Aspectos clásicos de un módelo bosónico con tres sitios.

Erick Castro

Universidad federal de Rio Grande del Sur (UFRGS) Brazil

erickc@cbpf.br

Enero 26, 2022

Índice

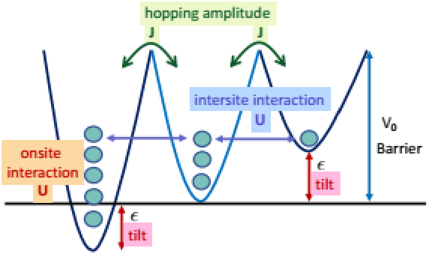
El límite clásico en un modelo bosónico cuántico de muchos cuerpos

El límite clásico en un modelo bosónico cuántico de muchos cuerpos

- El modelo es una variante del conocido modelo de Bose-Hubbard

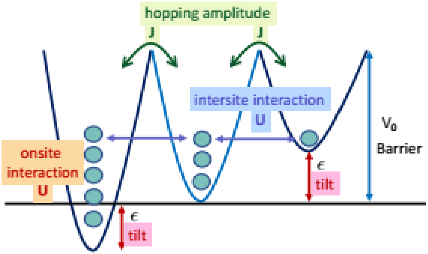
El límite clásico en un modelo bosónico cuántico de muchos cuerpos

- El modelo es una variante del conocido modelo de Bose-Hubbard



El límite clásico en un modelo bosónico cuántico de muchos cuerpos

- El modelo es una variante del conocido modelo de Bose-Hubbard



- El modelo cuando $\epsilon = 0$ es integrable y admite resolución exacta vía el Ansatz de Bethe.

El Hamiltoniano cuántico es

$$H = \underbrace{\frac{U}{N}\left(\hat{N}_1 - \hat{N}_2 + \hat{N}_3\right)^2}_{\text{Interaction boson term}} \overbrace{+\epsilon\left(\hat{N}_3 - \hat{N}_1\right)}^{\text{External field interaction term}}$$
$$\underbrace{+\frac{J}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) + \frac{J}{\sqrt{2}}\left(a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2\right)}_{\text{Tunneling boson term}} \quad (1)$$

El Hamiltoniano cuántico es

$$H = \underbrace{\frac{U}{N}\left(\hat{N}_1 - \hat{N}_2 + \hat{N}_3\right)^2}_{\text{Interaction boson term}} \overbrace{+\epsilon\left(\hat{N}_3 - \hat{N}_1\right)}^{\text{External field interaction term}}$$
$$\underbrace{+\frac{J}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) + \frac{J}{\sqrt{2}}\left(a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2\right)}_{\text{Tunneling boson term}} \quad (1)$$

Un tratamiento completo desde el punto de vista de caos cuántico está en: Karin Wittmann W., **E. R. Castro**, Angela Foerster and Lea F. Santos *Interacting bosons in a triple well: Preface of many-body quantum chaos* arXiv:2111.13714

- Sin embargo, aquí caos cuántico no será nuestro interés, sino el tratamiento clásico.

- Sin embargo, aquí caos cuántico no será nuestro interés, sino el tratamiento clásico.
- En sistemas de muchos cuerpos el límite clásico está relacionado con $N \to \infty$ (límite de campo medio ó límite semiclassico), similar a $\hbar \to 0$ en sistemas cuánticos convencionales.

- Sin embargo, aquí caos cuántico no será nuestro interés, sino el tratamiento clásico.
- En sistemas de muchos cuerpos el límite clásico está relacionado con $N \to \infty$ (límite de campo medio ó límite semiclassico), similar a $\hbar \to 0$ en sistemas cuánticos convencionales.
- Más nada nos impide estudiar el sistema desde un punto de vista puramente clásico para todo N

- Sin embargo, aquí caos cuántico no será nuestro interés, sino el tratamiento clásico.
- En sistemas de muchos cuerpos el límite clásico está relacionado con $N \to \infty$ (límite de campo medio ó límite semiclassico), similar a $\hbar \to 0$ en sistemas cuánticos convencionales.
- Más nada nos impide estudiar el sistema desde un punto de vista puramente clásico para todo N
- La "regla" usual en sistemas bosónicos es usar la substitución de Heisenberg

$$a_j \to \sqrt{N_j} \exp(i\phi_j), \qquad a_j^\dagger \to \sqrt{N_j} \exp(-i\phi_j) \tag{2}$$

