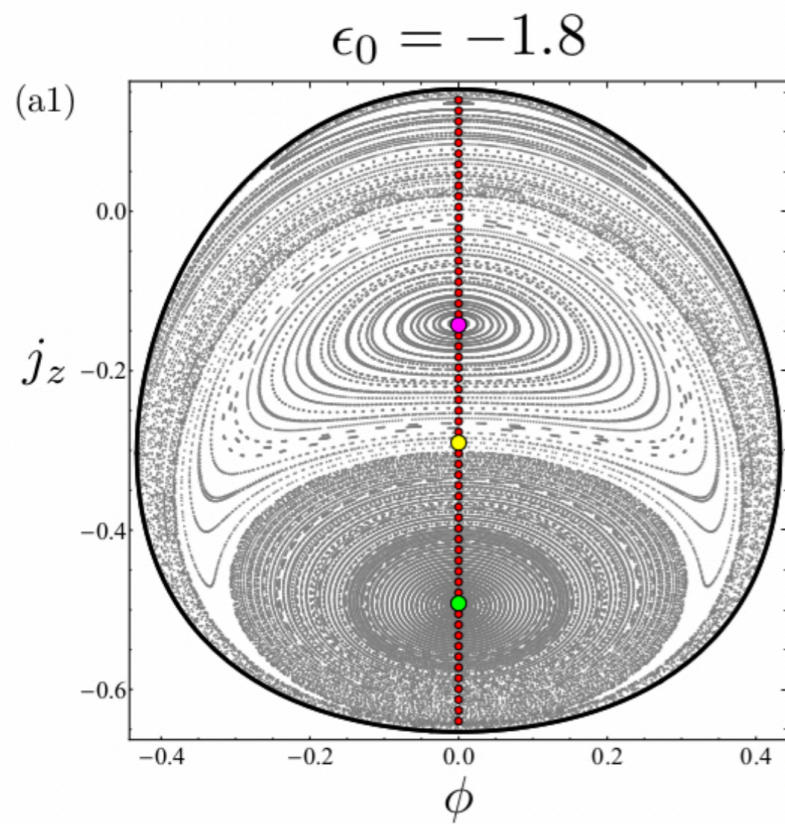
$$|c_c^{(r)}|^2 = \frac{1}{\sum_k \exp\left(-\frac{(E_k - \bar{E})}{2\sigma_c^2}\right)} \exp\left(-\frac{(E_k - \bar{E})}{2\sigma_c^2}\right),$$

