Modelos geométricos de segundo orden en la cosmología de universos de tipo membrana

J. Efraín Rojas

Facultad de Física
Universidad Veracruzana

XI Escuela de Física Fundamental, Universidad Veracruzana, 27/09/2016

Universidad Veracruzana

Plan

Teorías de alto orden en las derivadas

Evolución de un sistema físico

$$S[q] = \int_A^B dt\, L(q, \dot{q})$$

$L = L(q, \dot{q})$: función lagrangiana

Principio de mínima acción: $\delta S = 0 \implies$ ecuaciones de movimiento

Lagrangianos de primer orden, $L = L(q, \dot{q})$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

2^{o} orden

Teorías de alto orden en las derivadas

Evolución de un sistema físico

$$S[q] = \int_A^B dt\, L(q,\dot{q})$$

$L = L(q,\dot{q})$: función lagrangiana

Principio de mínima acción: $\delta S = 0 \implies$ ecuaciones de movimiento

Lagrangianos de primer orden, $L = L(q,\dot{q})$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

2^{o} orden

Lagrangianos de segundo orden, $L = L(q,\dot{q},\ddot{q})$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right] = 0$$

4^{o} orden

Renuencia a teorías de alto orden

Teorías no-físicas . . . pero surgen (son necesarias) en muchos contextos!

Renuencia a teorías de alto orden

Teorías no-físicas . . . pero surgen (son necesarias) en muchos contextos!

Desventajas

- EdM de alto orden en las derivadas
- Propagación de grados de libertad extra
- Inestabilidad en los valores de la energía
- Aparición de "ghosts" a nivel cuántico
- Problemas de unitariedad

Beneficios

- Correciones a ciertas teorías establecidas
- Modelación de efectos observados en la naturaleza
- Gran contenido geométrico
- Aparecen en:
  - Biofísica: Membranas lipídicas. Polímeros semiflexibles
  - Teoría de la elasticidad
  - Econofísica. Optimización
  - T de Norma. Electrodinámica. QCD
  - Gravitación. Cosmología

Superficies

Superficie: generalización de un plano, la cual no es necesariamente plana, tal que su curvatura no es necesariamente cero.

Superficies en física teórica

Superficies se utilizan para aproximar sistemas físicos en todas las escalas

- Teoría de cuerdas
- Física nuclear
- Biofísica
- Materia condensada
- Gravitación
- Cosmología

Importancia

Los grados de libertad relevantes estan asociados con la configuración geométrica de la superficie misma

Segundo orden (contexto euclidiano)

Biofísica

Membranas lipídicas. Membranas ambifílicas

Helfrich, Canham, Zhong-Can, Bowick, Deserno, Capovilla, Guven, **Rojas**

Segundo orden (contexto euclidiano)

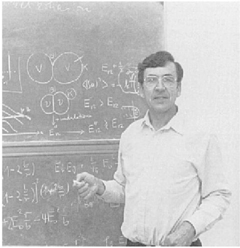
Biofísica

Membranas lipídicas. Membranas ambifílicas

Helfrich, Canham, Zhong-Can, Bowick, Deserno, Capovilla, Guven, **Rojas**

Membranas biofísicas

- Doblamiento de membranas



Segundo orden (contexto euclidiano)

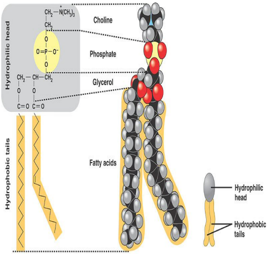
Biofísica

Membranas lipídicas. Membranas ambifílicas

Helfrich, Canham, Zhong-Can, Bowick, Deserno, Capovilla, Guven, **Rojas**

Membranas biofísicas

- Doblamiento de membranas
- Moléculas fosfolípidas



Segundo orden (contexto euclidiano)

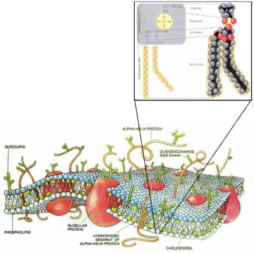
Biofísica

Membranas lipídicas. Membranas ambifílicas

Helfrich, Canham, Zhong-Can, Bowick, Deserno, Capovilla, Guven, **Rojas**

Membranas biofísicas

- Doblamiento de membranas
- Moléculas fosfolípidas
- Membranas biofísicas



Segundo orden (contexto euclidiano)

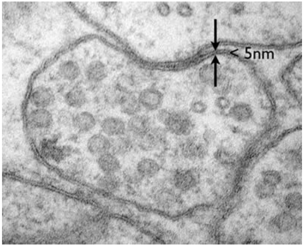
Biofísica

Membranas lipídicas. Membranas ambifílicas

Helfrich, Canham, Zhong-Can, Bowick, Deserno, Capovilla, Guven, **Rojas**

Membranas biofísicas

- Doblamiento de membranas
- Moléculas fosfolípidas
- Membranas biofísicas
- Vesículas a escalas mesoscópicas



Películas de jabón (superficies mínimas)