- Sin embargo, aquí caos cuántico no será nuestro interés, sino el tratamiento clásico.
- En sistemas de muchos cuerpos el límite clásico está relacionado con $N \to \infty$ (límite de campo medio ó límite semiclassico), similar a $\hbar \to 0$ en sistemas cuánticos convencionales.
- Más nada nos impide estudiar el sistema desde un punto de vista puramente clásico para todo N
- La "regla" usual en sistemas bosónicos es usar la substitución de Heisenberg

$$a_j \to \sqrt{N_j} \exp(i\phi_j), \qquad a_j^\dagger \to \sqrt{N_j} \exp(-i\phi_j) \tag{2}$$

- La fase es asociada a los estados coherentes usados para obtener el límite clásico.

El Hamiltoniano en las coordenadas clásicas (N_i, ϕ_{ij}), com $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$, es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& \frac{U}{N}\left(N_1 - N_2 + N_3\right)^2 + \epsilon\left(N_3 - N_1\right) \\ &+ J\left(\sqrt{2N_1 N_2}\cos\phi_{12} + \sqrt{2N_3 N_2}\cos\phi_{32}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

El Hamiltoniano en las coordenadas clásicas (N_i, ϕ_{ij}), com $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$, es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& \frac{U}{N}\left(N_1 - N_2 + N_3\right)^2 + \epsilon\left(N_3 - N_1\right) \\ &+ J\left(\sqrt{2N_1N_2}\cos\phi_{12} + \sqrt{2N_3N_2}\cos\phi_{32}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

- Ya que $N_1 + N_2 + N_3 = N$, el sistema tiene 4 dimensiones $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{23})$.

El Hamiltoniano en las coordenadas clásicas (N_i, ϕ_{ij}), com $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$, es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& \frac{U}{N}\left(N_1 - N_2 + N_3\right)^2 + \epsilon\left(N_3 - N_1\right) \\ &+ J\left(\sqrt{2N_1 N_2}\cos\phi_{12} + \sqrt{2N_3 N_2}\cos\phi_{32}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

- Ya que $N_1 + N_2 + N_3 = N$, el sistema tiene 4 dimensiones $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{23})$.
- ¿(N_i, ϕ_{ij}) son variables canónicas (es decir $\{N_i, \phi_{ij}\} = 1$)?

El Hamiltoniano en las coordenadas clásicas (N_i, ϕ_{ij}), com $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$, es

$$\mathcal{H} = \frac{U}{N} \left(N_1 - N_2 + N_3\right)^2 + \epsilon \left(N_3 - N_1\right) + J \left(\sqrt{2 N_1 N_2} \cos \phi_{12} + \sqrt{2 N_3 N_2} \cos \phi_{32}\right) \tag{3}$$

- Ya que $N_1 + N_2 + N_3 = N$, el sistema tiene 4 dimensiones $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{23})$.
- ¿(N_i, ϕ_{ij}) son variables canónicas (es decir $\{N_i, \phi_{ij}\} = 1$)?
- ¿Existe un operador fase $\hat{\phi}_{ij}$, que satisface $\left[\hat{N}_i, \hat{\phi}_{ij}\right] = i$?

El Hamiltoniano en las coordenadas clásicas (N_i, ϕ_{ij}), com $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$, es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& \frac{U}{N}\left(N_1 - N_2 + N_3\right)^2 + \epsilon\left(N_3 - N_1\right) \\ &+ J\left(\sqrt{2N_1N_2}\cos\phi_{12} + \sqrt{2N_3N_2}\cos\phi_{32}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

