

Universidad Veracruzana



Simetrías en física nuclear

Escuela de Física Fundamental, Xalapa Ver. 26-30 sept. 2016

Carlos Vargas Madrazo

Facultad de Física,

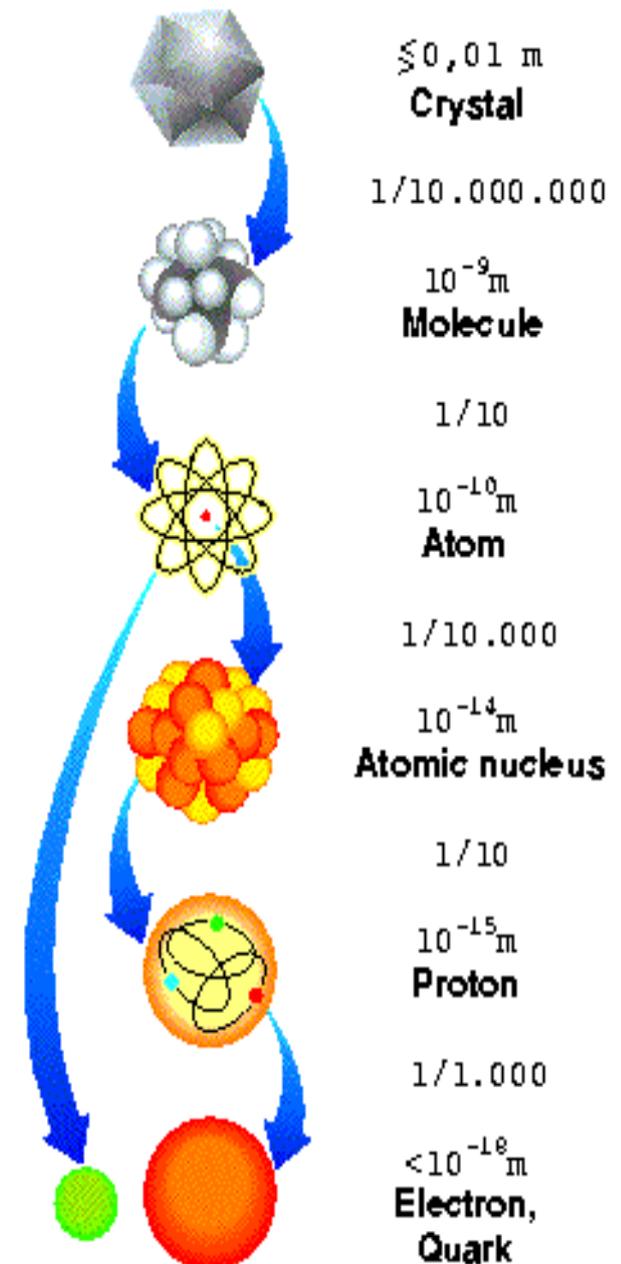
Lic. en física (acreditada por CAPEF), Maestría en Física (PNPC-CONACyT)

Índice

- Breve reseña histórica
 - De los griegos al modelo estandar
- Simetrías en el núcleo
 - Fenomenología
 - Modelo de la gota
 - El modelo de capas
 - Simetrías en modelo fermiónicos
 - Simetrías en modelo bosónicos
- Conclusiones

Reseña histórica

- Desde tiempos inmemoriales se ha buscado los constituyentes fundamentales: Grecia, India, Arabia, Europa (Demócrito, Epicuro, Dignaga, Dharmakirti, Mohamed Al-Ghazali, Boyle, Newton).
 - En el s. XIX, Dalton retoma el atomismo.
- En 1879, Crookes, Schuster y JJ Thomson descubren el electrón. Millikan mide q/m .
- En 1911, Rutherford, Geiger y Marsden dispersan partículas alfa. Centro dispersor extremadamente denso.
 - En 1920 Rutherford propone la existencia del neutrón y en 1932, Chadwick lo observa.
- Entre 1932 y 1949 se realiza mucha investigación sobre el núcleo del átomo y su estructura. Mayer y Jensen descubren el modelo de capas.
- Durante los cincuenta en los aceleradores de partículas (centenas de MeV) se descubre todo un zoológico de partículas "fundamentales".

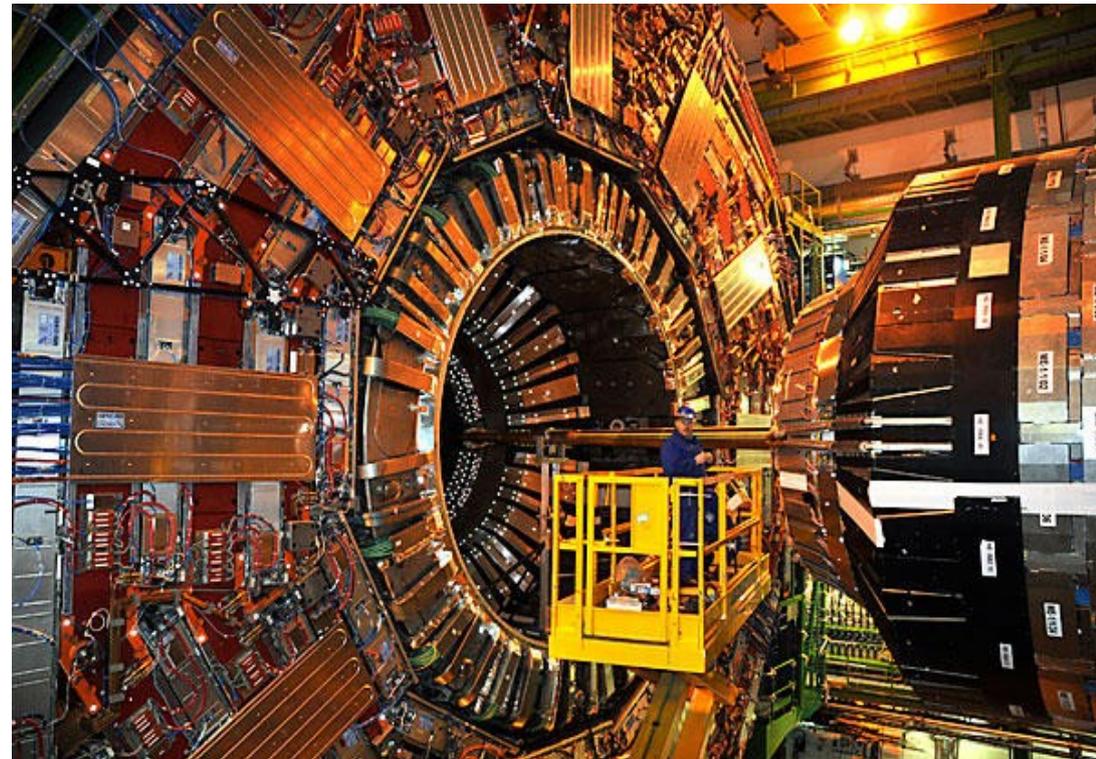


- Se hace evidente que este zoológico no es fundamental y que había otros constituyentes más fundamentales. En 1964, Gell-Mann, Neeman y Zweig proponen la existencia de los quarks, con lo que predicen el Ω^- . El modelo los llevó también a la necesidad de introducir la carga de color. Se clasificaron entonces los hadrones en mesones y bariones.
- En los setenta se establece la Cromodinámica cuántica (QCD) como la teoría de las interacciones fuertes entre quarks y gluones, pero no sin controversias sobre todo debido al confinamiento.
 - Al tiempo, Glashow, Weinberg y Salam unifican la teoría de las interacciones electromagnéticas, débil y fuerte en el modelo estándar, lo que les vale el premio nobel en 1979.
- Los bosones W^{+-} y Z se descubren en 1981, el quark top en 1995 y el bosón de Higgs en 2012.
- Es un modelo elegante pero de cálculos extremadamente difíciles.
- Deja fuera la gravedad, no explica la naturaleza de la materia y energía oscuras, no se explican las oscilaciones de neutrinos ni la asimetría entre materia y antimateria.
- Para muchos, es una herramienta de cálculo, pero dista de tener sentido físico.



¿Cómo investigamos su estructura?: experimentos.
 Se requieren grandes aceleradores para producir los núcleos y grandes detectores para observar las partículas emitidas durante las colisiones. ¿
 Cuantos aceleradores así pueden construirse?

El CERN en la frontera entre Francia y Suiza. El anillo principal tiene un perímetro de 27 Km de longitud.



El zoológico de
 supuestas
 partículas
 elementales se
 hizo casi
 infinito, aunado
 a las
 resonancias que
 muchas de
 éstas tienen y
 que era
 necesario
 entender.



2015 Review of Pa

Please use this
 K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phy

Cut-off date for this update v

Particle Li

Search Lis

Gauge & Higgs Bosons (gamma, g, W

Leptons (e, mu, tau, neutrinos, heavy le

Quarks (u, d, s, c, b, t, ...)

Mesons (pi, K, D, B, psi, Upsilon, ...)

Light Unflavored Mesons (S = C = B = 0)

Other Light Unflavored Mesons (S = C = B = 0)

Strange Mesons (S = +-1, C = B = 0)

Charmed Mesons (C = +-1)

Charmed, Strange Mesons (C = S = +-1)

Bottom Mesons (B = +-1)

Bottom, Strange Mesons (B = +-1, S = +-1)

Bottom, Charmed Mesons (B = +-1, C = +-1)

c cbar Mesons

b bbar Mesons

NON-q qbar Candidates

Collapse Mesons table

Baryons (p, n, Lambda_b, Xi, ...)

Other Searches (SUSY, Compositeness

Mesons (pi, K, D, B, psi, Upsilon, ...)

Light Unflavored Mesons (S = C = B = 0)

Leptonic Decays of Charged Pseudoscalar Mesons	omega(1650)
pi+-	omega(3)(1670)
pi0	pi(2)(1670)
eta	phi(1680)
f(0)(500)	rho(3)(1690)
rho(770)	rho(1700)
omega(782)	a(2)(1700)
eta'(958)	f(0)(1710)
f(0)(980)	eta(1760)
a(0)(980)	pi(1800)
phi(1020)	f(2)(1810)
h(1)(1170)	X(1835)
b(1)(1235)	X(1840)
a(1)(1260)	phi(3)(1850)
f(2)(1270)	eta(2)(1870)
f(1)(1285)	pi(2)(1880)
eta(1295)	rho(1900)
pi(1300)	f(2)(1910)
a(2)(1320)	f(2)(1950)
f(0)(1370)	rho(3)(1990)
h(1)(1380)	f(2)(2010)
pi(1)(1400)	f(0)(2020)
eta(1405)	a(4)(2040)
f(1)(1420)	f(4)(2050)
omega(1420)	pi(2)(2100)
f(2)(1430)	f(0)(2100)
a(0)(1450)	f(2)(2150)
rho(1450)	rho(2150)
eta(1475)	phi(2170)
f(0)(1500)	f(0)(2200)

2015 Review of Particle Ph

Please use this **CITATION**:

K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, **38**, 09000

Cut-off date for this update was January 15

Particle Listings

Search Listings

[Gauge & Higgs Bosons \(gamma, g, W, Z, ...\)](#)

[Leptons \(e, mu, tau, neutrinos, heavy leptons ...\)](#)

[Quarks \(u, d, s, c, b, t, ...\)](#)

[Mesons \(pi, K, D, B, psi, Upsilon, ...\)](#)

[Baryons \(p, n, Lambda_b, Xi, ...\)](#)

[N Baryons \(S = 0, I = 1/2\)](#)

[Delta Baryons \(S = 0, I = 3/2\)](#)

[Lambda Baryons \(S = -1, I = 0\)](#)

[Sigma Baryons \(S = -1, I = 1\)](#)

[XI Baryons \(S = -2, I = 1/2\)](#)

[Omega Baryons \(S = -3, I = 0\)](#)

[Charmed Baryons \(C = +1\)](#)

[Doubly-charmed Baryons \(C = + 2\)](#)

[Bottom Baryons \(B = -1\)](#)

[Collapse Baryons table](#)

Baryons (p, n, Lambda_b, Xi, ...)