$$IPR_q^{(c)} \sim j^{(1/2)(1-q)} = \left[j^{(3/2)} \right]^{1/3(1-q)}.$$

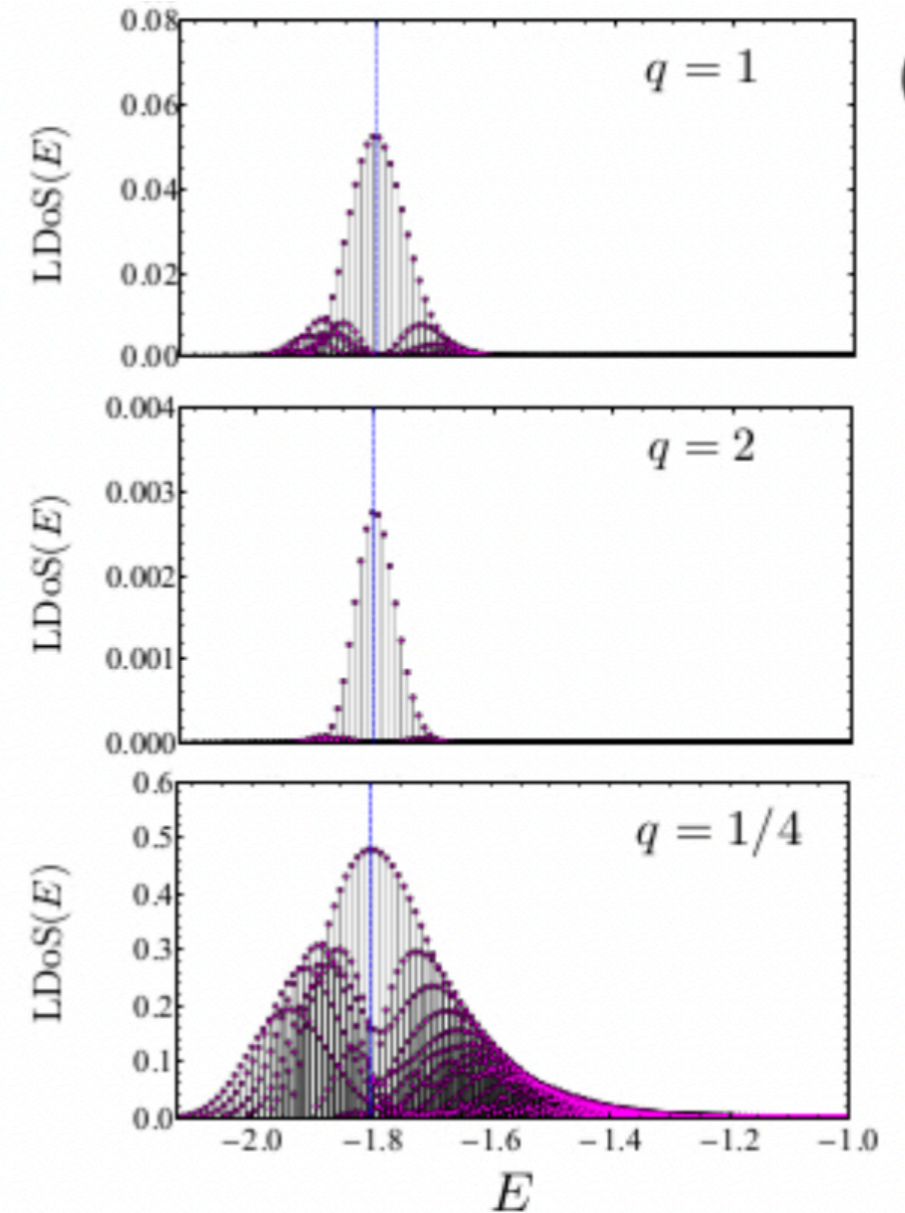