- Ya que $N_1 + N_2 + N_3 = N$, el sistema tiene 4 dimensiones $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{23})$.
- ¿(N_i, ϕ_{ij}) son variables canónicas (es decir $\{N_i, \phi_{ij}\} = 1$)?
- ¿Existe un operador fase $\hat{\phi}_{ij}$, que satisface $\left[\hat{N}_i, \hat{\phi}_{ij}\right] = i$?
- Para eludir esta disjuntiva, coviene usar otras coordenadas

$$\hat{Q}_k = \frac{\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger}{\sqrt{2N}} \to \sqrt{\frac{2N_k}{N}}\cos\phi_k = Q_k, \tag{4}$$

$$\hat{P}_k = \frac{\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger}{i\sqrt{2N}} \to \sqrt{\frac{2N_k}{N}}\sin\phi_k = P_k \tag{5}$$

El hamiltoniano en estas nuevas coordenadas es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& U\left(\frac{P_1^2+Q_1^2}{2}-\frac{P_2^2+Q_2^2}{2}+\frac{P_3^2+Q_3^2}{2}\right)^2 \\ &+\frac{\epsilon}{2}\left[\left(P_3+P_1\right)\left(P_3-P_1\right)+\left(Q_3+Q_1\right)\left(Q_3-Q_1\right)\right] \\ &+\frac{J}{\sqrt{2}}\left(Q_1Q_2+Q_2Q_3+P_1P_2+P_2P_3\right)\end{aligned} \tag{6}$$

El hamiltoniano en estas nuevas coordenadas es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& U\left(\frac{P_1^2+Q_1^2}{2}-\frac{P_2^2+Q_2^2}{2}+\frac{P_3^2+Q_3^2}{2}\right)^2 \\ &+\frac{\epsilon}{2}\left[\left(P_3+P_1\right)\left(P_3-P_1\right)+\left(Q_3+Q_1\right)\left(Q_3-Q_1\right)\right] \\ &+\frac{J}{\sqrt{2}}\left(Q_1Q_2+Q_2Q_3+P_1P_2+P_2P_3\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Y tenemos garantía que las ecuaciones de Hamilton funcionan

$$\left(\dot{Q}_k,\dot{P}_k\right)=\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_k},-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_k}\right) \tag{7}$$

El hamiltoniano en estas nuevas coordenadas es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} =& U\left(\frac{P_1^2+Q_1^2}{2}-\frac{P_2^2+Q_2^2}{2}+\frac{P_3^2+Q_3^2}{2}\right)^2 \\
&+\frac{\epsilon}{2}\left[\left(P_3+P_1\right)\left(P_3-P_1\right)+\left(Q_3+Q_1\right)\left(Q_3-Q_1\right)\right] \\
&+\frac{J}{\sqrt{2}}\left(Q_1Q_2+Q_2Q_3+P_1P_2+P_2P_3\right) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Y tenemos garantía que las ecuaciones de Hamilton funcionan

$$
\left(\dot{Q}_k,\dot{P}_k\right)=\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_k},-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_k}\right) \qquad (7)
$$

- Podemos realizar las evoluciones clásicas en este conjunto de coordenadas globales.

El hamiltoniano en estas nuevas coordenadas es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} =& U\left(\frac{P_1^2+Q_1^2}{2}-\frac{P_2^2+Q_2^2}{2}+\frac{P_3^2+Q_3^2}{2}\right)^2 \\
&+\frac{\epsilon}{2}\left[\left(P_3+P_1\right)\left(P_3-P_1\right)+\left(Q_3+Q_1\right)\left(Q_3-Q_1\right)\right] \\
&+\frac{J}{\sqrt{2}}\left(Q_1Q_2+Q_2Q_3+P_1P_2+P_2P_3\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Y tenemos garantía que las ecuaciones de Hamilton funcionan

$$
\left(\dot{Q}_k,\dot{P}_k\right)=\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_k},-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Q_k}\right)
\tag{7}
$$

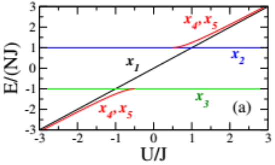
- Podemos realizar las evoluciones clásicas en este conjunto de coordenadas globales.
- Y el cambio para las coordenadas originales (N_i,ϕ_{ij}) es simple.