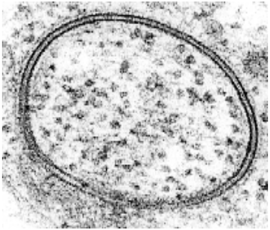
$$S[X^\mu] = \sigma \int d^2u\,\sqrt{g} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2 X^\mu = 0$$

σ tensión superficial, $g = \det(g_{ab})$, $\nabla^2 = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ operador laplaciano

Películas de jabón (superficies mínimas)

$$S[X^\mu] = \sigma \int d^2u \sqrt{g} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2 X^\mu = 0$$

σ tensión superficial, $g = \det(g_{ab})$, $\nabla^2 = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ operador laplaciano



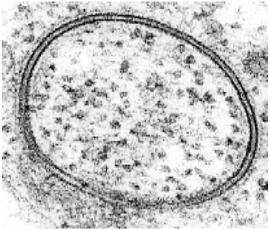
Vesículas. Energía libre de Helfrich-Canham

$$S[X] = \frac{\kappa}{2}\int d^2u\sqrt{g}\,K^2 + \beta\int d^2u\sqrt{g}\,K + \sigma\int d^2u\sqrt{g} - \frac{P}{3}\int d^2u\sqrt{g}\,\vec{n}\cdot\vec{X}$$

Películas de jabón (superficies mínimas)

$$S[X^\mu] = \sigma \int d^2u \sqrt{g} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2 X^\mu = 0$$

σ tensión superficial, $g = \det(g_{ab})$, $\nabla^2 = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ operador laplaciano



Ecuación de forma. Configuraciones de equilibrio

$$\kappa\left[-\nabla^2 K - \frac{K}{2}\left(K^2 - 2\mathcal{R}\right)\right] + \beta\mathcal{R} + \sigma K - P = 0, \qquad K = \vec{n}\cdot\nabla^2\vec{X}$$

Segundo orden (contexto relativista)

Relatividad General

Análisis variacional. Primeros instantes. Aceleración tardía.

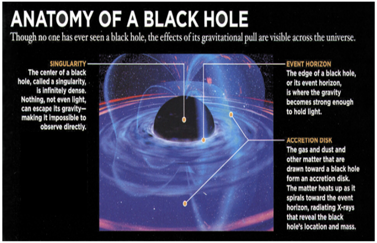
Segundo orden (contexto relativista)

Relatividad General

Análisis variacional. Primeros instantes. Aceleración tardía.

Gravitación pura

- Relatividad General. Agujeros negros



source: Smithsonian Magazine, April, 2008

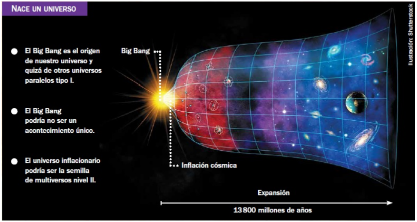
Segundo orden (contexto relativista)

Relatividad General

Análisis variacional. Primeros instantes. Aceleración tardía.

Gravitación pura

- Relatividad General. Agujeros negros
- Primeros instantes del Universo



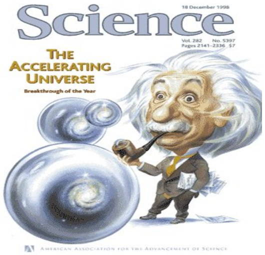
Segundo orden (contexto relativista)

Relatividad General

Análisis variacional. Primeros instantes. Aceleración tardía.

Gravitación pura

- Relatividad General. Agujeros negros
- Primeros instantes del Universo
- Aceleración actual del Universo



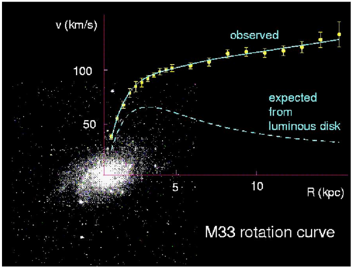
Segundo orden (contexto relativista)

Relatividad General

Análisis variacional. Primeros instantes. Aceleración tardía.

Gravitación pura

- Relatividad General. Agujeros negros
- Primeros instantes del Universo
- Aceleración actual del Universo
- Materia oscura. Energía oscura



Relatividad General pura

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-g}R + S_{\text{mat}} \quad \Longrightarrow \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

- $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha\nu\beta}$ escalar de curvatura
- $R_{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha\partial_\nu g_{\mu\beta}\right)$ tensor de Riemann
- $T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}$ tensor de energía-momento
- 10 ecuaciones de movimiento en $g_{\mu\nu}$; EDP no lineales.

Ampliamente estudiada en:

- Cosmología: clásica y cuántica
- Modelamiento de estrellas
- Teoría de agujeros negros
- Relatividad numérica
- Soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein

Teorías modificadas. Teorías $f(R)$

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-g}f(R) + S_{\text{mat}}$$

$$f(R) = \cdots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + \frac{R}{\beta_1} + \frac{R^2}{\beta^2} + \cdots$$

Ecuaciones de movimiento

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}$$

Tratan de explicar fenómenos:

- Cosmología: clásica y cuántica
- Alternativas para cuantizar la gravedad, R^2
- Expansión acelerada del Universo, $R^{-1}, \ln R$
- Teorías escalares-tensoriales, RG + BD
- Materia oscura. Energía oscura.
- Teorías altamente complejas!