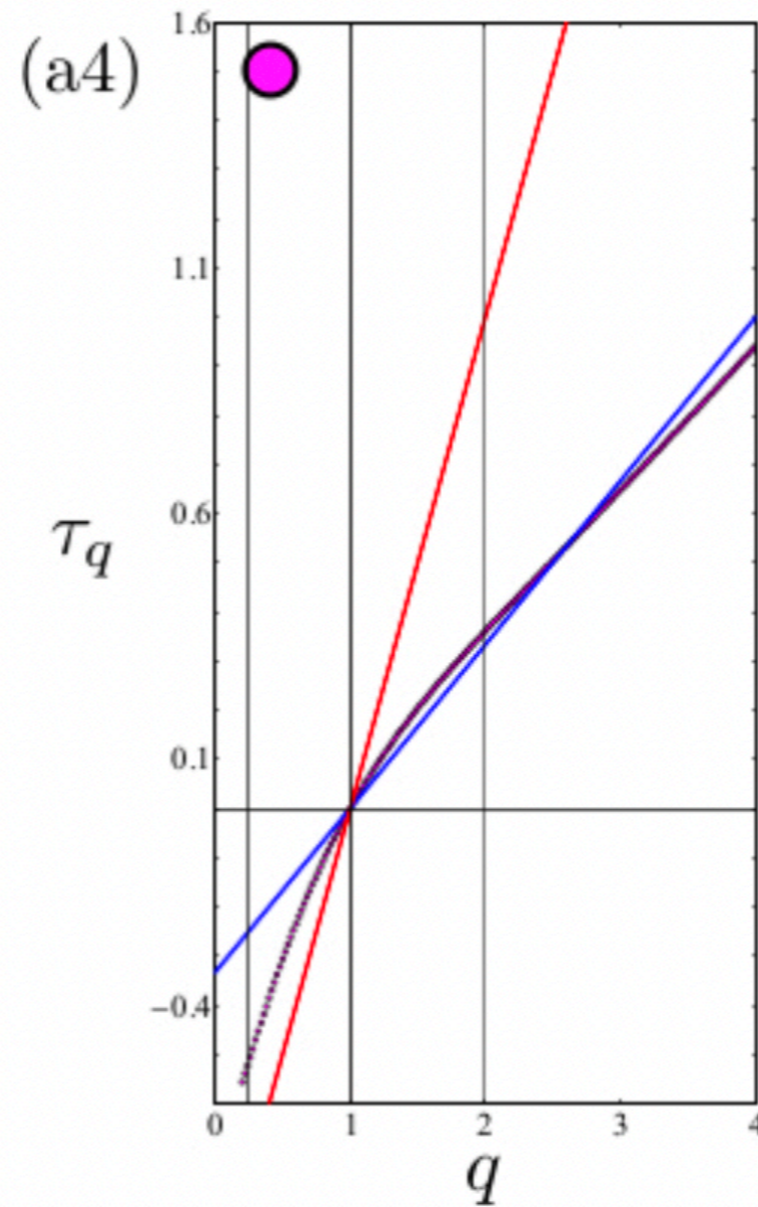
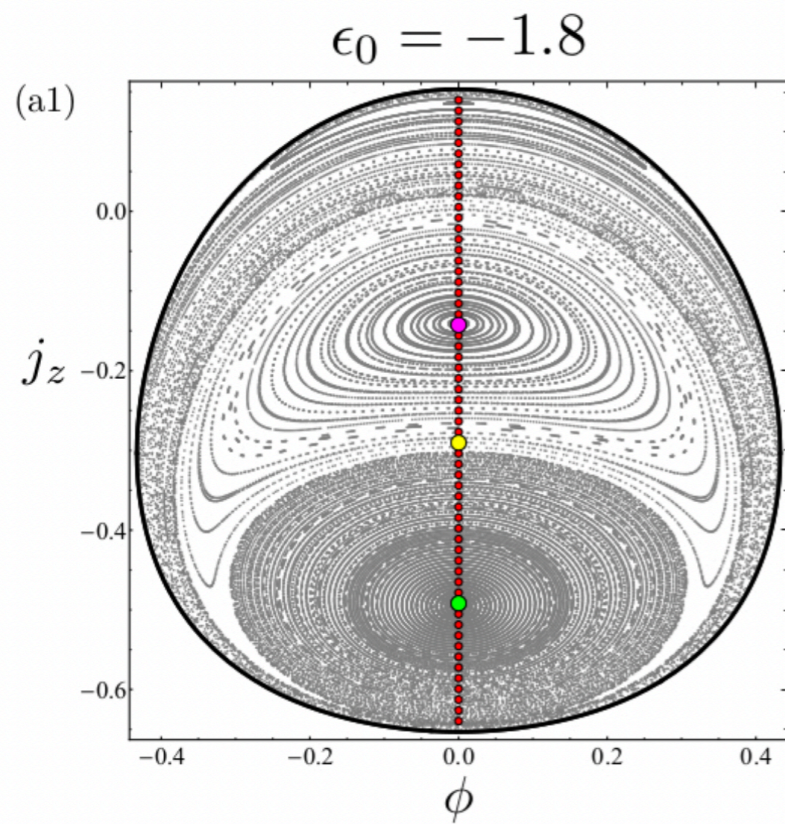
MULTIFRACTALIDAD EN EL MODELO DE DICKE