[N Baryons \(S = 0, I = 1/2\)](#)

[Delta Baryons \(S = 0, I = 3/2\)](#)

[Note on N and Delta Resonances](#)

[Delta\(1232\)](#)

[Delta\(1600\)](#)

[Delta\(1620\)](#)

[Delta\(1700\)](#)

[Delta\(1750\)](#)

[Delta\(1900\)](#)

[Delta\(1905\)](#)

[Delta\(1910\)](#)

[Delta\(1920\)](#)

[Delta\(1930\)](#)

[Delta\(1940\)](#)

[Collapse Delta Bayons table](#)

[Lambda Baryons \(S = -1, I = 0\)](#)

[Sigma Baryons \(S = -1, I = 1\)](#)

[Note on Lambda and Sigma Resonances](#)

[Sigma+](#)

[Sigma0](#)

[Sigma-](#)

[Sigma\(1385\) 3/2+](#)

[Sigma\(1480\)](#)

[Sigma\(1560\)](#)

[Sigma\(1580\) 3/2-](#)

[Sigma\(1620\) 1/2-](#)

[Sigma\(1620\)PE](#)

[Sigma\(1660\) 1/2+](#)

[Note on the Sigma\(1670\) Region](#)

[Sigma\(1670\) 3/2-](#)

[Delta\(1950\)](#)

[Delta\(2000\)](#)

[Delta\(2150\)](#)

[Delta\(2200\)](#)

[Delta\(2300\)](#)

[Delta\(2350\)](#)

[Delta\(2390\)](#)

[Delta\(2400\)](#)

[Delta\(2420\)](#)

[Delta\(2750\)](#)

[Delta\(2950\)](#)

[Delta\(3000 Region\)](#)

[Sigma\(1775\) 5/2-](#)

[Sigma\(1840\) 3/2+](#)

[Sigma\(1880\) 1/2+](#)

[Sigma\(1900\) 1/2-](#)

[Sigma\(1915\) 5/2+](#)

[Sigma\(1940\) 3/2+](#)

[Sigma\(1940\) 3/2-](#)

[Sigma\(2000\) 1/2-](#)

[Sigma\(2030\) 7/2+](#)

[Sigma\(2070\) 5/2+](#)

[Sigma\(2080\) 3/2+](#)

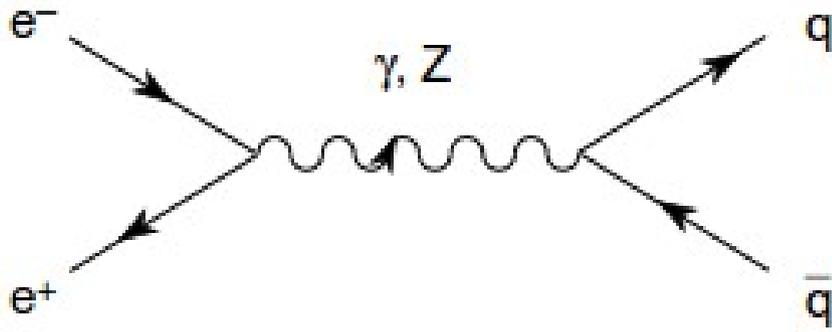
[Sigma\(2100\) 7/2-](#)

[Sigma\(2250\)](#)

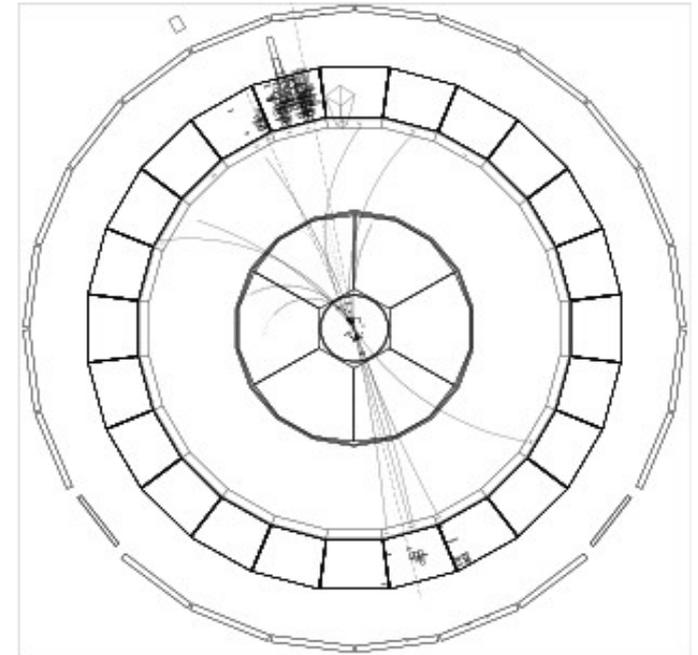
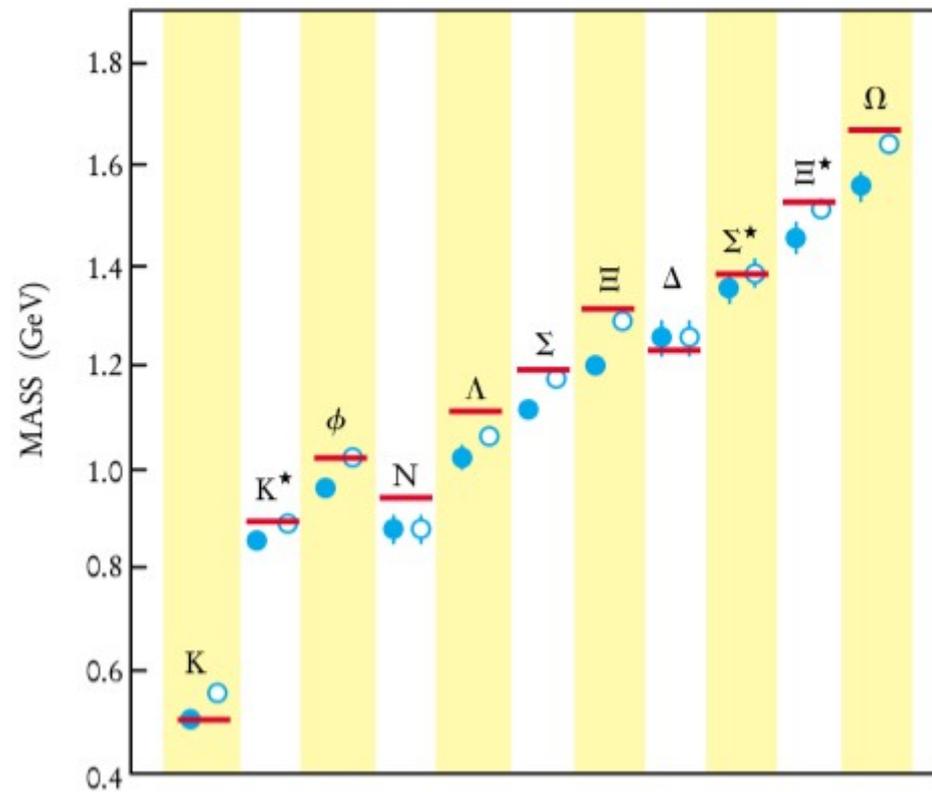
Esta proliferación de "partículas elementales" llevó a Pauli a declarar que "De haber vislumbrado tal diversidad, habría sido mejor ser botánico".

¿Cómo clasificar los estados y resonancias observadas?

Creemos en el modelo estandar y en QCD, pues al resolver las ecuaciones, aparece una fenomenología rica y compleja.

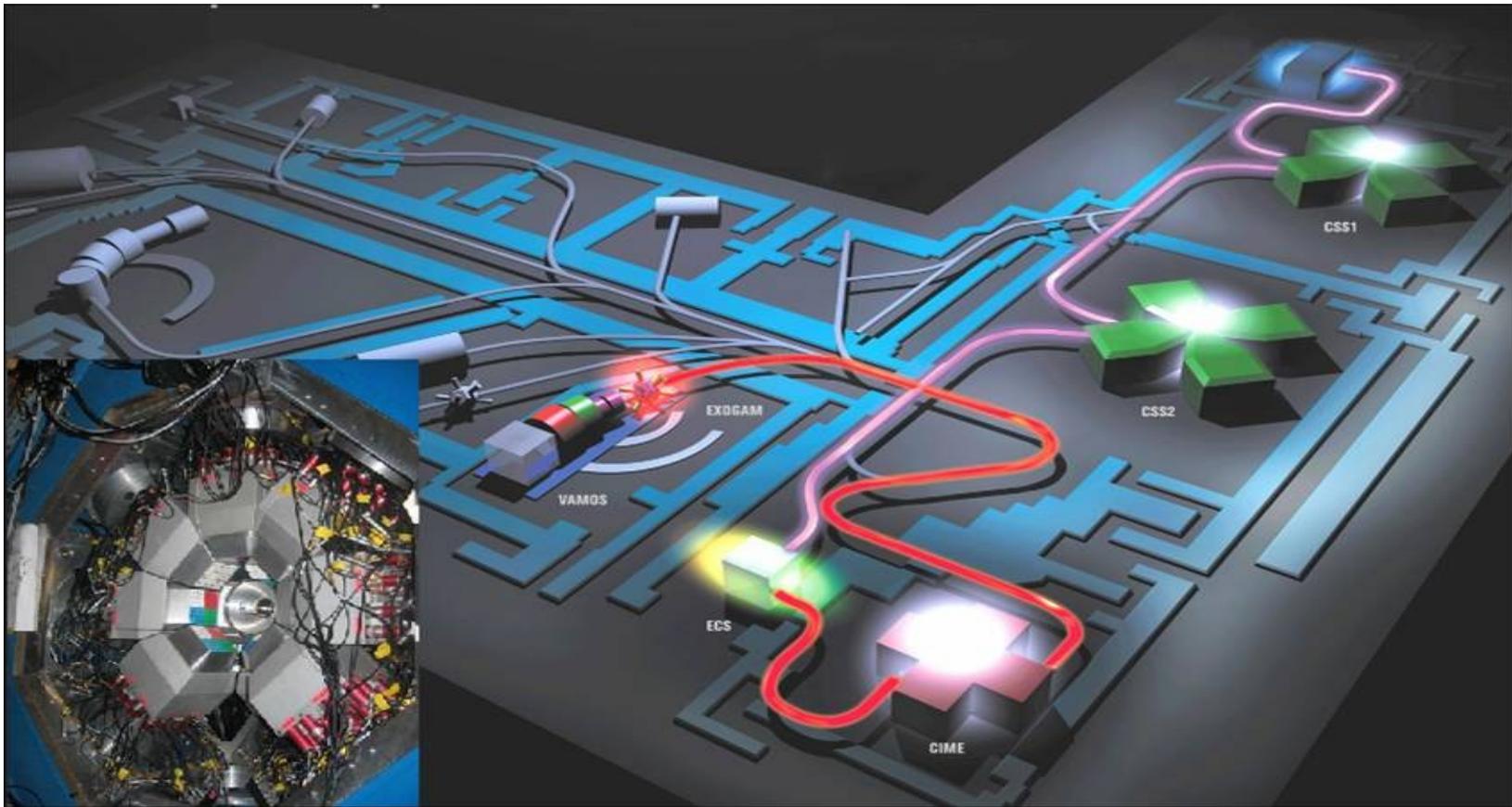


El decaimiento del bosón Z en el LEP muestra dos jets de partículas bien colimadas. En términos de la teoría de quarks esto se entiende por el decaimiento del $Z \rightarrow q\bar{q}$, donde el par quark-antiquark tienen que hadronizar, produciendo dos jets.



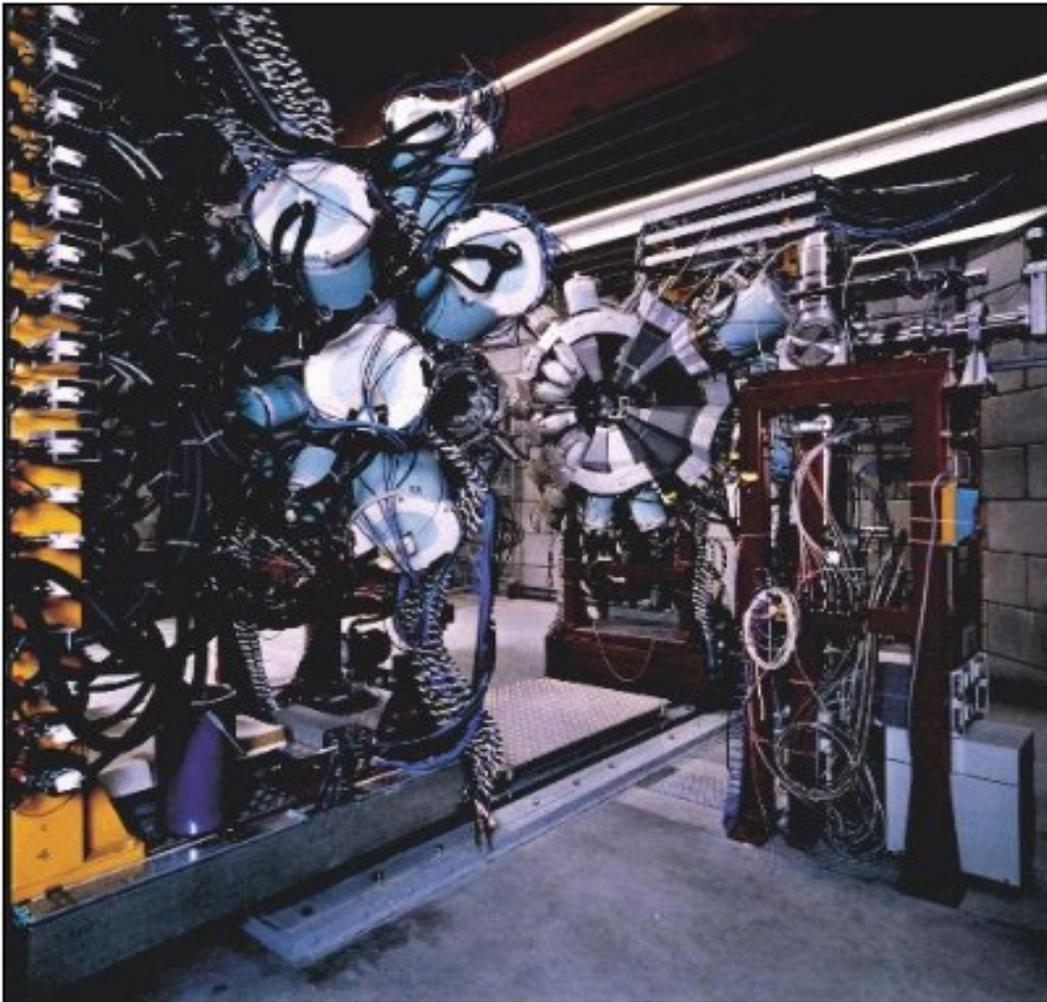


En física nuclear se utilizan aceleradores mucho más modestos que producen haces de iones radioactivos (RIB):
GANIL(Fr), GSI(De), RIKEN(Jp),
ISOLDE(UE), Triumph(Ca),
Holifield(USA), RIBRAS(Br).