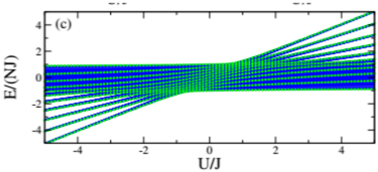
Puntos de equilibrio estables y inestables

- En el reciente trabajo: **E. R. Castro**, Jorge Chávez-Carlos, I. Roditi, Lea F. Santos, Jorge G. Hirsch *Quantum 5, 563 (2021)*, calculamos los puntos de equilibrio del modelo

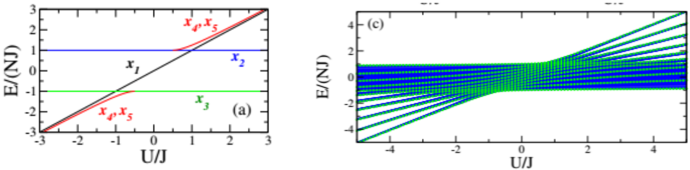
Puntos de equilibrio estables y inestables

- En el reciente trabajo: **E. R. Castro**, Jorge Chávez-Carlos, I. Roditi, Lea F. Santos, Jorge G. Hirsch *Quantum 5, 563 (2021)*, calculamos los puntos de equilibrio del modelo
- Entre los resultados encontramos una transición de fase en el régimen integrable $\epsilon = 0$, que señaliza la formación de bandas



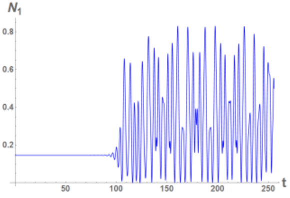


- En el reciente trabajo: **E. R. Castro**, Jorge Chávez-Carlos, I. Roditi, Lea F. Santos, Jorge G. Hirsch *Quantum 5, 563 (2021)*, calculamos los puntos de equilibrio del modelo
- Entre los resultados encontramos una transición de fase en el régimen integrable $\epsilon = 0$, que señaliza la formación de bandas

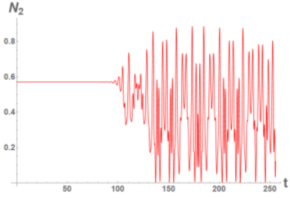


- No obstante como aquí estamos interesados en la dinámica, mostraremos está en un punto de equilibrio inestable.

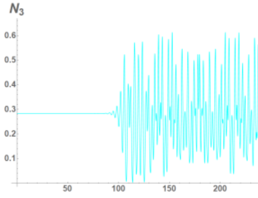
En el caso caótico $(U, J, \epsilon) = (0.6, 1, 1.2)$, el punto de equilibrio inestable está en $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) \approx (0.146108, 0.283528, 0, \pi)$



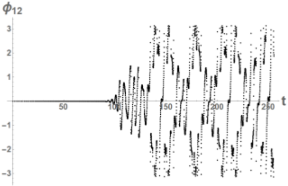
(a) $N_1(t)$



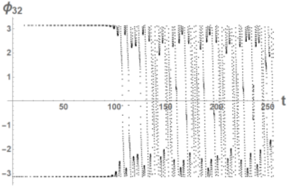
(b) $N_2(t)$



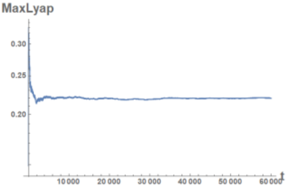
(c) $N_3(t)$



(d) $\phi_{12}(t)$



(e) $\phi_{32}(t)$



(f) $\lambda(t)$

Secciones de Poincare

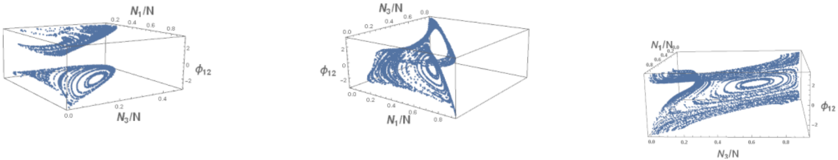
- Teniendo el sistema 4 dimensiones $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32})$, las hypersuperficies de energía constante son tridimensionales.