MULTIFRACTALIDAD EN EL MODELO DE DICKE



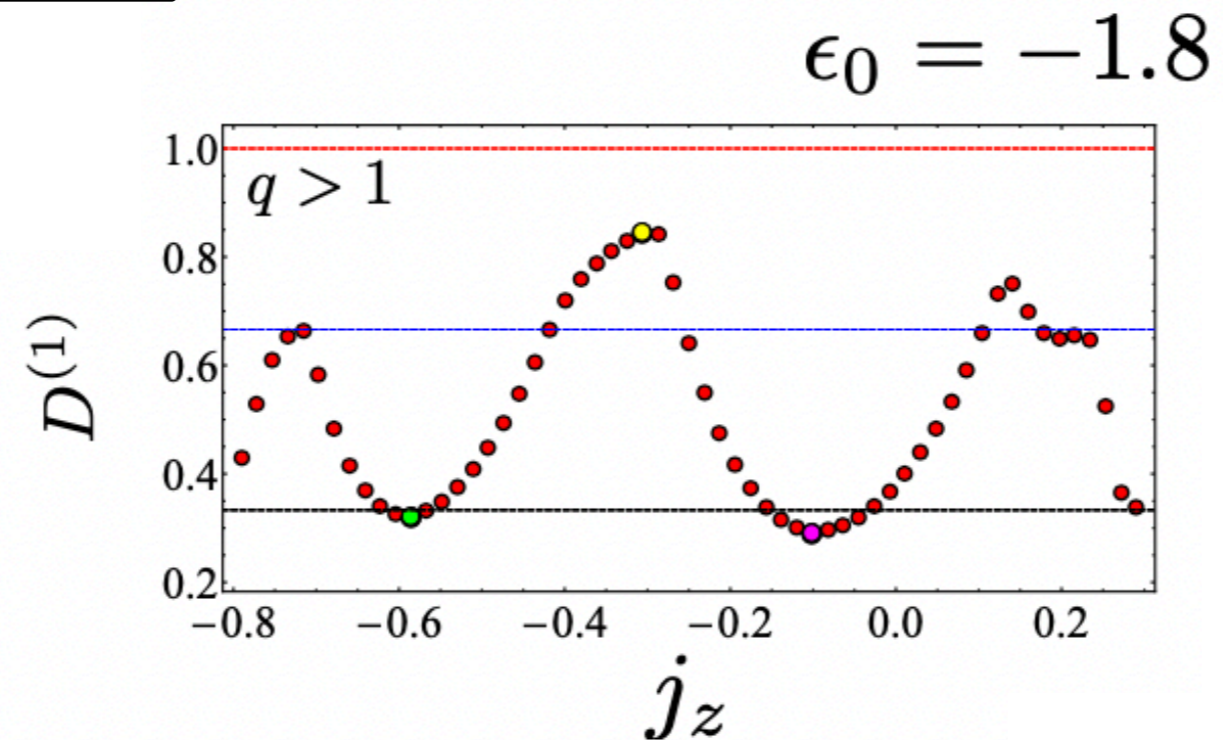
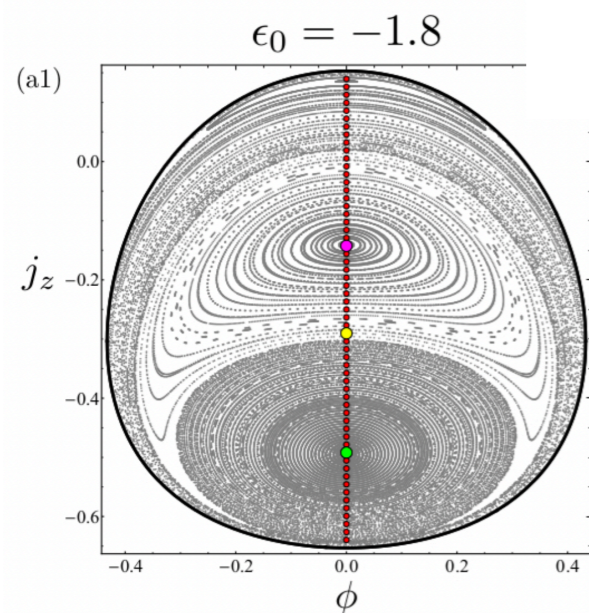
MULTIFRACTALIDAD EN EL MODELO DE DICKE



CONCLUSIONES

Aproximamos a una recta.