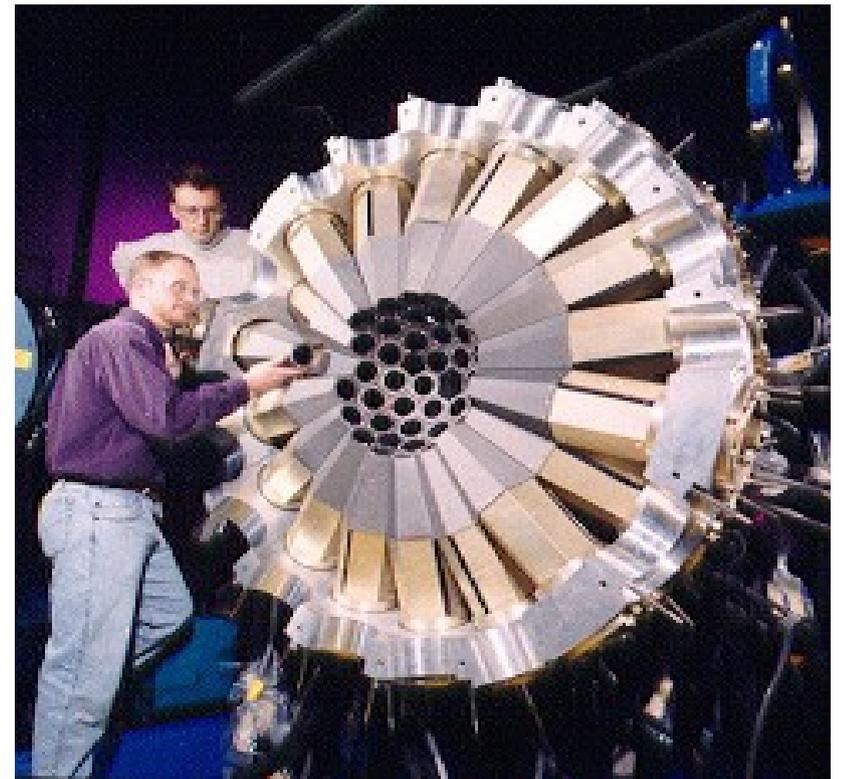


Detectores de gamas de germanio cubriendo un ángulo sólido de 4π .

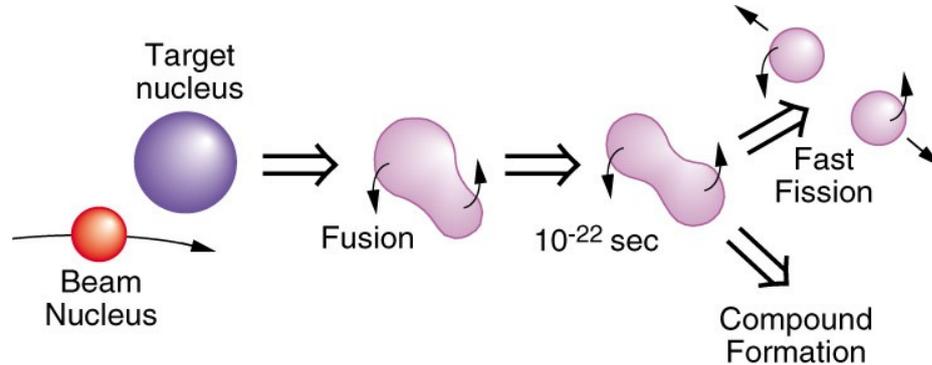
A la izquierda el Euroball, a la derecha el Gammasphere.



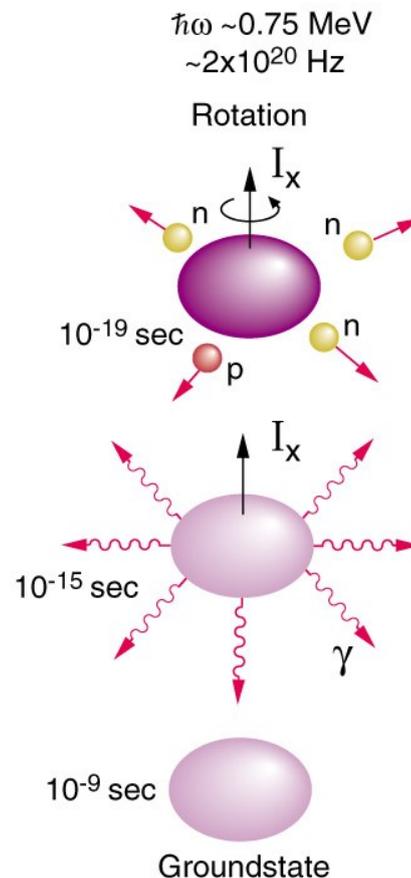
El gammasphere es un arreglo 3D de 110 detectores de germanio de alta pureza.



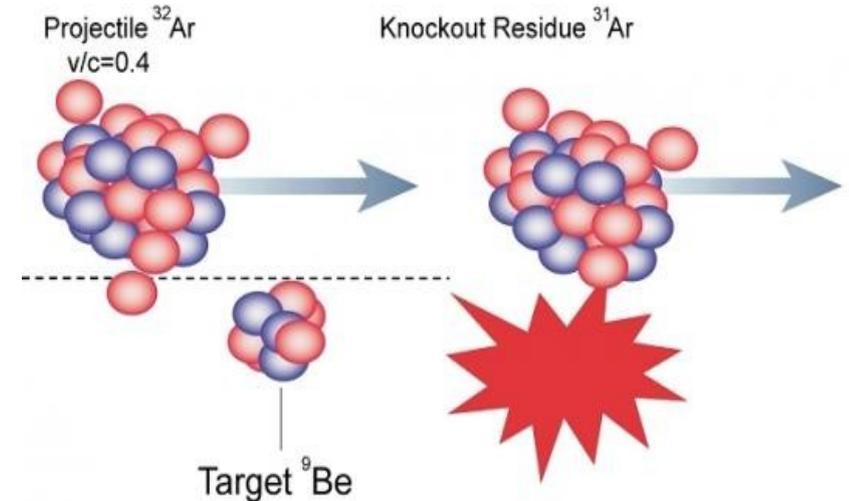
Reacción de fusión-evaporación



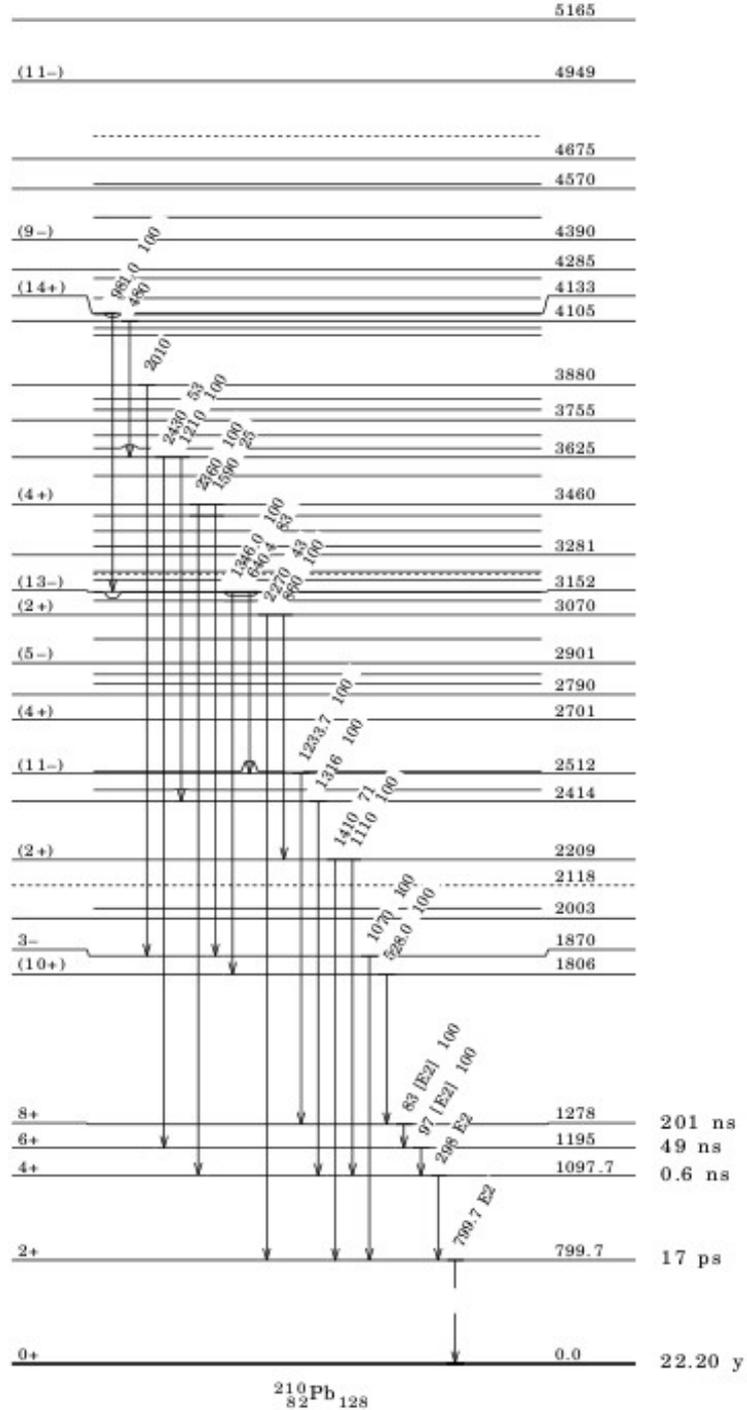
En la primera fase el haz y el blanco se fusionan. Algunos núcleos producidos decaen rápidamente fisionándose mientras que otros se estabilizan emitiendo p y n. El núcleo hijo queda en un estado excitado, emitiendo gamas que son detectadas.



Reacción de "knock-out" (o toma una partícula)



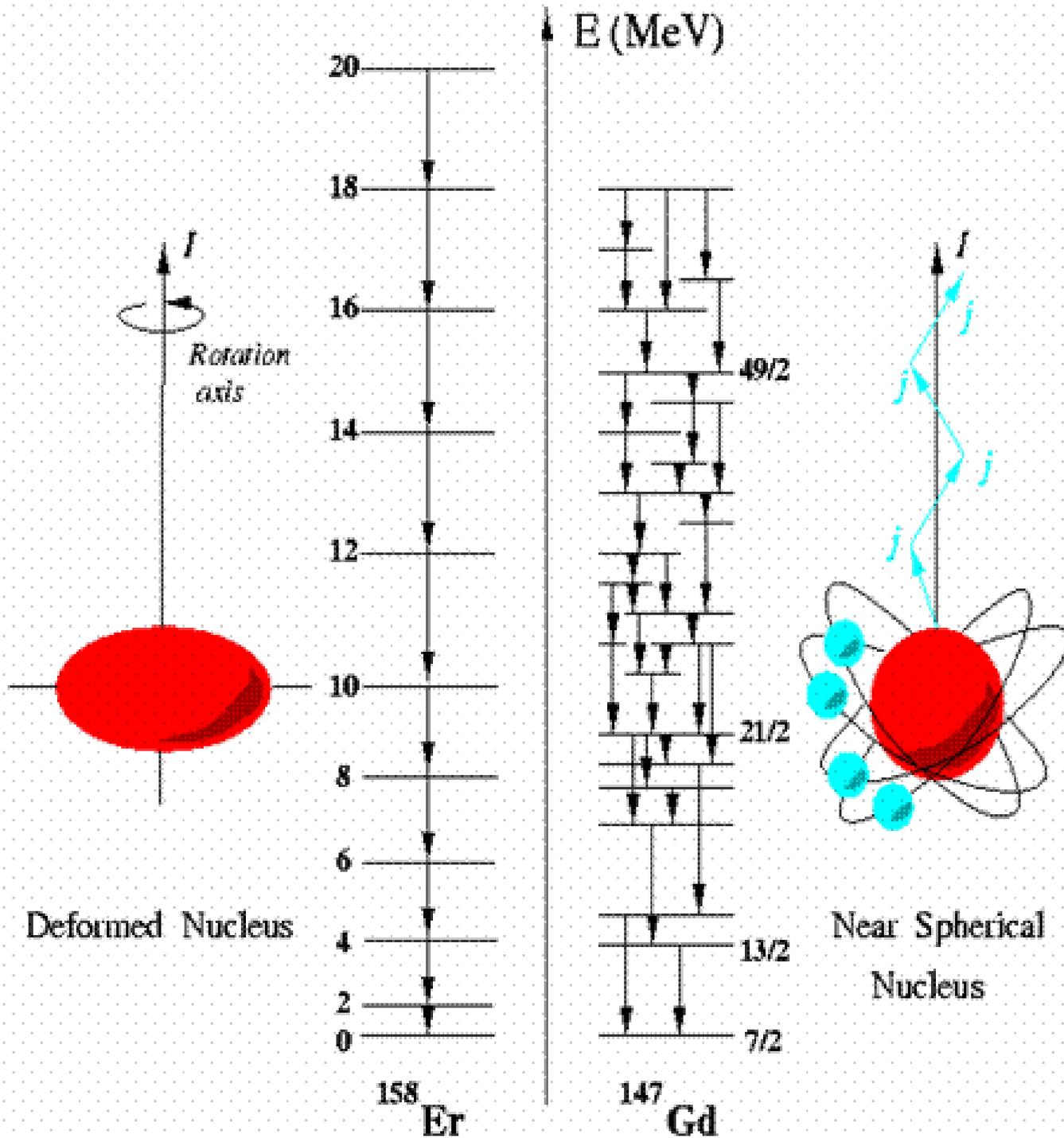
El ^{32}Ar es un núcleo exótico formado por 18p y 14n. Su vida media es de 0.1 seg y es usado como proyectil para producir el ^{31}Ar (vida media 0.014 seg).