Cosmología en dimensiones extra

Universos de tipo membrana

Universo 3-dimensional visible esta sobre una membrana 4-dimensional flotando en un espacio con más dimensiones

(V. Rubakov, A. Vilenkin, N. Arkani-Hamed, Lisa Randall, R Sundrum, G Gabadadze, G Dvali, M Porrati)

Cosmología en dimensiones extra

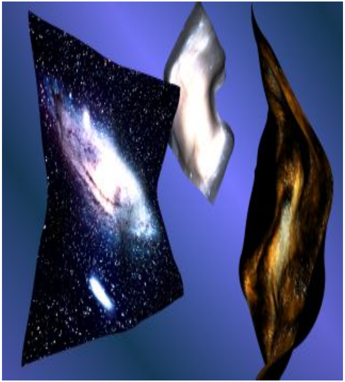
Universos de tipo membrana

Universo 3-dimensional visible esta sobre una membrana 4-dimensional flotando en un espacio con más dimensiones

(V. Rubakov, A. Vilenkin, N. Arkani-Hamed, Lisa Randall, R Sundrum, G Gabadadze, G Dvali, M Porrati)

Cosmología de tipo membrana

- Universo ≈ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones



Cosmología en dimensiones extra

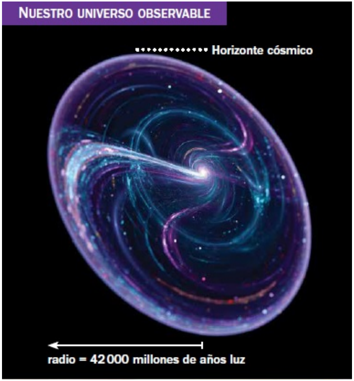
Universos de tipo membrana

Universo 3-dimensional visible esta sobre una membrana 4-dimensional flotando en un espacio con más dimensiones

(V. Rubakov, A. Vilenkin, N. Arkani-Hamed, Lisa Randall, R Sundrum, G Gabadadze, G Dvali, M Porrati)

Cosmología de tipo membrana

- Universo ≈ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones
- Universo ≈ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones



Cosmología en dimensiones extra

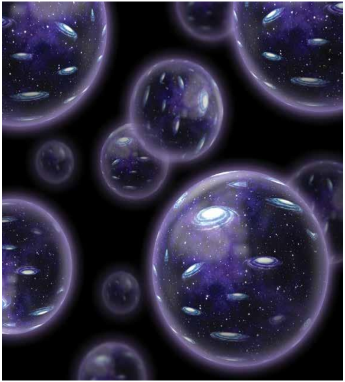
Universos de tipo membrana

Universo 3-dimensional visible esta sobre una membrana 4-dimensional flotando en un espacio con más dimensiones

(V. Rubakov, A. Vilenkin, N. Arkani-Hamed, Lisa Randall, R Sundrum, G Gabadadze, G Dvali, M Porrati)

Cosmología de tipo membrana

- Universo ≈ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones
- Universo ≈ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones
- Multiversos



Cosmología en dimensiones extra

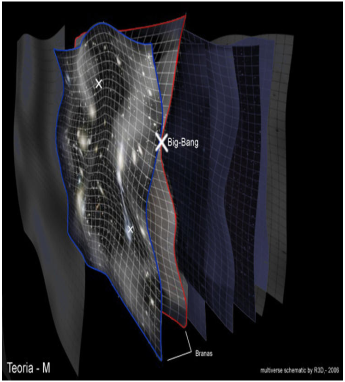
Universos de tipo membrana

Universo 3-dimensional visible esta sobre una membrana 4-dimensional flotando en un espacio con más dimensiones

(V. Rubakov, A. Vilenkin, N. Arkani-Hamed, Lisa Randall, R Sundrum, G Gabadadze, G Dvali, M Porrati)

Cosmología de tipo membrana

- Universo ≈ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones
- Universo ≈ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones
- Multiversos
- Origen del Universo. Aceleración tardía del Universos. Materia oscura. Energía oscura.



Cosmología en dimensiones extra

Universos de tipo membrana

Universo 3-dimensional visible esta sobre una membrana 4-dimensional flotando en un espacio con más dimensiones

(V. Rubakov, A. Vilenkin, N. Arkani-Hamed, Lisa Randall, R Sundrum, G Gabadadze, G Dvali, M Porrati)

Cosmología de tipo membrana

- Universo $\approx$ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones
- Universo $\approx$ membrana flotando en un espacio de fondo con más dimensiones
- Multiversos
- Origen del Universo. Aceleración tardía del Universos. Materia oscura. Energía oscura.
- Teorías geométricas de branas. Galileones Horndeski.