$$\tau_q \simeq D(q - 1)$$



CONCLUSIONES

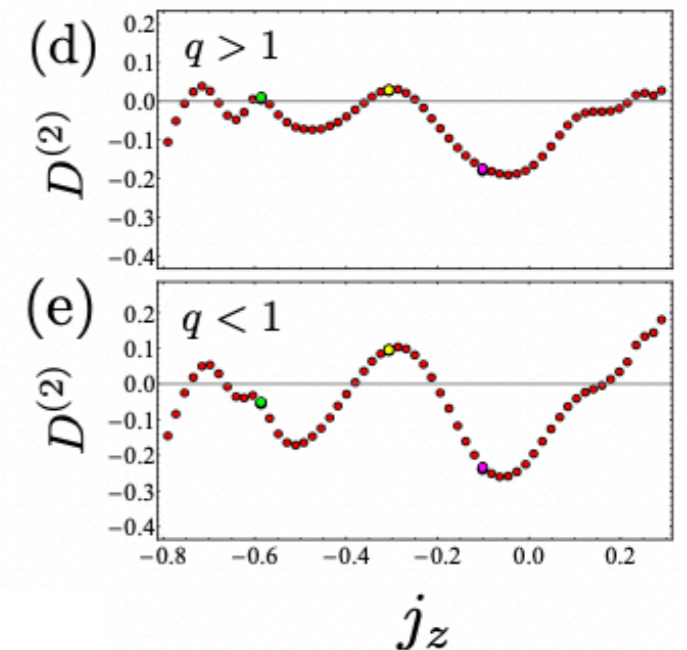
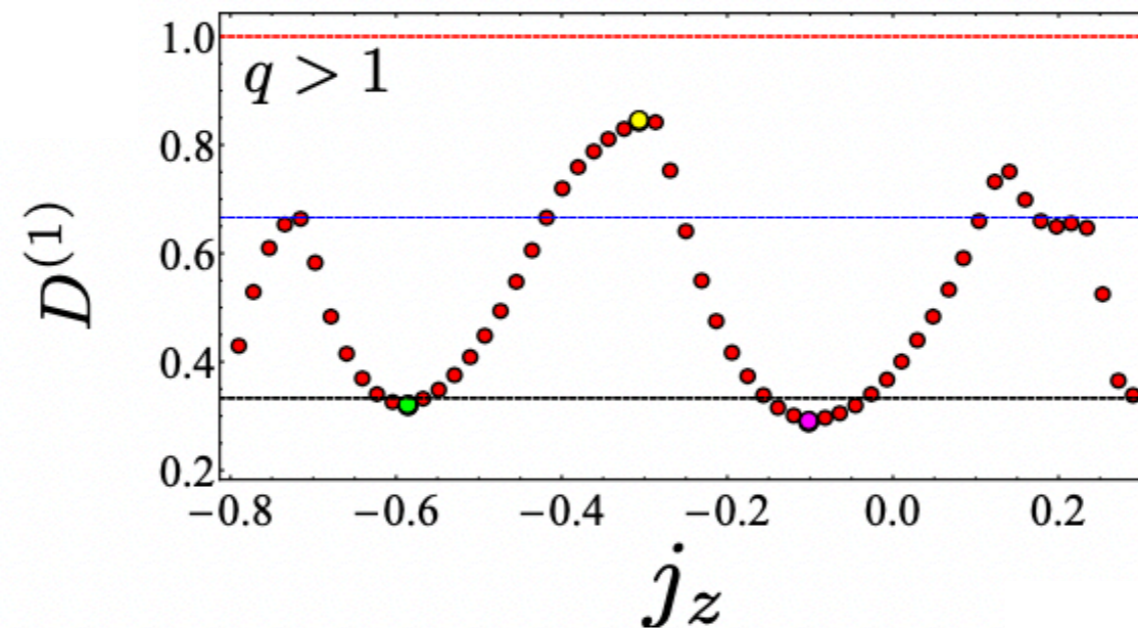
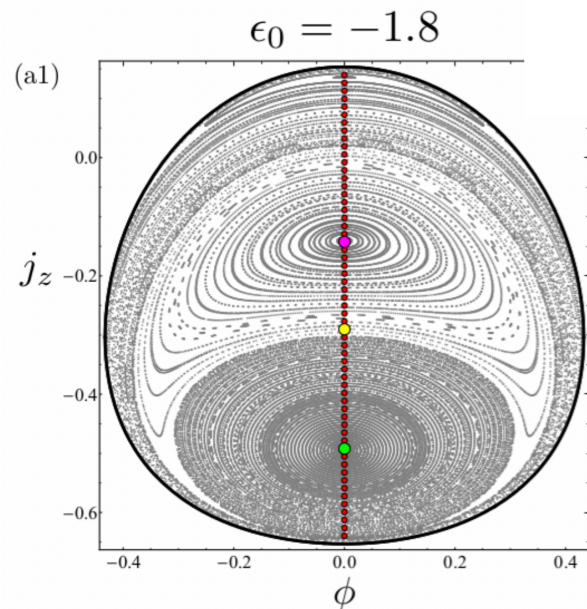
Multifractalidad débil

Aproximamos a una recta.