Secciones de Poincare

- Teniendo el sistema 4 dimensiones $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32})$, las hypersuperficies de energía constante son tridimensionales.
- Fijando una de las coordenadas (por ejemplo ϕ_{32}) podemos calcular las superficies de Poincare.

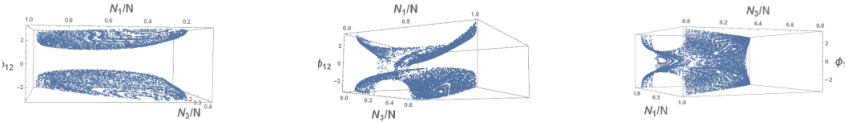
Secciones de Poincare

- Teniendo el sistema 4 dimensiones $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32})$, las hypersuperficies de energía constante son tridimensionales.
- Fijando una de las coordenadas (por ejemplo ϕ_{32}) podemos calcular las superficies de Poincare.
- Para $\epsilon = 0$ y $E/N \approx 0.01633$ obtemos



(a) $\phi_{32} = 1$ (b) $\phi_{32} = 2$ (c) $\phi_{32} = 3$

- Para $\epsilon = 0.5$ y $E/N \approx 0.01633$

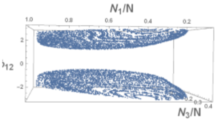


(a) $\phi_{32} = 1$

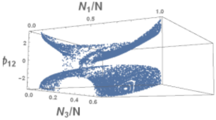
(b) $\phi_{32} = 2$

(c) $\phi_{32} = 3$

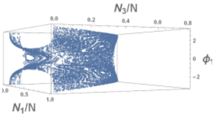
- Para $\epsilon = 0.5$ y $E/N \approx 0.01633$



(a) $\phi_{32} = 1$

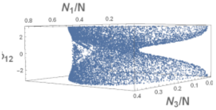


(b) $\phi_{32} = 2$

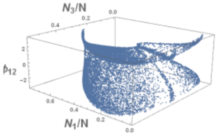


(c) $\phi_{32} = 3$

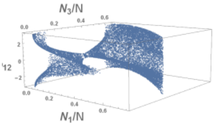
- Para $\epsilon = 1.2$ y $E/N \approx 0.01633$



(a) $\phi_{32} = 1$

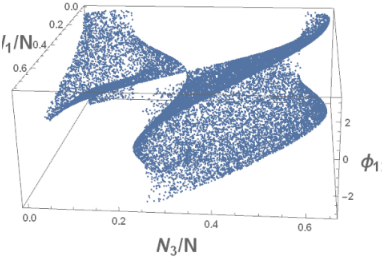


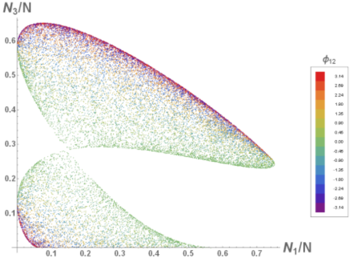
(b) $\phi_{32} = 2$



(c) $\phi_{32} = 3$

- En el caso anterior para $\phi_{32} = \pi$ vemos el punto crítico inestable.





Comparación cuántico-clásica

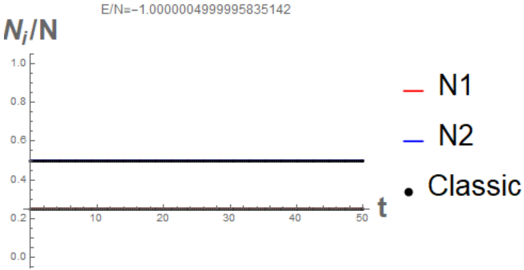
- Para comparaciones clásica-cuántica usamos estados coherentes $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ (tipo oscilador armónico).

Comparación cuántico-clásica

- Para comparaciones clásica-cuántica usamos estados coherentes $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ (tipo oscilador armónico).
- Existe una correspondencia uno a uno entre condiciones iniciales clásicas y estados coherentes $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) \leftrightarrow |N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}\rangle$

Comparación cuántico-clásica

- Para comparaciones clásica-cuántica usamos estados coherentes $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ (tipo oscilador armónico).
- Existe una correspondencia uno a uno entre condiciones iniciales clásicas y estados coherentes $(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) \leftrightarrow |N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}\rangle$
- Primero comparamos la evolución clásica con la correspondiente evolución de valores medios en el estado coherente ($N = 60$).