Espectro del ^{210}Pb .

El espectro está formado por una serie de niveles energéticos discretos. Determinar a partir de este espectro la estructura del núcleo es una tarea complicada.

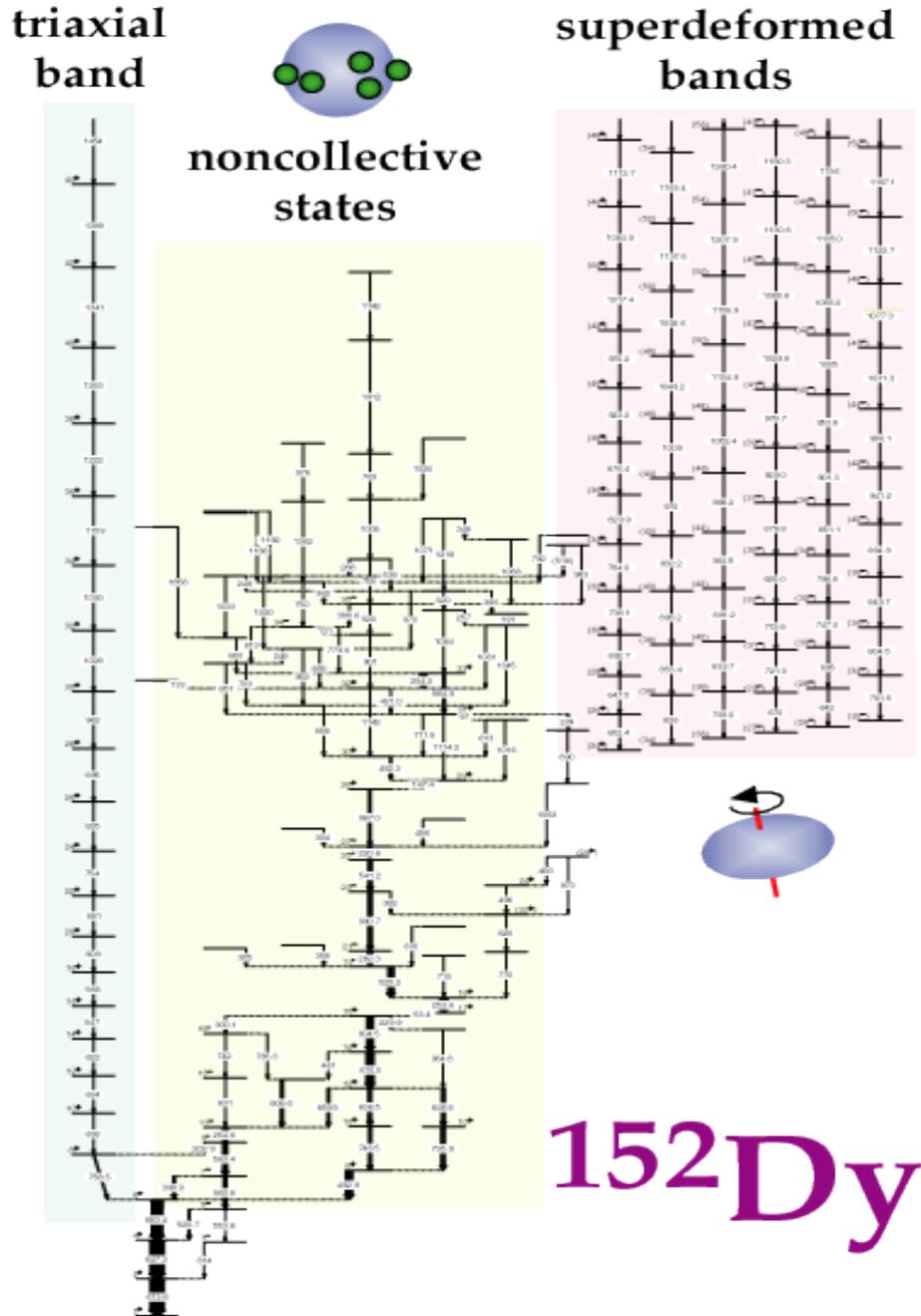
Algunos de los niveles observados corresponden a excitaciones individuales mientras que otras corresponden a excitaciones colectivas.



La rotación de un **núcleo deformado** tiene asociado un espectro típico que es función (casi) cuadrática del momento angular J . En contraste, la rotación debido a la excitación de unas cuantas partículas produce un espectro sin patrones claros lleno de transiciones pequeñas.

Coexistence of collective and noncollective motion

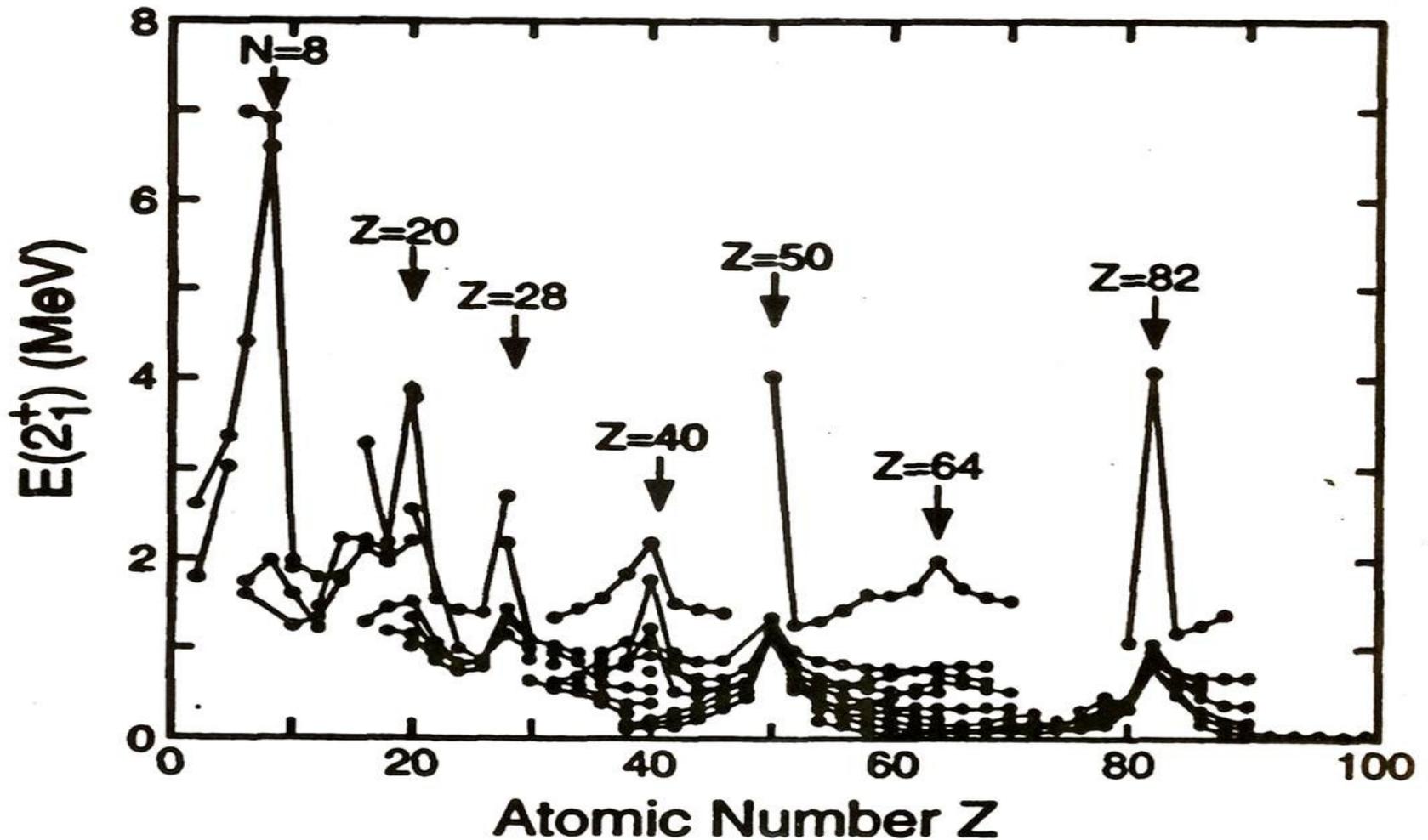
Coexistencia de movimiento colectivo y de partícula independiente en un mismo núcleo.



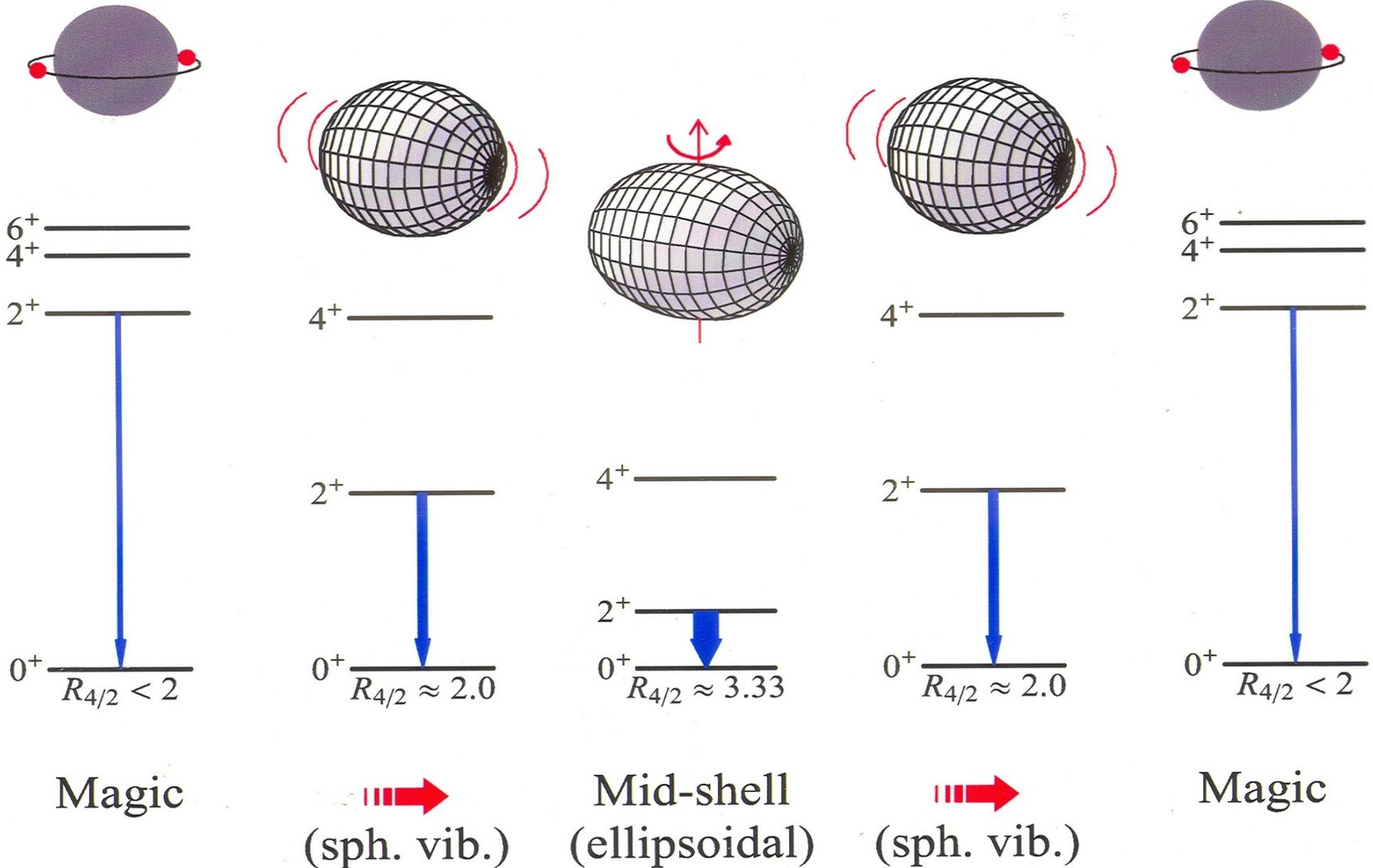
En ^{152}Dy , una parte del espectro corresponde a las oscilaciones de partícula independiente y otra parte a las excitaciones colectivas.