The action $3\pi\Box\pi - \frac{1}{\Lambda^3}(\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi)\Box\pi - \frac{2}{M_P}\pi T$

Is obtained taking the « decoupling limit »

Luty, Porrati, Rattazzi; Nicolis, Rattazzi

$$\begin{cases} M_P \to \infty \\ M_{(5)} \to \infty \\ \Lambda \;\text{fixed} \\ T/M_P \;\text{fixed} \end{cases}$$

It can be obtained from the (5D) « Hamiltonian » constraint

$$R = K^2 - K_{\mu\nu}^2$$

Where one substitutes the Israel junction condition

$$K = \frac{1}{6M_{(5)}^3}\left(T + M_P^2 R\right)$$

To obtain $\frac{3}{r_c}K - K^2 + K_{\mu\nu}^2 = \frac{T}{M_P^2}$

A last substitution $K_{\mu\nu} = \frac{r_c}{M_P}\partial_\mu\partial_\nu\pi$

Yields the e.o.m. for π deduced from above action :

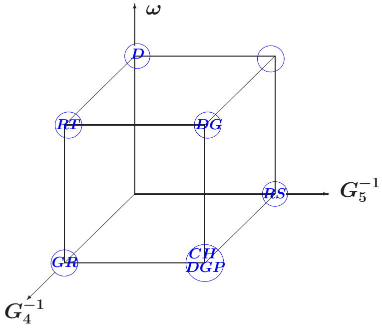
$$\Box\pi - \frac{1}{3\Lambda^3}\left[(\Box\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}\right] = \frac{T}{3M_P}$$

second order e.o.m. The first « Galileon »

($\Rightarrow$ No « Boulware-Deser » ghost, C.D., Rombouts, 2005)

Teoría unificada de branas

- GR: Teoría de la Relatividad General
- D: Modelo extensible de Dirac para el electrón
- RS: Teoría de Randall-Sundrum
- $CH - DGP$: Teorías de Collins-Holdoms, Dvali-Gabadadze-Porrati
- DG: Teoría de Davidson-Gurwich
- RT: Teoría de Regge-Teitelboim



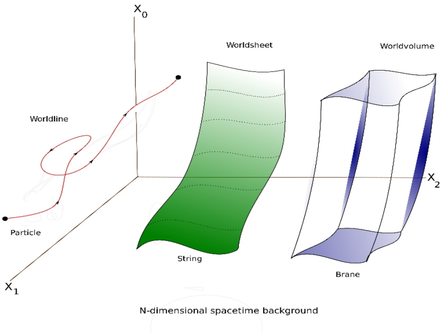
Objetos Extendidos (OE)

Objeto Extendido ≈ Membrana

Objeto de dimensiones arbitrarias inmersa en un espacio ambiente

OE (membrana, brana, $p-$brana, extendón) $\approx$ superficie geométrica

Trayectoria $\equiv$ Volumen de mundo



Acción efectiva

La acción efectiva más general para estudiar la dinámica de un OE

$$S[X] = \int_m d^{p+1}x \sqrt{-g}\, L(g_{ab}, K_{ab})$$

B. Carter, A. Vilenkin, R. Capovilla, J. Guven

Formas fundamentales (métrica y curvatura extrínseca sobre m)

$$\begin{aligned} g_{ab} &:= e_a \cdot e_b \\ K_{ab} &:= -n \cdot \nabla_a \nabla_b X \end{aligned}$$

- X funciones de inmersión
- m volumen de mundo

Importante

- Acción geométrica de segundo orden en X
- Simetría: Invariancia bajo reparametrizaciones de la trayectoria

Acción efectiva

La acción efectiva más general para estudiar la dinámica de un OE

$$S[X] = \int_m d^{p+1}x \sqrt{-g} \left\{ \mu + \alpha\, K^2 + \beta \left(K^2 - K_{ab}K^{ab} \right) + \cdots \right\}$$

Barrabes, Boisseau, Sakellarious, B. Carter, R. Gregory, P. Letelier, A. Larsen

Formas fundamentales (métrica y curvatura extrínseca sobre m)

$$\begin{aligned} g_{ab} &:= e_a \cdot e_b \\ K_{ab} &:= -n \cdot \nabla_a \nabla_b X \end{aligned}$$

- X funciones de inmersión
- m volumen de mundo

Importante

- Acción geométrica de segundo orden en X
- Simetría: Invariancia bajo reparametrizaciones de la trayectoria

Gravedad de tipo Lovelock para branas

Teoría de Lovelock para branas

$$
\begin{aligned}
S[X] &= \int_m d^{p+1}x\,\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{t}\alpha_n L_n(g_{ab},K_{ab}) \\
L_n(g_{ab},K_{ab}) &= \delta^{a_1 a_2 a_3\cdots a_n}_{b_1 b_2 b_3\cdots b_n} K^{b_1}{}_{a_1} K^{b_2}{}_{a_2}\cdots K^{b_n}{}_{a_n}
\end{aligned}
$$

$$a, b = 0, 1, \ldots, p$$

R Reilly (1973), C de Rham, Tolley, Deffayet, M Trodden, **Cruz, Rojas (2012)**

Gravedad de tipo Lovelock para branas

Teoría de Lovelock para branas

$$
\begin{aligned}
S[X] &= \int_m d^{p+1}x\,\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{t}\alpha_n L_n(g_{ab},K_{ab}) \\
L_n(g_{ab},K_{ab}) &= \delta^{a_1 a_2 a_3\cdots a_n}_{b_1 b_2 b_3\cdots b_n} K^{b_1}{}_{a_1} K^{b_2}{}_{a_2}\cdots K^{b_n}{}_{a_n}
\end{aligned}
$$

