# Teoría Cuántica de Campos

Alfredo Raya,
(IFM-UMSNH, México)

XI Escuela de Física Fundamental,
Xalapa, Septiembre 26-30, 2016

# Contenido del Curso

- Motivación e Invitación

# Contenido del Curso

- Motivación e Invitación
- Formalismo

# Contenido del Curso

- Motivación e Invitación
- Formalismo
- Campos Cuánticos

# Contenido del Curso

- Motivación e Invitación
- Formalismo
- Campos Cuánticos
- Interacciones I

# Contenido del Curso

- Motivación e Invitación
- Formalismo
- Campos Cuánticos
- Interacciones I
- Interacciones II

# Contenido de la Clase

- Sistemas Continuos

# Contenido de la Clase

- Sistemas Continuos
- Mecánica Cuántica Relativista

# Contenido de la Clase

- Sistemas Continuos
- Mecánica Cuántica Relativista
- Ejemplos

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos el Lagrangiano para un sistema descrito por las coordenadas $q_i$, $L(q_i, \dot{q}_i)$.

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos el Lagrangiano para un sistema descrito por las coordenadas $q_i$, $L(q_i, \dot{q}_i)$.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ ,$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos el Lagrangiano para un sistema descrito por las coordenadas $q_i$, $L(q_i, \dot{q}_i)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ , \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ ,
\end{aligned}
$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos el Lagrangiano para un sistema descrito por las coordenadas $q_i$, $L(q_i, \dot{q}_i)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ , \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ , \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \ .
\end{aligned}
$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos el Lagrangiano para un sistema descrito por las coordenadas $q_i$, $L(q_i, \dot{q}_i)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ , \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ , \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \ .
\end{aligned}$$

Definimos el **momento canónico**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ ,$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos el Lagrangiano para un sistema descrito por las coordenadas $q_i$, $L(q_i, \dot{q}_i)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ , \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \ , \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \ .
\end{aligned}$$

Definimos el **momento canónico**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ ,$$

y entonces

$$\frac{d}{dt}(p_i \dot{q}_i - L) = \frac{d}{dt}H = 0 \ .$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos las variaciones del Hamiltoniano

$$\delta H = p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos las variaciones del Hamiltoniano

$$
\begin{aligned}
\delta H &= p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \\
&= \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i
\end{aligned}
$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos las variaciones del Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\delta H &= p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \\ &= \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \\ &\equiv \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \ ,\end{aligned}$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos las variaciones del Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
\delta H &= p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \\
&= \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \\
&\equiv \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \ ,
\end{aligned}$$

Así, llegamos a las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \ , \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i .$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Consideremos las variaciones del Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
\delta H &= p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \\
&= \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \\
&\equiv \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \ ,
\end{aligned}$$

Así, llegamos a las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \ , \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i .$$

También, definimos los Paréntesis de Poisson

$$\{A, B\}_{PP} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \ .$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Entonces, si una función $F$ depende de $q_i$ y $p_i$,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Entonces, si una función $F$ depende de $q_i$ y $p_i$,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_{PP} \ , \end{aligned}$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Entonces, si una función $F$ depende de $q_i$ y $p_i$,

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_{PP} \ ,
\end{aligned}$$

- Si $F$ no depende explícitamente de $t$,

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{PP} \ ,$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

Entonces, si una función $F$ depende de $q_i$ y $p_i$,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_{PP} \ ,\end{aligned}$$

- Si $F$ no depende explícitamente de $t$,

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{PP} \ ,$$

- Si además $\{F, H\}_{PP} = 0$ , $F$ es una constante de movimiento.

# Lagrangianos y Hamiltonianos

En mecánica cuántica, el cambio en el tiempo de un operador $\hat{F}$ es

$$\frac{d\langle \hat{F} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{F}, \hat{H}] \rangle.$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

En mecánica cuántica, el cambio en el tiempo de un operador $\hat{F}$ es

$$\frac{d\langle \hat{F} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [\hat{F}, \hat{H}] \rangle.$$

Entonces, el paso del mundo clásico al cuántico puede visualizarse mediante el reemplazo

$$\{F, H\}_{PP} \to \frac{1}{i\hbar}\langle [\hat{F}, \hat{H}] \rangle,$$

# Lagrangianos y Hamiltonianos

En mecánica cuántica, el cambio en el tiempo de un operador $\hat{F}$ es

$$\frac{d\langle \hat{F} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{F}, \hat{H}] \rangle.$$