Estructura nuclear, los números mágicos.

$E(2^+)$ ——— 2^+ Excitation energies
○ ——— 0^+
e-e nuclei



Evolution of nuclear structure (as a function of nucleon number)



¿Cómo investigamos su estructura?: teoría.

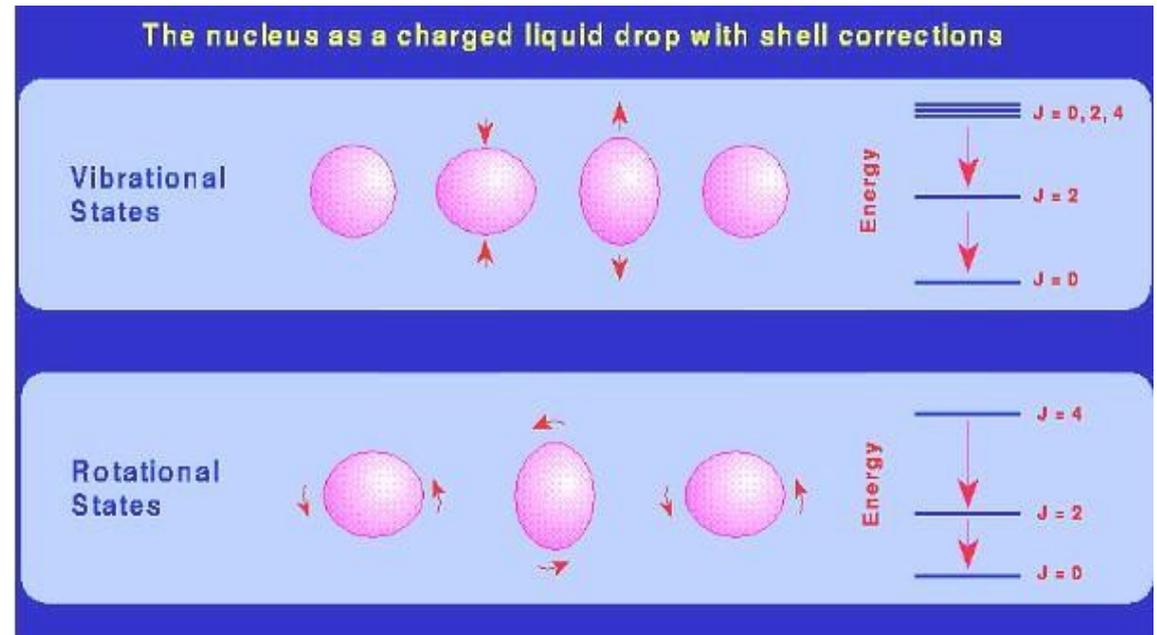
Entre los modelos más usados para estudiar los fenómenos colectivos del núcleo están:

El modelo de la gota

El modelo de capas

El modelo de la gota se desarrolla a partir de las similitudes entre el núcleo y una gota de un fluido incompresible. Se ignora

la existencia de los nucleones y en su lugar se supone la existencia de un fluido nuclear continuo. Predice de manera muy sencilla la ocurrencia de algunos decaimientos y el valor de las energías de amarre. También nos permite parametrizar la superficie del núcleo.



La fórmula para la energía de amarre se derivó empíricamente; depende de cinco parámetros, relacionados con el término de volumen (saturación de la fuerza nuclear), superficie (tensión superficial), de Coulomb, de asimetría y el de apareamiento.

$$E_B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A^{1/3}} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + \delta(A, Z)$$

Volume term
Surface term
Volume term
Surface term
Asymmetry term
Coulomb term
Pairing term

For pairing term:

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} +\delta_0 & A, Z \text{ even} \\ 0 & A, Z \text{ odd} \\ -\delta_0 & A, Z \text{ odd} \end{cases}$$

where

$$\delta_0 = \frac{a_P}{A^{1/2}}$$

For pairing term:

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} +\delta_0 & A, Z \text{ even} \\ 0 & A \text{ odd} \\ -\delta_0 & A, Z \text{ odd} \end{cases}$$

where

$$\delta_0 = \frac{a_P}{A^{1/2}}$$

Coefficients:

$$\begin{aligned} a_V &= 15.85 \text{ MeV} \\ a_S &= 18.34 \text{ MeV} \\ a_A &= 23.21 \text{ MeV} \\ a_C &= 0.714 \text{ MeV} \\ a_P &= 12.00 \text{ MeV} \end{aligned}$$

- La superficie del núcleo (R) se expande en función de los armónicos esféricos con los parámetros de forma alfa dependientes del tiempo. Las contribuciones monopolar y dipolar (lambda 0 y 1) no contribuyen, por lo que la primer contribución significativa es la cuadrupolar (lambda 2).

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right)$$

Coordenadas beta y gama.

Beta=0 corresponde a un núcleo esférico y los valores diferentes de cero implican deformación.

Gama=0 indica deformación prolata, gama=60 oblata y los valores intermedios caracterizan a los estados triaxiales.

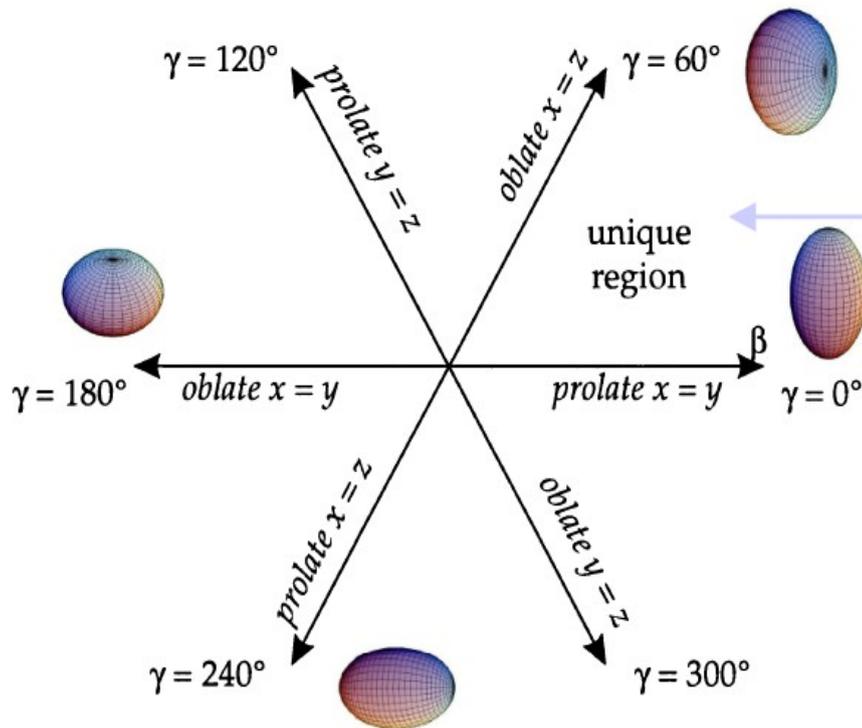


Figure: The (β, γ) plane is divided into six equivalent parts by the symmetries:

the sector between 0° and 60° contains all shapes uniquely, i.e. **triaxial shapes**

the types of shapes encountered along the axis: e.g., **prolate $x=y$** implies prolate shapes with the z axis as the long axis and the two other axis x and y equal.

- El modelo de la gota nos permite describir fácilmente muchas propiedades del núcleo, sin embargo, no hace alusión en ningún momento a los constituyentes del núcleo (p y n) ni al hecho de que es un sistema cuántico.

El modelo de capas.

A diferencia del modelo de la gota, este modelo parte de la interacción entre nucleones y del carácter fermiónico de los constituyentes del núcleo (o considerando pares, bosones).

En lugar de considerar la interacción entre cada par de nucleones, se calcula el campo medio producido por el conjunto. El campo medio encontrado de esta forma es el de Woods-Saxon (WS)

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

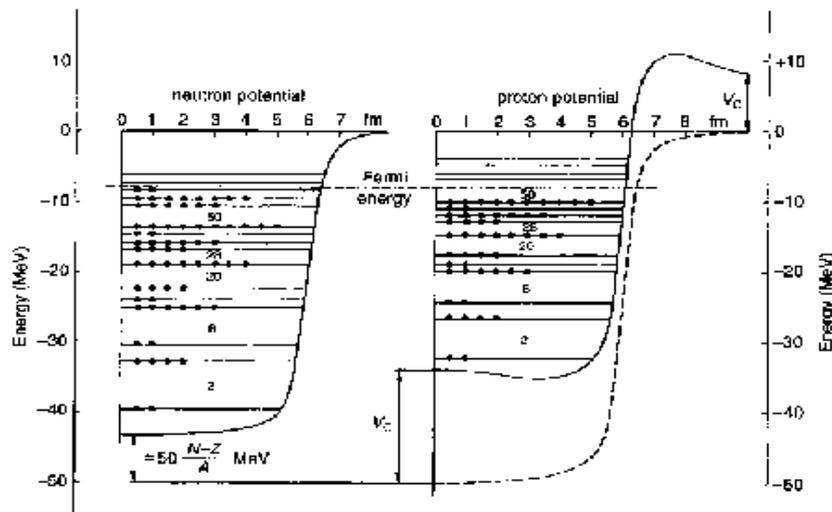
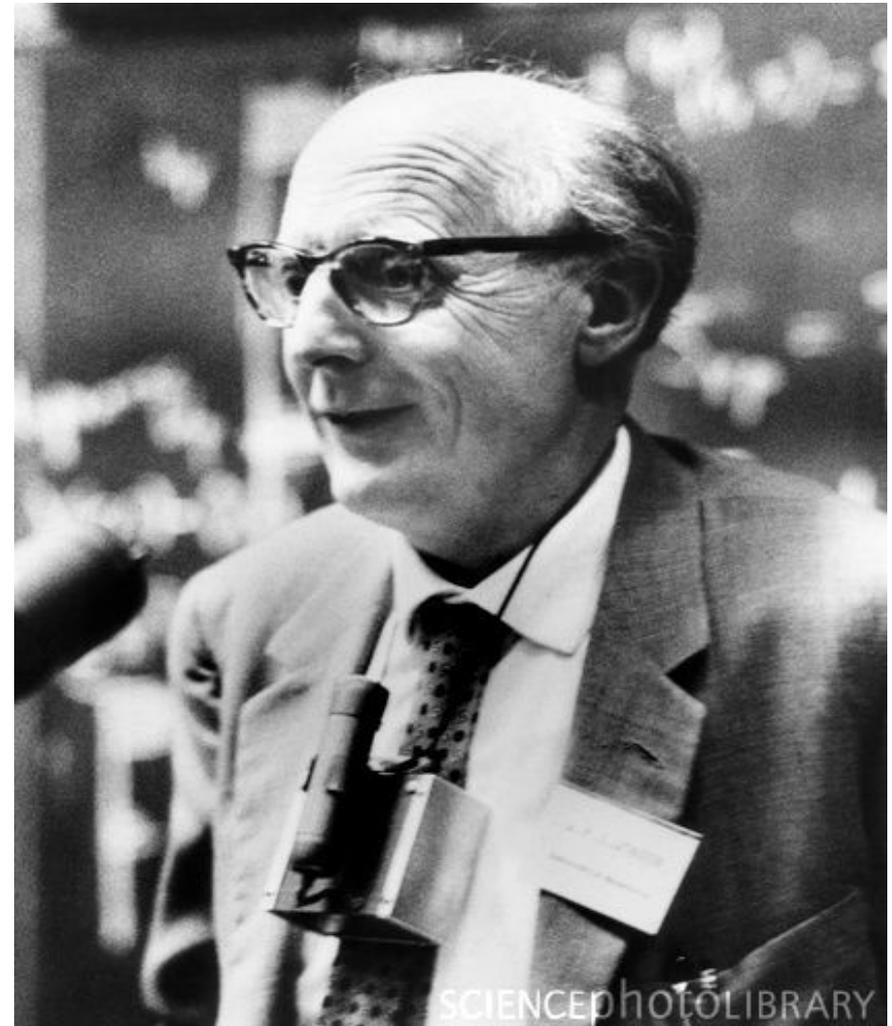
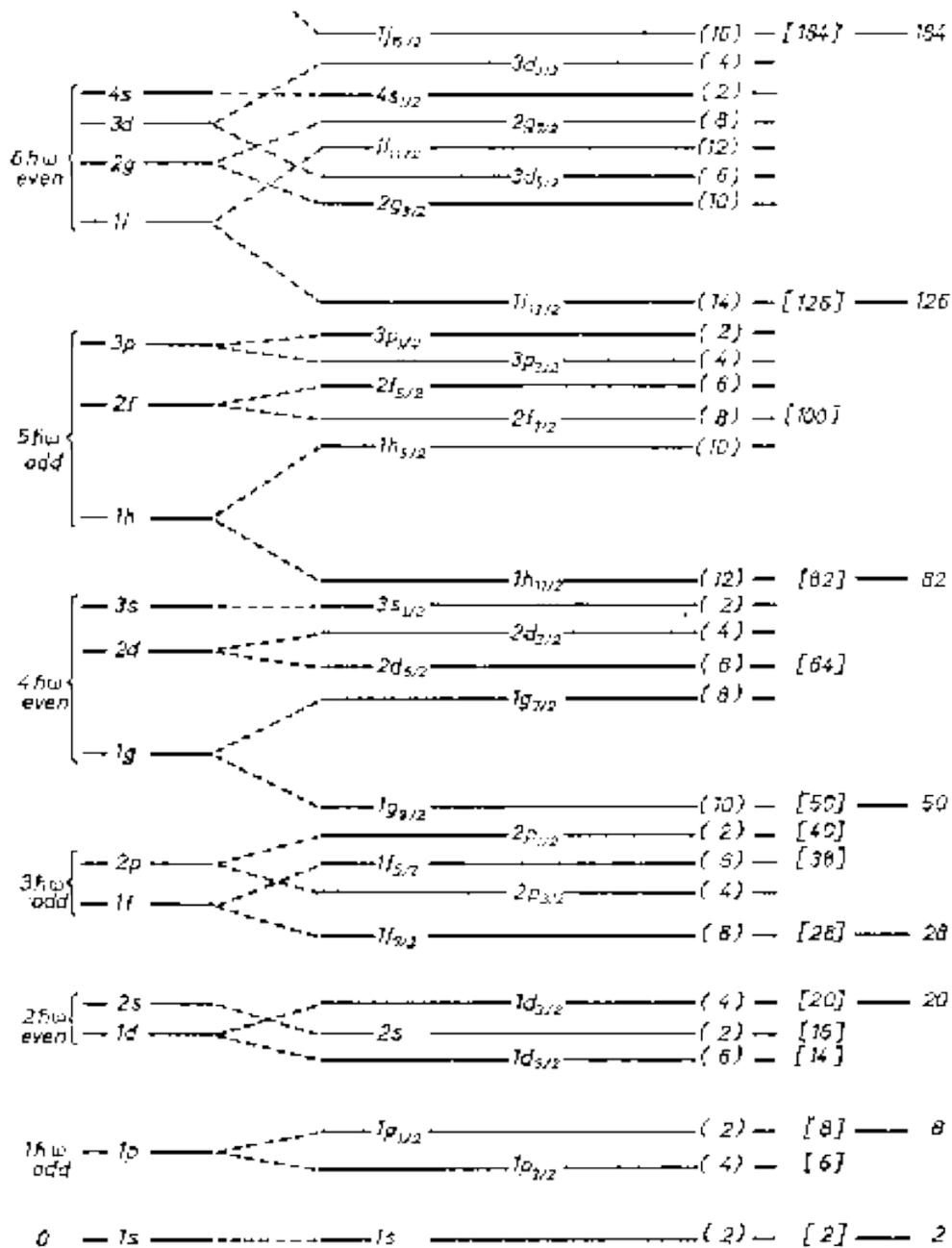