$a, b = 0, 1, \ldots, p$

R Reilly (1973), C de Rham, Tolley, Deffayet, M Trodden, **Cruz, Rojas (2012)**

- Nambu-Goto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\Big\{\alpha_0 + \alpha_1 K + \alpha_2 \mathcal{R} \\
&+ \alpha_3\left(K^3 - 3KK^a{}_bK^b{}_a + 2K^a{}_bK^b{}_cK^c{}_a\right) \\
&+ \alpha_4\left(\mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd}\right) + \mathcal{O}(K^5)\Big\}
\end{aligned}
$$

Gravedad de tipo Lovelock para branas

Teoría de Lovelock para branas

$$
\begin{aligned}
S[X] &= \int_m d^{p+1}x\,\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{t}\alpha_n L_n(g_{ab},K_{ab}) \\
L_n(g_{ab},K_{ab}) &= \delta^{a_1 a_2 a_3\cdots a_n}_{b_1 b_2 b_3\cdots b_n} K^{b_1}{}_{a_1} K^{b_2}{}_{a_2}\cdots K^{b_n}{}_{a_n}
\end{aligned}
$$

$$a,b=0,1,\ldots,p$$

R Reilly (1973), C de Rham, Tolley, Deffayet, M Trodden, **Cruz, Rojas (2012)**

- Nambu-Goto
- Gibbons-Hawking-York

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\Big\{\boxed{\alpha_0} + \alpha_1\,\boxed{K} + \alpha_2\,\boxed{\mathcal{R}} \\
&+ \alpha_3\,\boxed{\left(K^3 - 3KK^a{}_bK^b{}_a + 2K^a{}_bK^b{}_cK^c{}_a\right)} \\
&+ \alpha_4\,\boxed{\left(\mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd}\right)} + \mathcal{O}(K^5)\Big\}
\end{aligned}
$$

Gravedad de tipo Lovelock para branas

Teoría de Lovelock para branas

$$
\begin{aligned}
S[X] &= \int_m d^{p+1}x \sqrt{-g} \sum_{n=0}^{t} \alpha_n L_n(g_{ab}, K_{ab}) \\
L_n(g_{ab}, K_{ab}) &= \delta^{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}_{b_1 b_2 b_3 \cdots b_n} K^{b_1}{}_{a_1} K^{b_2}{}_{a_2} \cdots K^{b_n}{}_{a_n}
\end{aligned}
$$

$$a, b = 0, 1, \ldots, p$$

R Reilly (1973), C de Rham, Tolley, Deffayet, M Trodden, **Cruz, Rojas (2012)**

- Nambu-Goto
- Gibbons-Hawking-York
- Regge-Teitelboim

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\Big\{ \alpha_0 + \alpha_1 K + \alpha_2 \mathcal{R} \\
&+ \alpha_3 \left(K^3 - 3KK^a{}_b K^b{}_a + 2K^a{}_b K^b{}_c K^c{}_a\right) \\
&+ \alpha_4 \left(\mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd}\right) + \mathcal{O}(K^5)\Big\}
\end{aligned}
$$

Gravedad de tipo Lovelock para branas

Teoría de Lovelock para branas

$$
\begin{aligned}
S[X] &= \int_m d^{p+1}x\,\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{t}\alpha_n L_n(g_{ab},K_{ab}) \\
L_n(g_{ab},K_{ab}) &= \delta^{a_1 a_2 a_3\cdots a_n}_{b_1 b_2 b_3\cdots b_n} K^{b_1}{}_{a_1} K^{b_2}{}_{a_2}\cdots K^{b_n}{}_{a_n}
\end{aligned}
$$

$$a,b=0,1,\ldots,p$$

R Reilly (1973), C de Rham, Tolley, Deffayet, M Trodden, **Cruz, Rojas (2012)**

- Nambu-Goto
- Gibbons-Hawking-York
- Regge-Teitelboim

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\Big\{\alpha_0 + \alpha_1\, K + \alpha_2\, \mathcal{R} \\
&+ \alpha_3\,(K^3 - 3KK^a{}_bK^b{}_a + 2K^a{}_bK^b{}_cK^c{}_a) \\
&+ \alpha_4\,(\mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd}) + \mathcal{O}(K^5)\Big\}
\end{aligned}
$$