$$\tau_q \simeq D(q - 1)$$

$$\tau_q \simeq D(q - 1) - \gamma q(q - 1)$$

$$\epsilon_0 = -1.8$$



CONCLUSIONES

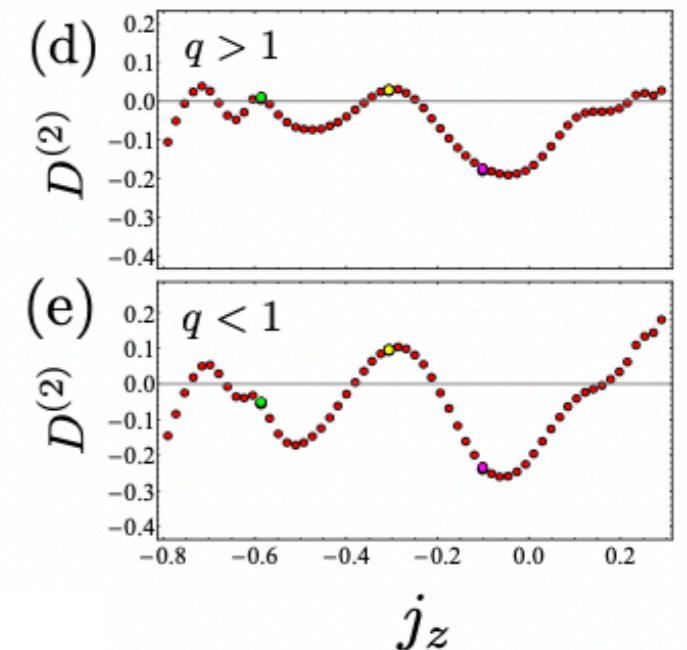
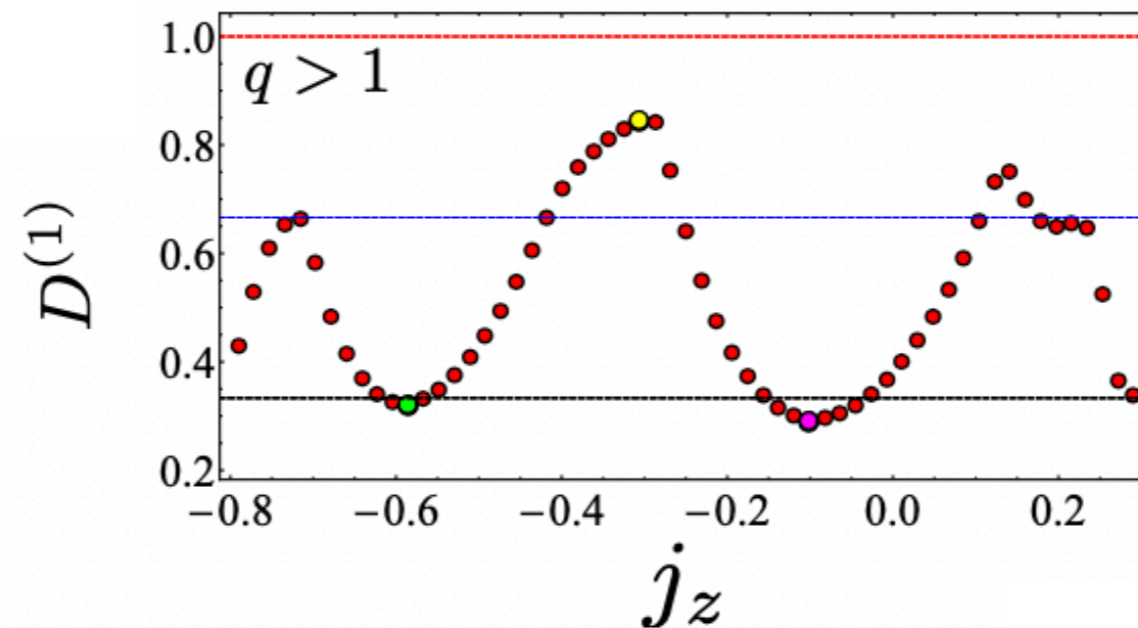
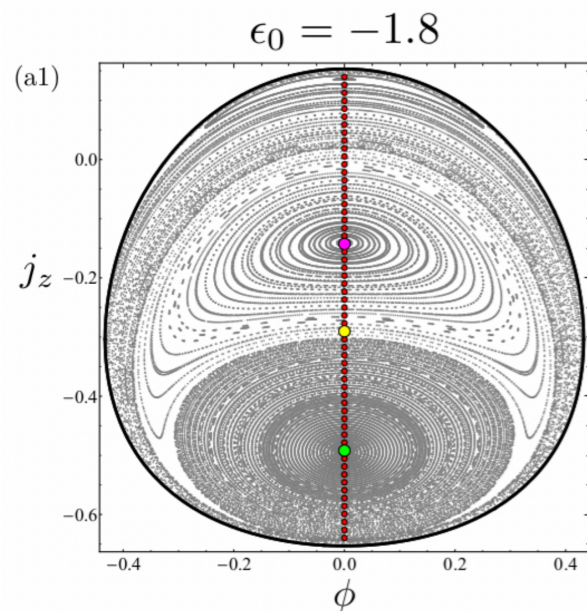
Multifractalidad débil

Aproximamos a una recta.

$$\tau_q \simeq D(q - 1)$$

$$\tau_q \simeq D(q - 1) - \gamma q(q - 1)$$

$$\epsilon_0 = -1.8$$



Calculamos la multifractalidad de un estado coherente en el modelo de Dicke en la fase superradiante donde, dentro de la correspondencia clásico-cuántica podemos cuantificar el caos clásico empleando información cuántica.