Fig. 6.4. The approximate neutron and proton potentials for ^{114}Sn . As the 50 protons have more neighbours of the attractive opposite kind than the 64 neutrons have, the potential is deeper for the protons by $\approx 50(N-Z)/A$ MeV. To this one has to add the Coulomb repulsive potential, which raises the total effective proton potential by nearly 20 MeV at the origin. The fact that the Fermi energy becomes the same for protons and neutrons leads to a neutron excess, which also comes out from the semi-empirical mass formula. The symmetry and Coulomb energies of this formula are directly related to the two differences between the proton and neutron potentials illustrated here.

- A bajas energías, el potencial de WS es muy similar al del **oscilador armónico**. La ventaja de utilizar este último es que conocemos sus soluciones analíticas y pueden usarse simetrías.
- Sin embargo, existen partes de la interacción nuclear que no se consideran en el campo medio. A estas se les llama partes residuales.

El modelo de capas fue propuesto en trabajos independientes en por
Maria G. Mayer Phys. Rev 75 (1949) 1969 y
J. Jensen Phys. Rev 75 (1949) 1766.



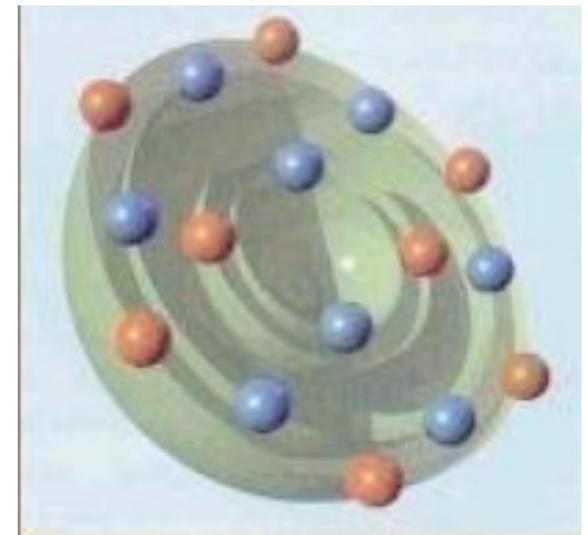


Esquema de niveles del modelo de capas.

A la izquierda el no. cuántico principal (n) formando capas

Al agregar el término de acoplamiento espín-órbita se modifican las capas.

A la derecha se muestra el no. total de partículas.

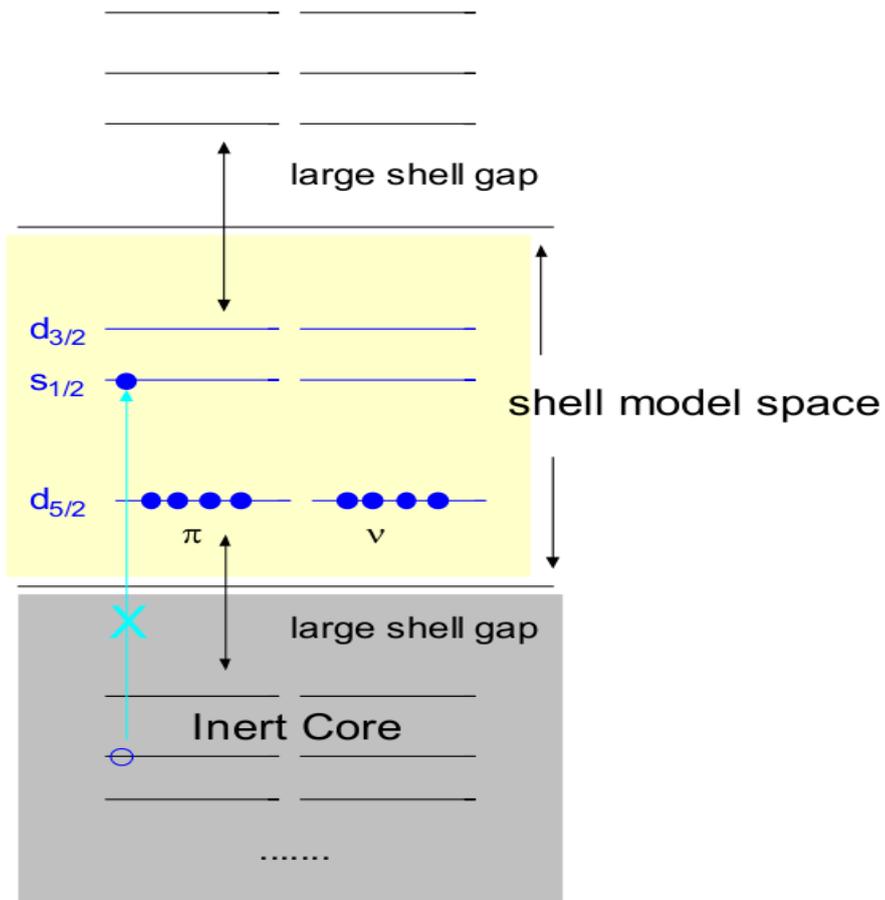


Osc. Armónico

l.s

Nos. mágicos

El problema principal al trabajar con el modelo de capas es que las dimensiones del espacio crecen rápidamente (factorialmente) y muy pronto se hacen inmanejables, aun considerando solamente una capa activa. Aproximación:



Carozo inerte
+
capas superiores bloqueadas

Aun con las consideraciones anteriores, los espacios se desbordan y el problema se vuelve inmanejable. La tabla muestra las dimensiones del espacio para la capa $n=3$.

No. de partículas	4	8	12	16	20
Dimensión del espacio	4000	$2 \cdot 10^6$	$1.10 \cdot 10^8$	$1.09 \cdot 10^9$	$2.29 \cdot 10^9$

El uso de las simetrías representa una gran ventaja para entender y describir el núcleo del átomo y las miles de observables (el zoológico nuclear) asociadas a él.

Los modelos nucleares basados en simetrías pueden separarse en dos grupos:

- Aquellos en los que el núcleo es un sistema formado por fermiones que interactúan. Dentro de éstos podemos mencionar los modelos que incluyen el apareamiento y por otro lado los que consideran interacciones cuadrupolares.
- Consideramos el núcleo como un sistema formado por bosones, los que se forman a su vez por pares de nucleones.

Sistemas fermiónicos

La mayoría de las características básicas de la estructura nuclear pueden derivarse de un hamiltoniano de la forma

$$H = \sum_{k=1}^A \left(\frac{p^2}{2m_n} + \frac{1}{2} m_n f^2 r^2 + C l^2 + D l \cdot s \right) + \sum_{1 \leq k < l}^A V(r_k, r_l)$$

donde k y l corren de 1 a A y r sub $k(l)$ denota las coordenadas asociadas al nucleón $k(l)$ y m es la masa del nucleón. El último término corresponde a la interacción residual entre dos cuerpos. Cuando el campo medio domina, la función de onda está dada por el determinante de Slater construido a partir de los edos. de partícula independiente del campo. Cuando el término residual no es cero, nos enfrentamos a un problema complejo. Resulta interesante que dos de las interacciones residuales más relevantes, el apareamiento y la interacción cuadrupolar se pueden resolver analíticamente usando simetrías.

Simetría $SU(2)$ del hamiltoniano de apareamiento.

En segunda cuantización, el término de apareamiento puede escribirse como

$$V_{\text{apareamiento}} = -g_o S_{+1}^j S_{-1}^j$$

con

$$S_{+1}^j = \frac{1}{2} \sqrt{2j+1} (a_j^d \times a_j^d)_0^{(0)}$$

donde los operadores a crean una partícula en el orbital j y S_z se escribe como

$$S_z^j = 1/4 \left(\sum_{m=-j}^j 2 a_{jm}^d a_{jm} - 2j - 1 \right) = 1/4 (2n_j - 2j - 1)$$

Los tres operadores $S (+, -, z)$
cierran los conmutadores

$$[S_z^j, S_{\pm 1}^j] = \pm S_{\pm 1}^j, [S_{+1}^j, S_{-1}^j] = 2S_z^j$$

lo que muestra que el conjunto de operadores $S(+, -, z)$ forman el álgebra de $SU(2)$. A partir de sus relaciones de conmutación, el hamiltoniano de apareamiento puede escribirse como una combinación de operadores de Casimir pertenecientes a la cadena de álgebras anidadas

$$SU(2) \supset SO(2)$$

con los números cuánticos asociados S y M . Este procedimiento es conocido como "spectrum generating algebras".

El problema de valores propios asociado puede resolverse de forma inmediata en términos del no. cuántico de seniority (v) y de partículas (n) en el orbital j

$$E(n, v) = \frac{-g_0}{4} (n - v)(2j - n - v + 3)$$

El no. cuántico de seniority v corresponde al no. de nucleones sin aparear acoplados a momento angular cero.