- La función de Husimi en nuestro caso puede escribirse como

$$\mathfrak{H}_{E_k}(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) = |\langle E_k | N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32} \rangle|^2 \tag{8}$$

- La función de Husimi en nuestro caso puede escribirse como

$$\mathfrak{H}_{E_k}(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) = |\langle E_k | N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32} \rangle|^2 \tag{8}$$

- Sin embargo, es conveniente trabajar con la proyección de Husimi integrando sobre las dos fases.

$$\mathfrak{H}_{E_k}^{\mathrm{Proj}}(N_1, N_3) = \int d\phi_{12} d\phi_{32} \mathfrak{H}_{E_k}(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) \tag{9}$$

función de Husimi

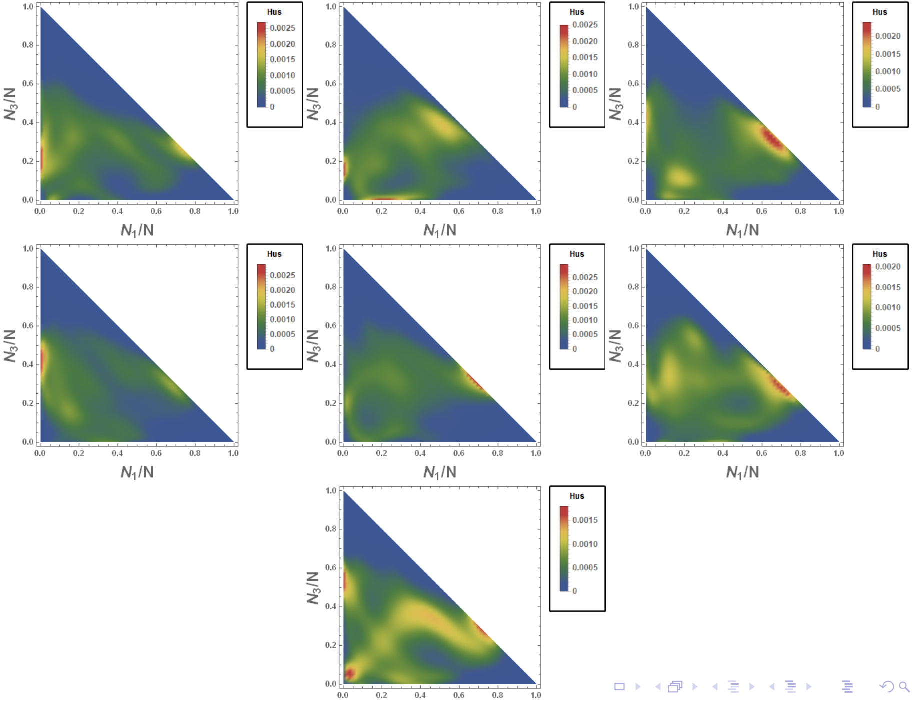
- La función de Husimi en nuestro caso puede escribirse como

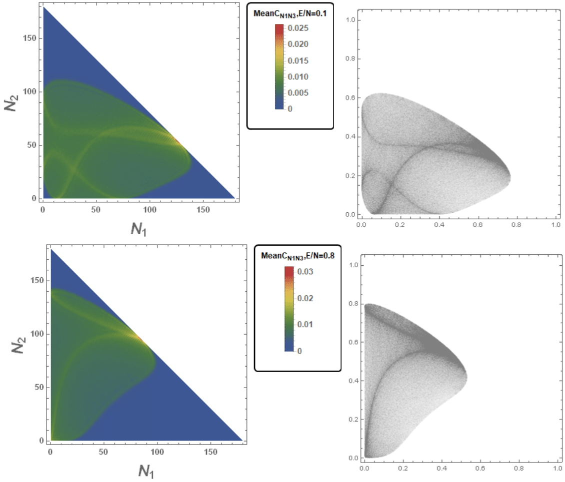
$$\mathfrak{H}_{E_k}(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) = |\langle E_k | N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}\rangle|^2 \tag{8}$$

- Sin embargo, es conveniente trabajar con la proyección de Husimi integrando sobre las dos fases.

$$\mathfrak{H}^{\mathrm{Proj}}_{E_k}(N_1, N_3) = \int d\phi_{12} d\phi_{32} \mathfrak{H}_{E_k}(N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}) \tag{9}$$

- La primera idea pensada fue calcular la función de Husimi en la energia correspondiente al punto crítico inestable.