Entonces, el paso del mundo clásico al cuántico puede visualizarse mediante el reemplazo

$$\{F, H\}_{PP} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{F}, \hat{H}] \rangle,$$

o, en general

$$\{A, B\}_{PP} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle.$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

Consideremos (nuevamente) el Hamiltoniano

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \ ,$$

cuyo Lagrangiano asociado es

$$L = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} - \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \ ,$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

Consideremos (nuevamente) el Hamiltoniano

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \ ,$$

cuyo Lagrangiano asociado es

$$L = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} - \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \ ,$$

En el límite continuo,

$$\sum_j \rightarrow \frac{1}{l} \int dx$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

Consideremos (nuevamente) el Hamiltoniano

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}K(q_{j+1} - q_j)^2 \ ,$$

cuyo Lagrangiano asociado es

$$L = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} - \frac{1}{2}K(q_{j+1} - q_j)^2 \ ,$$

En el límite continuo,

$$\sum_j \to \frac{1}{l}\int dx$$

$$\sum_j \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right)^2 \to \int dx \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\right)^2 ,$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

$$\sum_j \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \rightarrow \int dx \frac{1}{2} \mathcal{T} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

$$\sum_j \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \rightarrow \int dx \frac{1}{2} \mathcal{T} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

Entonces,

$$\begin{aligned} H &= \int dx \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{T} (\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 \right] \equiv \int dx \mathcal{H} \\ L &= \int dx \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \mathcal{T} (\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 \right] \equiv \int dx \mathcal{L} \,. \end{aligned}$$

## Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

En 3 dimensiones espaciales,

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \, , \qquad L = \int d^3x \mathcal{L} \, .$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

En 3 dimensiones espaciales,

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \, , \qquad L = \int d^3x \mathcal{L} \, .$$

En general, $H$ y $L$ serán funciones de $\phi$, $\dot{\phi}$ y $\phi'$.

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

En 3 dimensiones espaciales,

$$H = \int d^3x\mathcal{H} \; , \qquad L = \int d^3x\mathcal{L} \; .$$

En general, $H$ y $L$ serán funciones de $\phi$, $\dot{\phi}$ y $\phi'$.
Definimos el momento conjugado

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \; .$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

En 3 dimensiones espaciales,

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \,, \qquad L = \int d^3x \mathcal{L} \,.$$

En general, $H$ y $L$ serán funciones de $\phi$, $\dot{\phi}$ y $\phi'$.
Definimos el momento conjugado

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \,.$$

Así,

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \,.$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

En 3 dimensiones espaciales,

$$H = \int d^3x\mathcal{H} \, , \qquad L = \int d^3x\mathcal{L} \, .$$

En general, $H$ y $L$ serán funciones de $\phi$, $\dot{\phi}$ y $\phi'$.
Definimos el momento conjugado

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \, .$$

Así,

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \, .$$

Recordemos que las ecuaciones de movimiento (en el espacio-tiempo) son

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0.$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

- Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dará todos los modos de oscilación del sistema

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

- Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dará todos los modos de oscilación del sistema
- Nos dará los vectores de onda posibles

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

- Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dará todos los modos de oscilación del sistema
- Nos dará los vectores de onda posibles
- Esto, en forma general, nos permitirá escribir

$$\phi(x,t) = \sum_{k_n} a_{k_n} e^{-i(\omega t - k_n \cdot x)}.$$

# Densidades Lagrangianas y Hamiltonianas

- Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dará todos los modos de oscilación del sistema
- Nos dará los vectores de onda posibles
- Esto, en forma general, nos permitirá escribir

$$\phi(x,t) = \sum_{k_n} a_{k_n} e^{-i(\omega t - k_n \cdot x)}.$$

- Los modos normales son "cuantizables" de ahí que podemos tener fonones, fotones etc....

# Ecuación de Schrödinger

Recordemos que, clásicamente, la energía cinética de una partícula es

$$E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ ,$$

# Ecuación de Schrödinger

Recordemos que, clásicamente, la energía cinética de una partícula es

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ ,$$

Para realizar la *primera cuantización*, cambiamos las variables $E$ y $\mathbf{p}$ por los operadores

$$E \to \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \ , \qquad \mathbf{p} \to \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \ ,$$

# Ecuación de Schrödinger

Recordemos que, clásicamente, la energía cinética de una partícula es

$$E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ ,$$

Para realizar la *primera cuantización*, cambiamos las variables $E$ y $\mathbf{p}$ por los operadores

$$E \to \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \ , \qquad \mathbf{p} \to \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \ ,$$