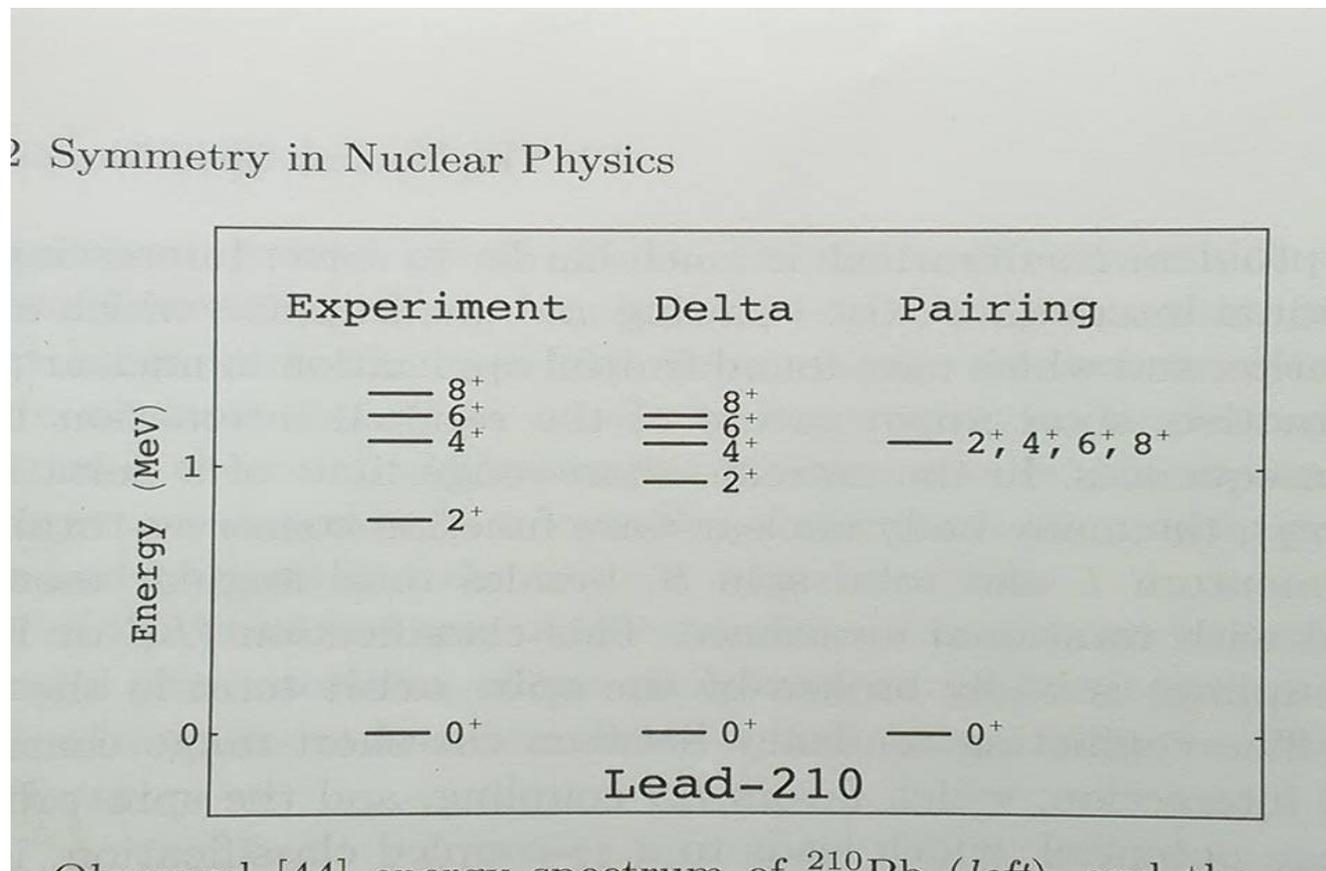
Para un número de orbitales j no degenerados, la generalización se conoce como el método de Richardson

$$H = \sum_j e_j n_j - g_0 \sum_j S_{+1}^j \sum_{j'} S_{-1}^{j'}$$

La solución para el hamiltoniano generalizado a varios orbitales se consigue al tomar

$$SU(2) \times SU(2) \times \dots$$

donde cada álgebra de $SU(2)$ corresponde a un orbital j . Usando esta simetría, puede describirse el Pb



El modelo rotacional

Para un no. arbitrario de partículas, el grupo es $U(4\Omega)$ y su reducción algebraica es

$$U(4\Omega) \supset U(\Omega) \times U(4)$$

donde Ω indica el tamaño de la capa.

La teoría de supermultipletes de Wigner supone una fuerza nuclear invariante ante rotaciones (en el espacio de espín y de isoespín). Esta invariancia se expresa mediante las relaciones de conmutación

$$[H, S_{\mu}] = [H, T_{\mu}] = [H, Y_{\mu, \nu}] = 0$$

donde S , T y Y son los operadores de espín, isoespín y espín-isoespín. Estos 15 operadores generan el álgebra de Lie $SU(4)$, por lo que un hamiltoniano que cumpla estas relaciones de conmutación tiene la simetría $SU(4)$. Añadiendo el operador n (no. de partícs.) obtenemos $U(4)$.

La antisimetría de la función de onda total requiere una simetría conjugada de $U(\Omega)$ y $U(4)$. La parte espacial de la función de onda requiere especificarse. Una clasificación orbital de gran utilidad está dada por el modelo de Elliott ($SU(3)$), donde la interacción residual es de carácter cuadrupolar.

$$H = \sum_{k=1}^A \left(\frac{p^2}{2m_n} + \frac{1}{2} m_n f^2 r^2 + C l^2 + D l \cdot s \right) + \sum_{1 \leq k < l}^A V(r_k, r_l)$$

donde

$$V(r_k, r_l) = -g_2 Q \cdot Q$$

es el término de interacción cuadrupolo-cuadrupolo.

El modelo nuclear su_3

- Este modelo utiliza el campo medio del oscilador armónico en lugar del realista de woods-saxon. La ventaja es que podemos obtener funciones y valores propios analíticos y calcular las propiedades del núcleo añadiendo términos residuales.
- Definiendo los operadores $A_{\alpha\beta}$ en términos de los ops. de creación y aniquilación de bosones $b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}$, se observa que los $A_{\alpha\beta}$ cierran el álgebra de U_3 . Transformando estos a coordenadas esféricas, se observa que existe un subconjunto de 8 ops. que cierran el álgebra de su_3 . El operador que se ha sustraído es precisamente la energía total y nos hemos quedado solamente con la diferencia en el número de cuantos entre las direcciones z , x y y .
- Los números cuánticos de su_3 son λ y μ (λ, μ) , donde $\lambda = n_z - n_x$ y $\mu = n_x - n_y$. De esta manera, (λ, μ) indican la relación existente entre el número de cuantos en z y los que hay en x , o los que se tienen en x respecto a los que hay en y .

El grupo de simetría del Hamiltoniano del oscilador armónico

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (2.1)$$

se aprecia más claramente si este se escribe en términos de los operadores de creación y aniquilación de bosones, definidos como

$$b_\alpha^\dagger \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\alpha - ib^2 p_\alpha/h}{b}, \quad b_\alpha \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\alpha + ib^2 p_\alpha/h}{b} \quad (2.2)$$

A partir de estos operadores podemos construir los nueve operadores de desplazamiento ($A_{\alpha\beta}$)

$$A_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(b_\alpha^\dagger b_\beta + b_\beta b_\alpha^\dagger) \quad (2.4)$$

donde $\alpha, \beta = x, y, z$. Estos operadores tienen el efecto de desplazar un cuanto de oscilador de la dirección β a la dirección α , y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[A_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta}] = A_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - A_{\gamma\beta}\delta_{\alpha\delta} \quad (2.5)$$

En términos de estos operadores resulta fácil mostrar que el Hamiltoniano es

$$H_0 = h\omega(A_{xx} + A_{yy} + A_{zz}) \quad (2.6)$$

y de las relaciones de conmutación (2.5),

$$[H_0, A_{\alpha\beta}] = 0 \quad (2.7)$$

Debido a sus relaciones de conmutación, los operadores $A_{\alpha\beta}$ forman un álgebra de Lie y por lo tanto son los generadores del grupo $U(3)$. El operador de transformaciones unitarias de este grupo es

$$U = \exp \left(i \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \right) \quad (2.8)$$

donde los $C_{\alpha\beta}$ son reales y la U es unitaria. Entonces, de la ecuación (2.7)

$$[H_0, U] = 0, \quad (2.9)$$

lo que establece que los U forman el grupo de simetría para H_0 . Esto nos permite etiquetar los valores y funciones propias de H_0 con las representaciones irreducibles (irreps) de $U(3)$. En el caso del oscilador de muchas partículas, los resultados son similares para

$$H_0 \equiv \sum_{i=1}^A H_0(i) \quad (2.10)$$

y

$$A_{\alpha\beta} \equiv \sum_{i=1}^A A_{\alpha\beta}(i) \quad (2.11)$$

Así mismo, resulta conveniente definir los operadores de desplazamiento de forma que exhiban sus propiedades de transformación como tensores esféricos. El operador L_q de momento angular orbital

$$L_q \equiv \sum_{i=1}^A L_q(i) \quad (2.12)$$

es un tensor de rango uno. También tenemos el tensor de rango dos

$$Q_q \equiv \sum_{i=1}^A Q_q(i) \quad (2.13)$$

donde el operador cuadrupolar algebraico en coordenadas cartesianas es

$$Q_q^a(i) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \left[\frac{r^2 Y_{2q}(\theta_{r_i} \phi_{r_i}) + b^4 p^2 Y_{2q}(\theta_{r_i} \phi_{r_i})}{b^2} \right], \quad q = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.14)$$

el cual tiene momento angular 2. Estos operadores están relacionados con los operadores cartesianos de desplazamiento $A_{\alpha\beta}$ mediante una matriz de transformación [8, 30]

$$A_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad \longleftrightarrow \quad H_0, L_{0,\pm 1}, Q_{0,\pm 1,\pm 2} \quad (2.15)$$

Los generadores en la base esférica satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [L_q, L_{q'}] &= -\sqrt{2} (11qq' | 1q + q') L_{q+q'}, \\ [Q_q, L_{q'}] &= -\sqrt{6} (21qq' | 2q + q') Q_{q+q'}, \\ [Q_q, Q_{q'}] &= 3\sqrt{10} (22qq' | 1q + q') L_{q+q'}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde H_0 conmuta con L_q y Q_q , y $(l_1 l_2 m_1 m_2 | l_3 m_3)$ representa coeficientes de Clebsch-Gordan. De las relaciones de conmutación (2.16) se aprecia que el subconjunto de los ocho operadores L_q ($q = 0, \pm 1$) y Q_q ($q = 0, \pm 1, \pm 2$) conmutan entre ellos mismos por lo que generan el grupo $SU(3)$ de transformaciones unitarias especiales de determinante +1, subgrupo de $U(3)$.

Esta selección de los generadores de $SU(3)$, usando las tres componentes del momento angular, permite apreciar que el grupo R_3 es un subgrupo de $SU(3)$. El esquema de clasificación para la parte espacial de los estados de oscilador armónico está dada por la cadena de grupos

$$SU(3) \supset R_3 \supset SO(2) \quad (2.17)$$

donde $SO(2)$ es el grupo de rotaciones en torno a un eje de simetría, lo que da origen al número cuántico de proyección M .

En la clasificación de los estados, el procedimiento es el siguiente

- Primero clasificamos los estados del oscilador de acuerdo a $U(3)$ y $SU(3)$.
- El siguiente paso es satisfacer el requerimiento de antisimetrización, lo que es necesario para considerar el principio de Pauli. Esto se consigue al clasificar simultáneamente de acuerdo a S_A y $SU(3)$.
- La siguiente clasificación se hace simultáneamente de acuerdo a $SU(3)$ y R_3 , lo que nos lleva a obtener estados con buen momento angular.

Otra cadena de clasificación es la canónica formada por $SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1)$. Esto nos lleva a la clasificación de estados según su máximo peso. Para evitar una exposición demasiado técnica

En el esquema $SU(3)$, la función de onda de un conjunto de partículas idénticas es $|\{n[f]\alpha(\lambda, \mu)KLM_L, SM_S\rangle$

La función de onda del núcleo, que es el producto directo de la función de onda de protones por la función de onda de neutrones es

$$|\Phi_i\rangle = |\{n_\pi[f_\pi]\alpha_\pi(\lambda_\pi, \mu_\pi), n_\nu[f_\nu]\alpha_\nu(\lambda_\nu, \mu_\nu)\}\rho(\lambda, \mu)KL\{S_\pi, S_\nu\}S; JM\rangle$$

El hamiltoniano con términos de rompimiento de la simetría

Los estados propios serán combinaciones

lineales de los de $SU(3)$:

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum_i C_i^\alpha |\Phi_i\rangle$$

campo medio del oscilador armónico

+

términos residuales con rompimiento

(acoplamiento espín-órbita, cuadrupolo-cuadrupolo, apareamiento)

$$H = H_{sp,\pi} + H_{sp,\nu} - \frac{1}{2} \chi Q \cdot Q - G_\pi H_{pair,\pi} - G_\nu H_{pair,\nu} + a K_J^2 + b J^2 + A_{asim} C_2^3$$

El valor propio de los términos $Q \cdot Q$ y C_3 tiene una forma muy sencilla en términos de los números cuánticos del pseudo- su_3

$$\begin{aligned} \langle (\lambda, \mu) | -\frac{\chi}{2} Q \cdot Q | (\lambda, \mu) \rangle &= \chi \left\{ -2 \langle (\lambda, \mu) | C_2 | (\lambda, \mu) \rangle + \frac{3}{2} \langle (\lambda, \mu) | L^2 | (\lambda, \mu) \rangle \right\} \\ &= \chi \left\{ -2 (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + \frac{3}{2} L(L+1) \right\} \end{aligned}$$