- GHY-Myers

Gravedad de tipo Lovelock para branas

Teoría de Lovelock para branas

$$
\begin{aligned}
S[X] &= \int_m d^{p+1}x\,\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{t}\alpha_n L_n(g_{ab},K_{ab}) \\
L_n(g_{ab},K_{ab}) &= \delta^{a_1 a_2 a_3\cdots a_n}_{b_1 b_2 b_3\cdots b_n} K^{b_1}{}_{a_1} K^{b_2}{}_{a_2}\cdots K^{b_n}{}_{a_n}
\end{aligned}
$$

$$a,b = 0,1,\ldots,p$$

R Reilly (1973), C de Rham, Tolley, Deffayet, M Trodden, **Cruz, Rojas (2012)**

- Nambu-Goto
- Gibbons-Hawking-York
- Regge-Teitelboim

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\,\Big\{\boxed{\alpha_0} + \alpha_1 \boxed{K} + \alpha_2 \boxed{\mathcal{R}} \\
&+ \alpha_3\,\boxed{(K^3 - 3KK^a{}_bK^b{}_a + 2K^a{}_bK^b{}_cK^c{}_a)} \\
&+ \alpha_4\,\boxed{(\mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd})} + \mathcal{O}(K^5)\Big\}
\end{aligned}
$$

- GHY-Myers
- Gauss-Bonnet

EdM, segundo orden en X

$$\boxed{J^{ab}_{(n)} K_{ab} = L_{n+1} = 0}$$

- $J^{ab}_0 = g^{ab}$
- $J^{ab}_1 = g^{ab} K - K^{ab} = g^{ab} L_1 - K^{ab}$
- $J^{ab}_2 = G^{ab} = \mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} \mathcal{R}$
- $J^{ab}_3 = g^{ab} L_3 - 3\mathcal{R} K^{ab} + 6 K K^a{}_c K^{cb} - 6 K^a{}_c K^c{}_d K^{db}$

J^{ab}_n tensor tipo Lovelock para OE; conservado, $\nabla_a J^{ab}_n = 0$.

Utilidad

- Cosmología en dimensiones extra
- Pariente de RG
- Galileones
- Modelos extensibles para el electrón (Dirac)
- Desarrollos en Geometría Diferencial. Teoría M.
- Conexión con membranas lipídicas. Correcciones a la energía libre de Helfrich

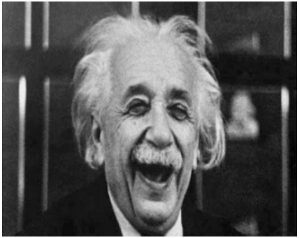
Gravitación tipo brana geodésica

Regge-Teitelboim (1975), inspirados por el modelo de Dirac-Nambu-Goto para cuerdas relativistas imaginaron a nuestro espacio-tiempo 4-dimensional como el volumen de mundo de una brana 3-dimensional flotando en un espacio-tiempo de tipo Minkowski (Gravedad de tipo brana geodésica)

Gravitación tipo brana geodésica

Regge-Teitelboim (1975), inspirados por el modelo de Dirac-Nambu-Goto para cuerdas relativistas imaginaron a nuestro espacio-tiempo 4-dimensional como el volumen de mundo de una brana 3-dimensional flotando en un espacio-tiempo de tipo Minkowski (Gravedad de tipo brana geodésica)

La teoría intentó establecerse como una alternativa matemática viable hacia la unificación de la mecánica cuántica con la teoría de Einstein pero . . .



Davidson & Karasik (2003); Cordero, Molgado & Rojas hamiltoniano cuadrático!

Modelo de RT

El modelo de Regge-Teitelboim

$$S[X] = \int_m d^4x \sqrt{-g}\,(\alpha'\mathcal{R} + \Lambda)$$

Las ecuaciones de movimiento

$$\boxed{T^{ab}K_{ab} = 0}$$

- $T^{ab} = \alpha G^{ab} + \Lambda\, g^{ab}$ tensor de stress intrínseco
- $G_{ab} = \mathcal{R}_{ab} - \dfrac{1}{2}\mathcal{R}\, g_{ab}$ tensor de Einstein

Modelo de RT

El modelo de Regge-Teitelboim

$$S[X] = \int_m d^4x \sqrt{-g}\,(\alpha'\mathcal{R} + \Lambda) + S_{\text{mat}}$$

Las ecuaciones de movimiento (materia)

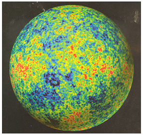
$$\boxed{T^{ab} K_{ab} = F}$$

- $T^{ab} = \alpha G^{ab} + \Lambda\, g^{ab}$ tensor de stress intrínseco
- $G_{ab} = \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\, g_{ab}$ tensor de Einstein

Geometría FRW

3-brana Σ flotando en Minkowski, métrica inducida, $ds^2 = N^2 d\tau^2 + a^2 d\Omega_3^2$ con $N = \sqrt{\dot{t}^2 - \dot{a}^2}$

Cordero, Molgado & **Rojas**



Geometría del volumen de mundo $\equiv$ FRW con un Lagrangiano

$$
\begin{aligned}
L(a, \dot{a}, \ddot{a}, \dot{t}, \ddot{t}) &= \frac{a\dot{t}}{N^3}\left(a\ddot{a}\dot{t} - a\ddot{t}\dot{a} + N^2\dot{t}\right) - Na^3H^2 \\
&= -\frac{a\dot{a}^2}{N} + aN(1 - a^2H^2) + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{a^2\dot{a}}{N}\right)
\end{aligned}
$$