Al hacer actuar estos operadores sobre una función de onda $\phi(\mathbf{x}, t)$, llegamos a la ecuación de Schrödinger libre

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi \ .$$

# Ecuación de Schrödinger

Las soluciones son de la forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = Ne^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \equiv Ne^{-ip\cdot x} \ .$$

Notemos que

$$\hat{\mathbf{p}}\phi = \hbar\mathbf{k}\phi \ , \qquad \hat{E}\phi = \hbar\omega\phi \ ,$$

# Ecuación de Schrödinger

Las soluciones son de la forma

$$\phi(\mathbf{x},t) = Ne^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \equiv Ne^{-ip\cdot x} \ .$$

Notemos que

$$\hat{\mathbf{p}}\phi = \hbar\mathbf{k}\phi \ , \qquad \hat{E}\phi = \hbar\omega\phi \ ,$$

Decimos que una **onda entrate** tiene momentum y energía positivos.

# Ecuación de Schrödinger

Las soluciones son de la forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = Ne^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \equiv Ne^{-ip\cdot x} \ .$$

Notemos que

$$\hat{\mathbf{p}}\phi = \hbar\mathbf{k}\phi \ , \qquad \hat{E}\phi = \hbar\omega\phi \ ,$$

Decimos que una **onda entrate** tiene momentum y energía positivos.
Además, la interpretación probabilística de la función de onda nos permite tener una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$$

# Ecuación de Schrödinger

Las soluciones son de la forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = Ne^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \equiv Ne^{-ip\cdot x} \ .$$

Notemos que

$$\hat{\mathbf{p}}\phi = \hbar\mathbf{k}\phi \ , \qquad \hat{E}\phi = \hbar\omega\phi \ ,$$

Decimos que una **onda entrate** tiene momentum y energía positivos.
Además, la interpretación probabilística de la función de onda nos permite tener una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$$

donde

$$\rho = |\phi|^2 \ , \qquad \mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*) \ .$$

# Ecuación de Klein-Gordon

Si queremos extender esas ideas para el caso de una partícula relativista, partimos de

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \ ,$$

# Ecuación de Klein-Gordon

Si queremos extender esas ideas para el caso de una partícula relativista, partimos de

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \ ,$$

y así obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)^{1/2} \phi \ ,$$

# Ecuación de Klein-Gordon

Si queremos extender esas ideas para el caso de una partícula relativista, partimos de

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \ ,$$

y así obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)^{1/2} \phi \ ,$$

Dos grandes problemas:

# Ecuación de Klein-Gordon

Si queremos extender esas ideas para el caso de una partícula relativista, partimos de

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \; ,$$

y así obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)^{1/2} \phi \; ,$$

Dos grandes problemas:

- No parece covariante

# Ecuación de Klein-Gordon

Si queremos extender esas ideas para el caso de una partícula relativista, partimos de

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \ ,$$

y así obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)^{1/2} \phi \ ,$$

Dos grandes problemas:

- No parece covariante
- ¿qué significa la raíz cuadrada de un operador diferencial?

# Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos la forma al cuadrado de la relación de dispresión,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \ ,$$

# Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos la forma al cuadrado de la relación de dispresión,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \ ,$$

En unidades naturales, la ecuación resultante es

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\phi \ ,$$

# Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos la forma al cuadrado de la relación de dispresión,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \ ,$$

En unidades naturales, la ecuación resultante es

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\phi \ ,$$

o bien,

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \ .$$

# Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos la forma al cuadrado de la relación de dispresión,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \ ,$$

En unidades naturales, la ecuación resultante es

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\phi \ ,$$

o bien,

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \ .$$

Las soluciones también pueden escribirse como ondas planas,

$$\phi = N e^{-ip\cdot x} \ ,$$

# Ecuación de Klein-Gordon

Consideremos la forma al cuadrado de la relación de dispresión,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \ ,$$

En unidades naturales, la ecuación resultante es

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\phi \ ,$$

o bien,

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \ .$$

Las soluciones también pueden escribirse como ondas planas,

$$\phi = N e^{-ip\cdot x} \ ,$$

pero esta vez, la energía puede tomar valores positivos y negativos,

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \ ,$$

# Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad se escribe covariantemente como

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ ,$$

# Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad se escribe covariantemente como

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \,,$$

donde

$$\mathbf{j} = -i[\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*] \,, \qquad \rho = i \left[ \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right] \,.$$

# Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad se escribe covariantemente como