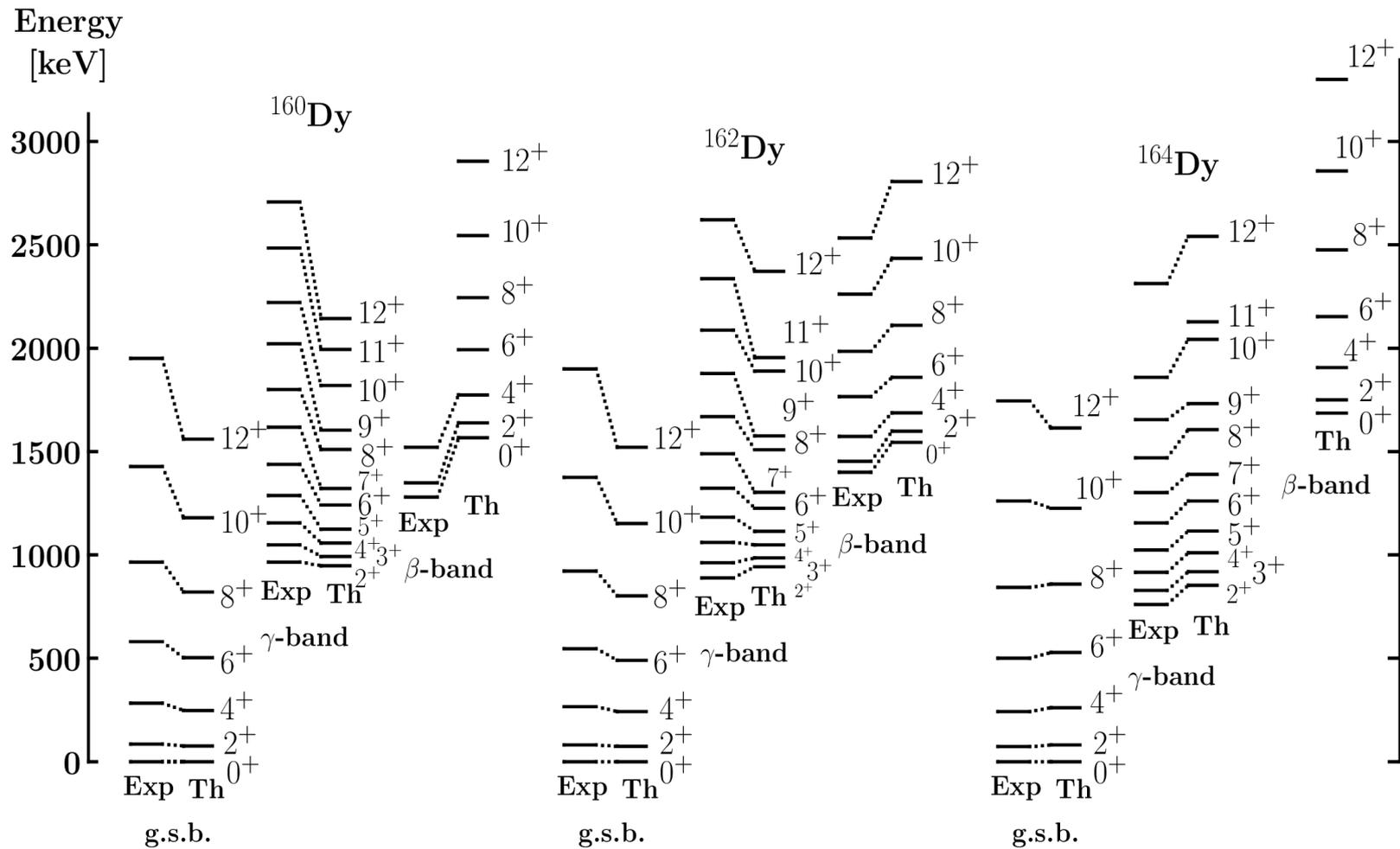
$$\langle C_3 \rangle_{\lambda\mu} = \frac{1}{9} (\lambda - \mu) (\lambda + 2\mu + 3) (2\lambda + \mu + 3)$$

Los elementos de matriz para la interacción espín órbita pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi | \sum_i \vec{l}_i \cdot \vec{s}_i | \Phi' \rangle = & - \sum_{\rho_0 \rho_1} \frac{1}{2} \left[\frac{(\eta + 3)!}{2(\eta - 1)!} \right]^{1/2} \langle (\lambda', \mu') K' L', (1, 1) 11 | | (\lambda, \mu) K L \rangle_{\rho_0} \\
 & \times \begin{bmatrix} (\lambda'_\pi, \mu'_\pi) & (1, 1) & (\lambda_\pi, \mu_\pi) & \rho_1 \\ (\lambda'_\nu, \mu'_\nu) & (0, 0) & (\lambda_\nu, \mu_\nu) & 1 \\ (\lambda', \mu') & (1, 1) & (\lambda, \mu) & \rho_0 \\ \rho' & 1 & \rho & \rho_0 \end{bmatrix} U \begin{pmatrix} S'_\pi & 1 & S_\pi \\ S'_\nu & 0 & S_\nu \\ S' & 1 & S \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} L' & 1 & L \\ S' & 1 & S \\ J' & 0 & J \end{pmatrix} \\
 & \times \langle n'_\pi [f'_\pi] (\lambda'_\pi, \mu'_\pi), S'_\pi | | [a^\dagger_{(\eta, 0) \frac{1}{2}} \tilde{a}_{(0, \eta) \frac{1}{2}}]^{(1, 1) S=1} | | n_\pi [f_\pi] (\lambda_\pi, \mu_\pi), S_\pi \rangle_{\rho_1} \\
 & - \sum_{\rho_0 \rho_1} \frac{1}{2} \left[\frac{(\eta + 3)!}{2(\eta - 1)!} \right]^{1/2} \langle (\lambda', \mu') K' L', (1, 1) 11 | | (\lambda, \mu) K L \rangle_{\rho_0} \\
 & \times \begin{bmatrix} (\lambda'_\pi, \mu'_\pi) & (0, 0) & (\lambda_\pi, \mu_\pi) & 1 \\ (\lambda'_\nu, \mu'_\nu) & (1, 1) & (\lambda_\nu, \mu_\nu) & \rho_1 \\ (\lambda', \mu') & (1, 1) & (\lambda, \mu) & \rho_0 \\ \rho' & 1 & \rho & \rho_0 \end{bmatrix} U \begin{pmatrix} S'_\pi & 1 & S_\pi \\ S'_\nu & 0 & S_\nu \\ S' & 1 & S \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} L' & 1 & L \\ S' & 1 & S \\ J' & 0 & J \end{pmatrix} \\
 & \times \langle n'_\nu [f'_\nu] (\lambda'_\nu, \mu'_\nu), S'_\nu | | [a^\dagger_{(\eta, 0) \frac{1}{2}} \tilde{a}_{(0, \eta) \frac{1}{2}}]^{(1, 1) S=1} | | n_\nu [f_\nu] (\lambda_\nu, \mu_\nu), S_\nu \rangle_{\rho_1}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Como se aprecia, los operadores "a" de creación y aniquilación de fermiones se han expandido como tensores de su₃, por lo que los elementos de matriz de l.s se obtienen en función de los $9-\lambda\mu$, los qj de Jan-hope y los elementos triplemente reducidos de matriz de su₃.

Bandas base, gama y beta en los núcleos ^{160}Dy , ^{162}Dy y ^{164}Dy .



El IBM - Un modelo bosónico de gran utilidad

^{154}Sm \longrightarrow Shell model $\longrightarrow 3 \times 10^{14}$ 2^+ estados

Resultado necesario truncar

Supociciones básicas del IBM assumptions

- 1.- Solamente se incluyen los nucleones de valencia
- 2.- Fermiones \rightarrow Bosones
J=0 (bosones s)
J=2 (bosones d)



De ese número de estados posibles, es viable elegir solamente 26 estados de forma que nos permitan describir adecuadamente las propiedades colectivas de baja energía?

IBA: 26 2^+ estados

Consideramos operadores de creación y aniquilación de bosones con momento angular 0 y 2: s^\dagger, s, d^\dagger y d .

$$d_{\mu}^{\dagger}, d_{\mu} \quad \mu = 2, 1, 0, -1, -2$$

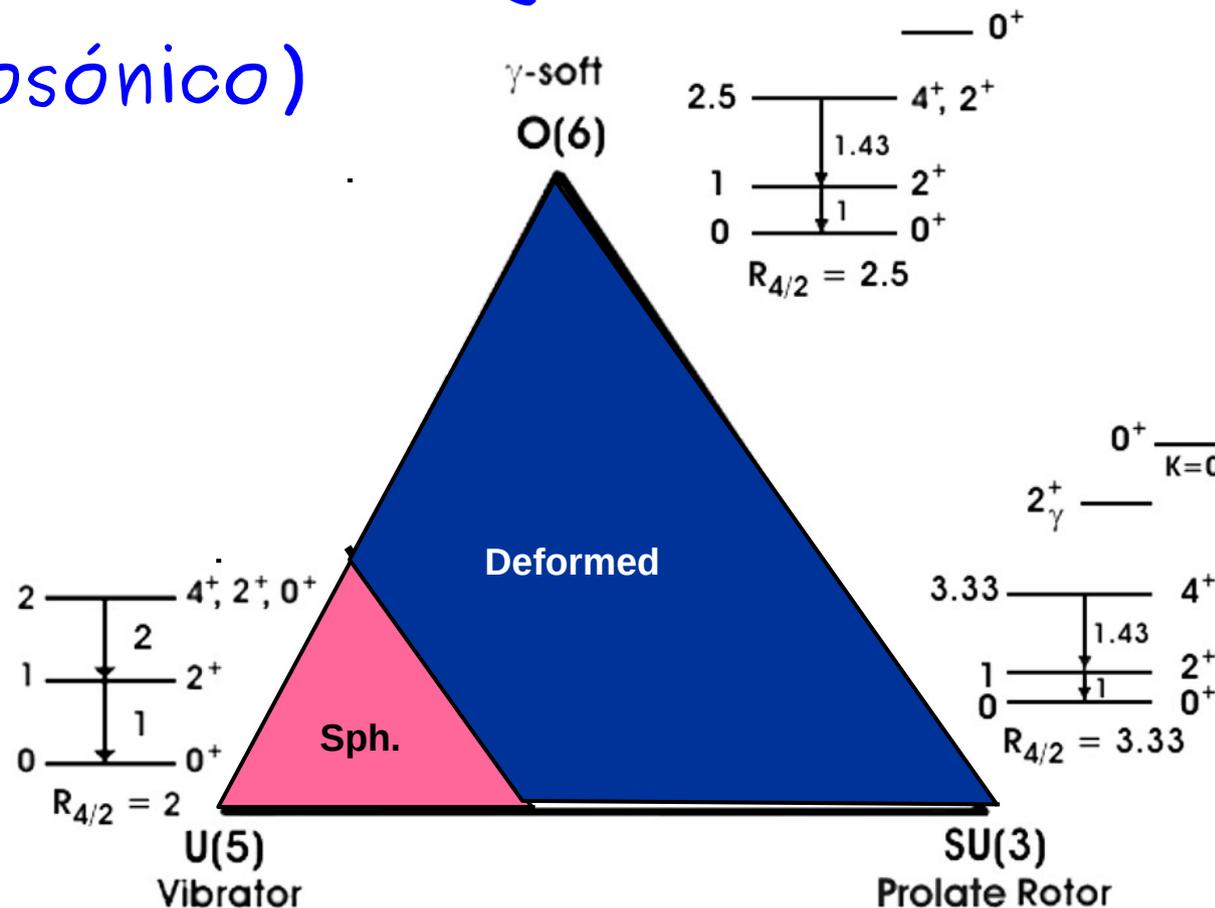
Para el IBM, tenemos 36 operadores $s^\dagger s, d^\dagger s, s^\dagger d, d^\dagger d$, los cuales generan el grupo $U(6)$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \text{ex: } [d^\dagger s, s^\dagger s] |n_d n_s\rangle &= (d^\dagger s s^\dagger s - s^\dagger s d^\dagger s) |n_d n_s\rangle \\
 &= d^\dagger s n_s |n_d n_s\rangle - s^\dagger s d^\dagger s |n_d n_s\rangle \\
 &= (n_s - s^\dagger s) d^\dagger s |n_d n_s\rangle \\
 &= (n_s - s^\dagger s) \sqrt{n_d + 1} \sqrt{n_s} |n_d + 1, n_s - 1\rangle \\
 &= \sqrt{n_d + 1} \sqrt{n_s} [n_s - (n_s - 1)] |n_d + 1, n_s - 1\rangle \\
 &= \sqrt{n_d + 1} \sqrt{n_s} |n_d + 1, n_s - 1\rangle \\
 &= d^\dagger s |n_d n_s\rangle
 \end{aligned}$$

$$\text{or: } [d^\dagger s, s^\dagger s] = d^\dagger s$$

Si escribimos el hamiltoniano en términos de operadores de Casimir del grupo de simetría, sus valores y vectores propios pueden encontrarse analíticamente.

Estructura nuclear del IBM ($U(6)$) en términos del triángulo de Casten (modelo bosónico)



La mayoría de los núcleos pueden asignarse a regiones interiores del triángulo, lejos de los vértices, por lo que no exhiben una simetría pura.

Conclusiones

- El uso de las simetrías es un herramienta de gran utilidad en áreas de física fundamental como las partículas elementales o para describir sistemas mesoscópicos como núcleos, átomos y moléculas.
- Durante muchos años fue la opción de cálculo y una herramienta para entender las propiedades fundamentales del núcleo.
- Aún con el uso intensivo de cómputo, el uso de la simetría hace "realizables" los cálculos que de otra manera no pueden hacerse.