Hus
0.0025
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0
N3/N
N1/N
Hus
0.0025
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0
N3/N
N1/N
Hus
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0
N3/N
N1/N
Hus
0.0025
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0
N3/N
N1/N
Hus
0.0025
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0
N3/N
N1/N
Hus
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0
N3/N
N1/N
Hus
0.0015
0.0010
0.0005
0
N3/N



MeanC_{N1N3},E/N=0.1
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0
N_2
N_1
MeanC_{N1N3},E/N=0.8
0.03
0.02
0.01
0
N_2
N_1

OTOC em estados coerentes

Por último, sea el operador

$$\mathbf{O}_k(t) = -\left[\mathbf{Q}_k(t), \mathbf{P}_k(0)\right]^2 \tag{10}$$

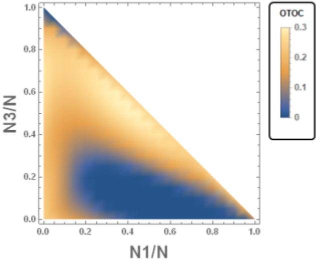
OTOC em estados coerentes

Por último, sea el operador

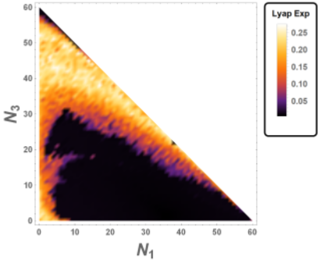
$$\mathbf{O}_k(t) = -\left[\mathbf{Q}_k(t), \mathbf{P}_k(0)\right]^2 \tag{10}$$

Suponiendo que el valor medio en un estado coherente aumenta de de forma exponencial con el tiempo, esto es

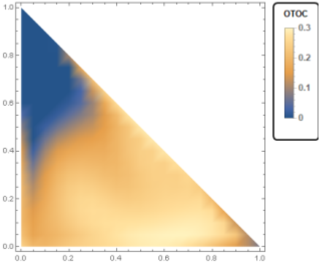
$$\langle N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}|\mathbf{O}_k(t)|N_1, N_3, \phi_{12}, \phi_{32}\rangle \approx Exp(\frac{\Lambda}{2}t) \tag{11}$$



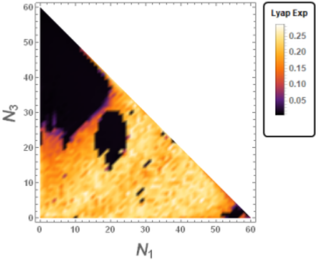
(a) $(\phi_{12}, \phi_{32}) = (\pi, \pi)$



(b) $(\phi_{12}, \phi_{32}) = (\pi, \pi)$



(c) $(\phi_{12}, \phi_{32}) = (0, 0)$



(d) $(\phi_{12}, \phi_{32}) = (0, 0)$

Futuros analisis

- ¿Son scars las lineas en la función de Husimi promediada?

Futuros analisis

- ¿Son scars las lineas en la función de Husimi promediada?
- Si la respuesta es positiva ¿Hay trayectorias clásicas asociadas?

Futuros analisis

- ¿Son scars las lineas en la función de Husimi promediada?
- Si la respuesta es positiva ¿Hay trayectorias clásicas asociadas?
- Extender el estudio de la correspondencia clásico-cuántica usando la probabilidad de supervivencia (clásica y cuántica).

Colaboradores

- Lea F. Santos
- Jorge Hirsch
- Angela Foerster
- Jorge Chavez
- Karin Wittmann
- Itzhak Roditi