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \; ,$$

donde

$$\mathbf{j} = -i[\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*] \; , \qquad \rho = i \left[ \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right] \; .$$

Esto es equivalente a

$$j^\mu = i \left( \phi^* \partial^\mu \phi - [\partial^\mu \phi^*] \phi \right) \; .$$

# Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad se escribe covariantemente como

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \; ,$$

donde

$$\mathbf{j} = -i[\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*] \; , \qquad \rho = i \left[ \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right] \; .$$

Esto es equivalente a

$$j^\mu = i \left( \phi^* \partial^\mu \phi - [\partial^\mu \phi^*] \phi \right) \; .$$

Insertando la forma de una onda plana entrante,

$$j^0 = \rho = 2|N|^2 E \; ,$$

que no es positivo definido!!!

# Antipartículas

Feynman y Stuckelberg encontraron una forma de reinterpretar las soluciones de energía negativa: Estas son partículas retrocediendo en el tiempo.

# Antipartículas

Feynman y Stuckelberg encontraron una forma de reinterpretar las soluciones de energía negativa: Estas son partículas retrocediendo en el tiempo.

Consideremos las ecuaciones de movimiento clásicas para una partícula cargada en un campo electromagnético

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = qF^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \ ,$$

# Antipartículas

Feynman y Stuckelberg encontraron una forma de reinterpretar las soluciones de energía negativa: Estas son partículas retrocediendo en el tiempo.
Consideremos las ecuaciones de movimiento clásicas para una partícula cargada en un campo electromagnético

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = qF^\mu_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau} \ ,$$

Observamos que:

# Antipartículas

Feynman y Stuckelberg encontraron una forma de reinterpretar las soluciones de energía negativa: Estas son partículas retrocediendo en el tiempo.
Consideremos las ecuaciones de movimiento clásicas para una partícula cargada en un campo electromagnético

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = qF^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \ ,$$

Observamos que:

- Cambiar el signo del tiempo propio $\tau$ es equivalente a cambiar el signo de la carga $q$

# Antipartículas

Feynman y Stuckelberg encontraron una forma de reinterpretar las soluciones de energía negativa: Estas son partículas retrocediendo en el tiempo.
Consideremos las ecuaciones de movimiento clásicas para una partícula cargada en un campo electromagnético

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = qF^\mu_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau} \ ,$$

Observamos que:

- Cambiar el signo del tiempo propio $\tau$ es equivalente a cambiar el signo de la carga $q$
- Entonces, una partícula retrocediendo en el tiempo se ve igual que una antipartícula (de carga opuesta) avanzando en el tiempo

# Antipartículas

Esto es evidente si consideramos la corriente electromagnética asociada a una partícula descrita por una onda entrate,

$$J^{\mu}_{\mathrm{em}} = (+q)j^{\mu} = 2|N|^2 p^{\mu} = 2|N|^2(E, \mathbf{p}) \ ,$$

# Antipartículas

Esto es evidente si consideramos la corriente electromagnética asociada a una partícula descrita por una onda entrate,

$$J^{\mu}_{\mathrm{em}} = (+q) j^{\mu} = 2|N|^2 p^{\mu} = 2|N|^2 (E, \mathbf{p}) \ ,$$

Una partícula de energía negativa con carga negativa tiene

$$J^{\mu}_{\mathrm{em}} = (+q) 2|N|^2 (-E, \mathbf{p}) \ ,$$

# Antipartículas

Esto es evidente si consideramos la corriente electromagnética asociada a una partícula descrita por una onda entrate,

$$J^\mu_{\rm em} = (+q) j^\mu = 2|N|^2 p^\mu = 2|N|^2 (E, \mathbf{p}) \ ,$$

Una partícula de energía negativa con carga negativa tiene

$$J^\mu_{\rm em} = (+q) 2|N|^2 (-E, \mathbf{p}) \ ,$$

Como no queremos tratar con energías negativas, cambiamos el signo global,

$$J^\mu_{\rm em} = -(+q) 2|N|^2 (E, -\mathbf{p}) = (-q) 2|N|^2 (E, -\mathbf{p}) \ .$$

# Antipartículas

Esto es evidente si consideramos la corriente electromagnética asociada a una partícula descrita por una onda entrate,

$$J^{\mu}_{\mathrm{em}} = (+q)j^{\mu} = 2|N|^2 p^{\mu} = 2|N|^2 (E, \mathbf{p}) \ ,$$

Una partícula de energía negativa con carga negativa tiene

$$J^{\mu}_{\mathrm{em}} = (+q)2|N|^2(-E, \mathbf{p}) \ ,$$

Como no queremos tratar con energías negativas, cambiamos el signo global,

$$J^{\mu}_{\mathrm{em}} = -(+q)2|N|^2(E, -\mathbf{p}) = (-q)2|N|^2(E, -\mathbf{p}) \ .$$

La solución de onda plana para la EKG es

$$\phi = Ae^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + Be^{i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \ .$$

# Lagrangianos

- La física teórica se basa en escribir modelos para describir el comportamiento de diferentes sistemas en el Universo.