Ecuación de movimiento

$$
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}}\right) = -\frac{N^2}{a^2\dot{t}}\,\frac{\dot{t}^2 - 3N^2a^2H^2}{3\dot{t}^2 - N^2a^2H^2}
$$

con $H^2 = \Lambda/3\alpha$

Aproximación hamiltoniana (Ostrogradski)

$$P_t = -\frac{a^2\dot{a}\dot{t}}{N^3} \qquad P_a = \frac{a^2\dot{t}^2}{N^3}$$

$$p_t = \frac{a\dot{t}}{N^3}\left[\dot{a}^2 + N^2\left(1 - a^2H^2\right)\right] =: \Omega \qquad p_a = \left(\frac{\dot{a}}{\dot{t}}\right)\Omega$$

Ecuación de Friedman

$$\boxed{N^2 + \dot{a}^2 = \gamma N^2 a^2 H^2}$$

γ satisface la ecuación cúbica $\gamma(\gamma-1)^2 = \Omega^2/a^8H^6$

Constricciones de primera y segunda clase

$$\mathcal{F}_1 = N\Pi_N = 0$$

$$\mathcal{F}_2 = N\left\{\mathfrak{p}_a^2 - a\left[-\left(\frac{\Omega}{(\gamma-1)a^3H^2}\right)p_t + \frac{\mathfrak{p}_a\dot{a}}{N} + a^3H^2 + \frac{1}{a^3}N^2\Pi_N^2 - \frac{1}{a^3}\Pi_v^2\right]\left[(\gamma-1)a^2H^2+2\right]\right\} = 0$$

$$\mathcal{S}_1 = \Pi_v - \frac{a^2\dot{t}}{N} = 0 \qquad \mathcal{S}_2 = \mathfrak{p}_a\dot{t} - \frac{2a\dot{a}}{N}\dot{t} = 0$$

Ansatz $\Psi(\tau, a) = \varphi(a) e^{-i\Omega\tau}$

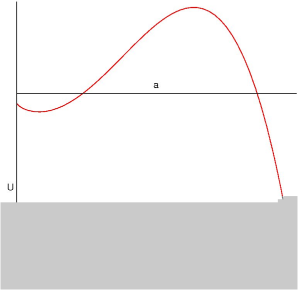
$$\hat{\mathcal{F}}_1 \Psi = 0 \qquad \text{and} \qquad \hat{\mathcal{F}}_2 \Psi = 0$$

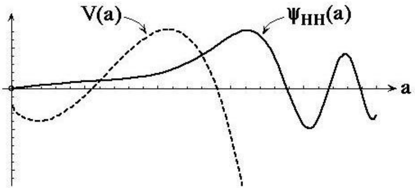
Ecuación tipo WDW

$$\left[-\frac{d^2}{da^2} + U(a)\right] \varphi(a) = 0$$

donde

$$\boxed{U(a) = a^2 \left\{\left[\gamma(a) - 1\right] a^2 H^2 + 2\right\}^2 \left[1 - \gamma(a) H^2 a^2\right]}$$





- $U(a)$ admite una barrera de potencial si $\Omega H \leq 2/(3\sqrt{3})$.
- Características de la barrera $a_1 < a < a_2$. Para $\Omega H \ll 1$ los puntos de retorno

$$a_1 \simeq \Omega \qquad a_2 \simeq H^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\Omega H\right)$$

- Distancias grandes,

$$U(a \gg \Omega) \simeq 4a^2(1 - H\Omega - H^2a^2)$$

- Distancias cortas

$$U(a \ll \Omega) \simeq -\Omega^2 - 3\Omega^4 a^{2/3} + 4a^2$$

- Condiciones de frontera (A. Davidson). Función de onda, WKB

$$\varphi_{\mathsf{HH}}\left(a_{\mathsf{L}} < a < a_{\mathsf{R}}\right) \backsimeq \mp \frac{1}{\sqrt{U}} \exp\left[\pm \int_{a_{\mathsf{L}}}^{a} \sqrt{U} da'\right]$$

Modelo de RT modificado

El modelo de Regge-Teitelboim modificado

$$S[X] = \int_m d^4\xi \, \sqrt{-g}\,(\alpha'\mathcal{R} + \beta\, K - \Lambda)$$

Cordero, Cruz, Molgado, Rojas

Las ecuaciones de movimiento

$$\boxed{T^{ab}K_{ab} = 0}$$

- $T^{ab} = \alpha G^{ab} + \beta\, S^{ab} + \Lambda\, g^{ab}$ tensor de stress intrínseco
- $G_{ab} = \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\, g_{ab}$ tensor de Einstein
- $S_{ab} = K_{ab} - K\, g_{ab}$ tensor conservado

Geometría FRW. Análisis clásico

3-brana Σ flotando en Minkowski, métrica inducida, $ds^2 = N^2 d\tau^2 + a^2 d\Omega_3^2$.