Retos:

1. No hay una teoría general que indique el significado de la multifractalidad en regiones específicas de q .
2. Aunque para $q=1$ las funciones de onda del modelo de Dicke se encuentren convergidas, el truncamiento termina impactando en el análisis multifractal.
3. El ajuste para identificar la no-linealidad es complicado, porque cambia de punto en punto.

PERSPECTIVAS

Fractalidad, multifractalidad y ...

...tiempos de recurrencia de Poincaré.

...complejidad del espacio fase

...otras estructuras como islas de estabilidad dentro de islas.

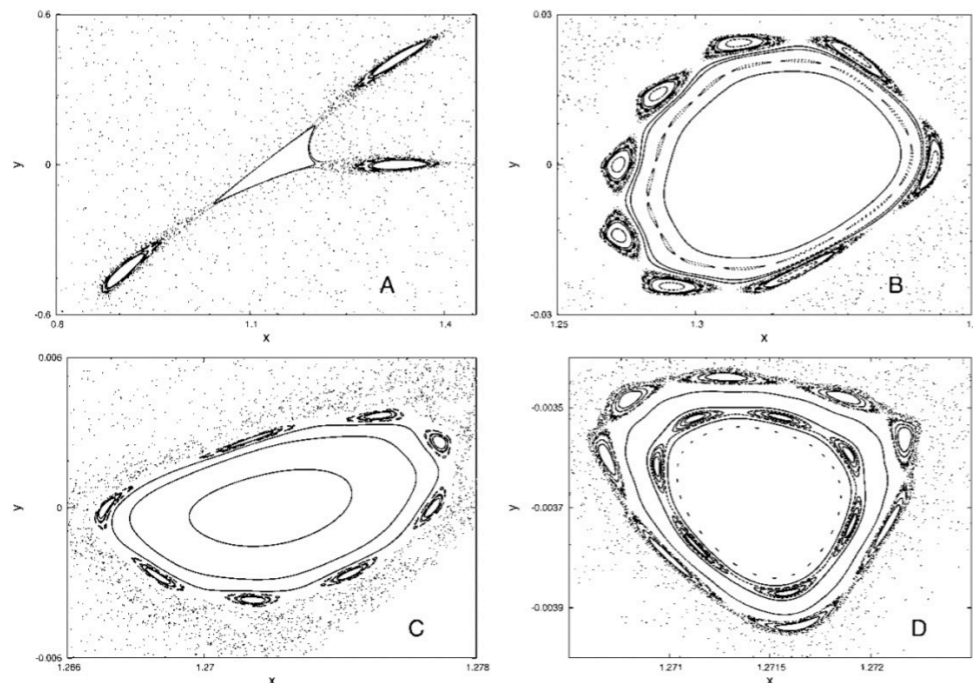
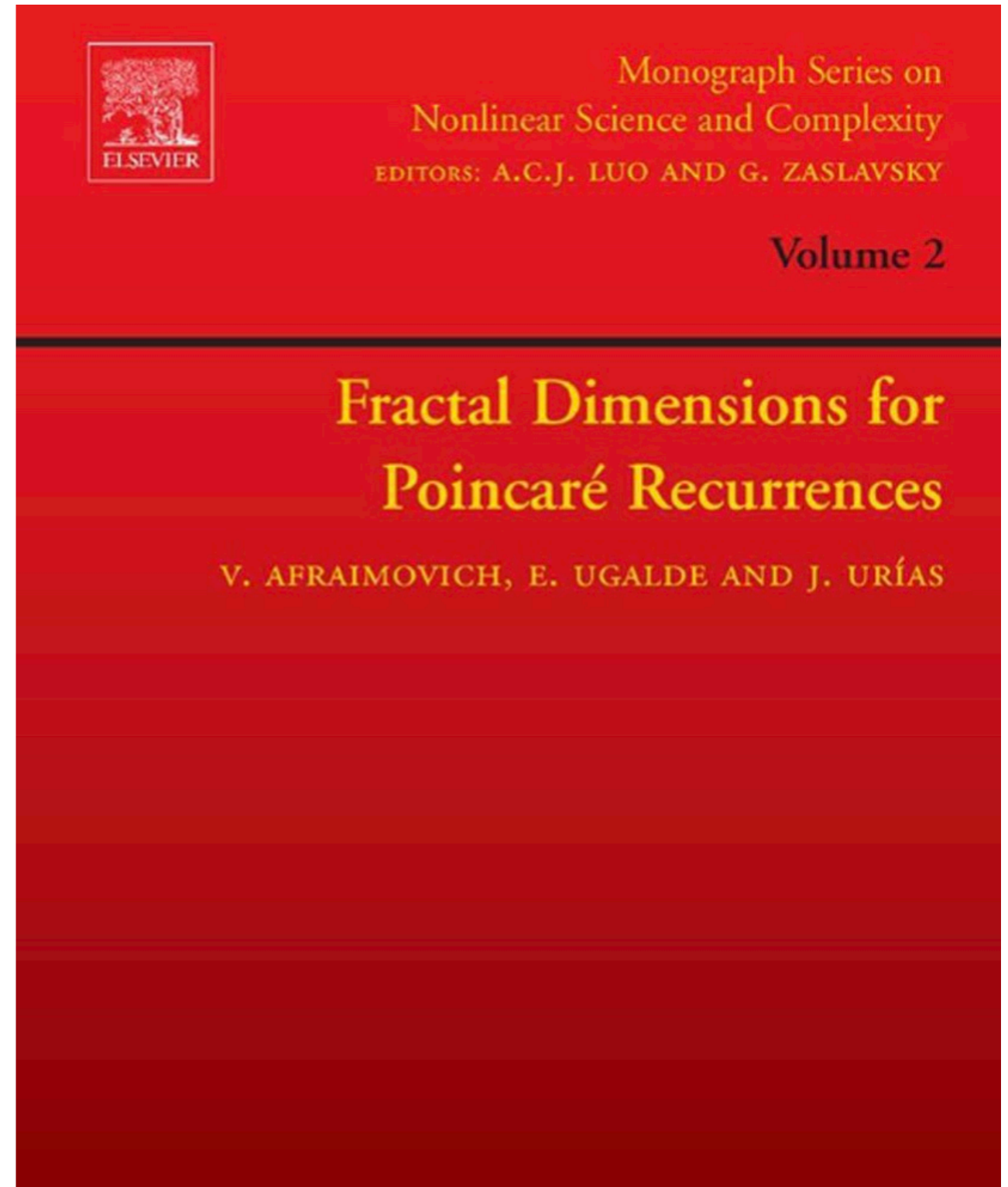
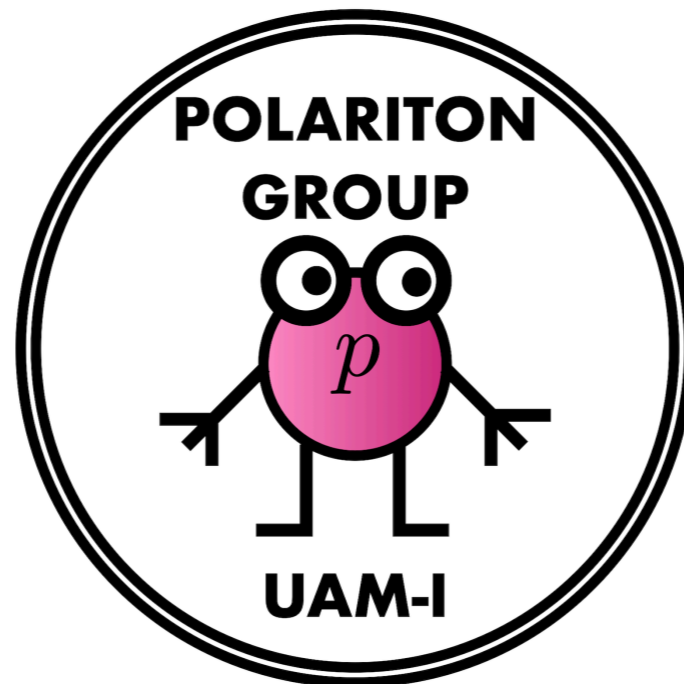


Figure 15.1. Islands around islands in the phase space of the standard map.





¡MUCHAS GRACIAS!