# Lagrangianos

- La física teórica se basa en escribir modelos para describir el comportamiento de diferentes sistemas en el Universo.
- Un buen punto de partida es escribir el Lagrangiano apropiado.

# Lagrangianos

- La física teórica se basa en escribir modelos para describir el comportamiento de diferentes sistemas en el Universo.
- Un buen punto de partida es escribir el Lagrangiano apropiado.
- Se debe elegir el modelo más simple que contenga las ideas físicas relevantes al sistema y la simetría correcta para el problema

# Lagrangianos

- La física teórica se basa en escribir modelos para describir el comportamiento de diferentes sistemas en el Universo.
- Un buen punto de partida es escribir el Lagrangiano apropiado.
- Se debe elegir el modelo más simple que contenga las ideas físicas relevantes al sistema y la simetría correcta para el problema
- Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange nos otorga los modos normales del sistema, soluciones tipo onda, que pueden considerarse partículas a partir de la relación de dispersión apropiada.

# Lagrangianos

- La física teórica se basa en escribir modelos para describir el comportamiento de diferentes sistemas en el Universo.
- Un buen punto de partida es escribir el Lagrangiano apropiado.
- Se debe elegir el modelo más simple que contenga las ideas físicas relevantes al sistema y la simetría correcta para el problema
- Resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange nos otorga los modos normales del sistema, soluciones tipo onda, que pueden considerarse partículas a partir de la relación de dispersión apropiada.

Veamos algunos ejemplos:

# Campo escalar no masivo

- El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \ ,$$

# Campo escalar no masivo

- El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \ ,$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \ , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \ .$$

# Campo escalar no masivo

- El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \ ,$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \ , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \ .$$

- Relación de dispersión

$$E = |\mathbf{p}| \ .$$

# Campo escalar masivo

- El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \ ,$$

# Campo escalar masivo

- El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \ ,$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^2 \ , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad \Rightarrow \quad (\partial^2 + m^2)\phi = 0 \ .$$

# Campo escalar masivo

- El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \ ,$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^2 \ , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad \Rightarrow \quad (\partial^2 + m^2)\phi = 0 \ .$$

- Relación de dispersión

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \ .$$

# Interacciones

- Fuente externa,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j\phi \ ,$$

# Interacciones

- Fuente externa,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + j\phi \ ,$$

- Autointeracciones

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ ,$$

# Interacciones

- Fuente externa,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j\phi \ ,$$

- Autointeracciones

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ ,$$

- Interacciones con otros campos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 - g(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

# Campo escalar complejo

- Sean $\phi_1$ y $\phi_2$ dos campos escalares. Definimos

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 + i\phi_2] \,, \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 - i\phi_2] \,.$$

# Campo escalar complejo

- Sean $\phi_1$ y $\phi_2$ dos campos escalares. Definimos

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 + i\phi_2] \, , \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 - i\phi_2] \, .$$

- Un Lagrangiano con autointeracciones en este caso es

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi - g(\psi^\dagger \psi)^2$$

# Campo escalar complejo

- Sean $\phi_1$ y $\phi_2$ dos campos escalares. Definimos

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 + i\phi_2] \,, \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 - i\phi_2] \,.$$

- Un Lagrangiano con autointeracciones en este caso es

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi - g(\psi^\dagger \psi)^2$$

- Esta teoría es un preámbulo para describir las interacciones electromagnéticas.

# Campo escalar complejo

- Sean $\phi_1$ y $\phi_2$ dos campos escalares. Definimos

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 + i\phi_2] \ , \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1 - i\phi_2] \ .$$

- Un Lagrangiano con autointeracciones en este caso es

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi - g(\psi^\dagger \psi)^2$$

- Esta teoría es un preámbulo para describir las interacciones electromagnéticas.
- Una generalización es la teoría $\psi^\dagger \psi \phi$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - g\psi^\dagger \psi \phi. \end{aligned}$$