Ecuación tipo Friedmann

$$-\frac{E}{a^4} = \frac{(\dot{a}^2 + k)^{1/2}}{a}\left[\frac{(\dot{a}^2 + k)}{a^2} - (\bar{\Lambda} + \bar{\rho})\right] + 3\bar{\beta}\frac{(\dot{a}^2 + k)}{a^2}$$

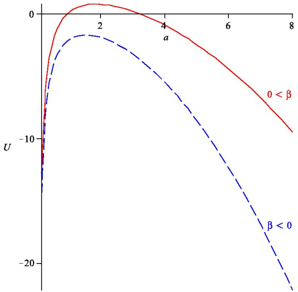
Análisis clásico

$$\dot{a}^2 + U(a, E) = 0$$

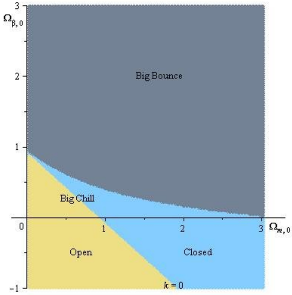
donde

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{U(a,E)}{H_0^2} = -\Omega_{k,0} - \frac{a^2}{9}\Bigg\{ & 2\left[\Omega_{\beta,0}^2 + 3\left(\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}\right)\right]^{1/2} \times \\ & F\left[\frac{1}{3}F^{-1}\left(\frac{\Omega_{\beta,0}\left[\Omega_{\beta,0}^2 + \frac{9}{2}\left(\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}\right)\right] - \frac{27\Omega_{dr}}{2a^4}}{\left[\Omega_{\beta,0}^2 + 3\left(\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}\right)\right]^{3/2}}\right)\right] - \Omega_{\beta,0}\Bigg\}^2\end{aligned}}$$

con $F(x) = \cosh x, \cos x$. Parámetros densidad de energía, $\Omega_k, \Omega_\Lambda, \Omega_m, \Omega_\beta, \Omega_{dr}$



Potencial clásico, ($\beta > 0$, $\beta < 0$)



Posibles trayectorias

En términos del parámetro de Hubble

$$\left(\frac{H^2}{H_0^2}-\frac{\Omega_k}{a^2}\right)^{1/2}\left(\frac{H^2}{H_0^2}-\frac{\Omega_k}{a^2}-\frac{\Omega_m}{a^3}-\Omega_\Lambda\right)+\Omega_\beta\left(\frac{H^2}{H_0^2}-\frac{\Omega_k}{a^2}\right)=\frac{\Omega_{dr}}{a^4}$$

Condición de normalización

$$(1-\Omega_{k,0})^{1/2}(1-\Omega_{k,0}-\Omega_{m,0}-\Omega_{\Lambda,0})+\Omega_{\beta,0}(1-\Omega_{k,0})=\Omega_{dr}$$

Conexión con DGP

El caso $\Omega_{dr} = 0$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} + 3\bar{\beta}\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}} = \bar{\Lambda} + \bar{\rho}$$

Ecuación similar a la expresión que describe las ramas no auto-aceleradas y auto-aceleradas de la teoría de Dvali-Gabadadze-Porrati.

Se tiene una constante cosmológica efectiva

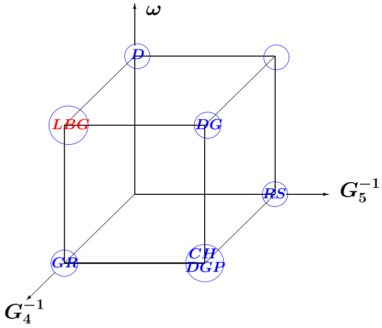
$$\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda - 3\beta\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}$$

El parámetro β

β juega el papel de r_c^{-1}

Teoría unificada de branas (propuesta)

- GR: Relatividad General
- D: Modelo extensible de Dirac para el electrón
- RS: Teoría de Randall-Sundrum
- $CH - DGP$: Teoría de Collins-Holdoms, Dvali-Gabadadze-Porrati
- DG: Teoría de Davidson-Gurwich
- LBG: Teoría de branas de tipo Lovelock



Conclusiones

- Teorías de segundo orden son de utilidad en muchos contextos
- El concepto de brana es útil para modelar sistemas físicos interesantes a nivel euclidiano y relativista
- Amplio rango de aplicaciones. Teoría de cuerdas, Membranas lipídicas, Econofísica, Electrodinámica, RG
- Teorías de tipo Lovelock producen escenarios cosmológicos con aceleración tardía

Trabajo en progreso. Intereses

- Cuantización de lagrangianos dependiendo linealmente de la aceleración
- La aproximación Ostrogradski-Hamilton resulta ser de utilidad para cuantizar canónicamente a este tipo de teorías
- Principales aplicaciones en cosmología de universos en dimensiones extra
- Teorías de tipo Lovelock para branas. Universos que exhiben un comportamiento acelerado tardío
- Aproximación de tipo Born-Infeld a la teoría de Lovelock para universos de tipo membrana
- Incorporación de fondos curvos con interés físico
- Análisis de estabilidad de estos modelos geométricos
- Galileones. Teorías de campos escalares de segundo orden. Modos normales de movimiento.