Teoría Cuántica de Campos

Alfredo Raya,
(IFM-UMSNH, México)

XI Escuela de Física Fundamental,
Xalapa, Septiembre 26-30, 2016

Contenido del Curso

- Motivación e Invitación [1]

[1] QFT for the gifted amateur, Lancaster & Blundell.

Contenido del Curso

- Motivación e Invitación [1]
- Formalismo

[1] QFT for the gifted amateur, Lancaster & Blundell.

Contenido del Curso

- Motivación e Invitación [1]
- Formalismo
- Campos Cuánticos

[1] QFT for the gifted amateur, Lancaster & Blundell.

Contenido del Curso

- Motivación e Invitación [1]
- Formalismo
- Campos Cuánticos
- Interacciones I

[1] QFT for the gifted amateur, Lancaster & Blundell.

Contenido del Curso

- Motivación e Invitación [1]
- Formalismo
- Campos Cuánticos
- Interacciones I
- Por definir*

[1] QFT for the gifted amateur, Lancaster & Blundell.

Contenido de la Clase

- Invitación

Contenido de la Clase

- Invitación
- Lagrangianos

Contenido de la Clase

- Invitación
- Lagrangianos
- Oscilador Armónico

Contenido de la Clase

- Invitación
- Lagrangianos
- Oscilador Armónico
- Segunda Cuantización

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

- La descripción de sistemas con interacciones complicados involucra una TCC

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

- La descripción de sistemas con interacciones complicados involucra una TCC
- La TCC explica por qué todos los electrones son idénticos

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

- La descripción de sistemas con interacciones complicados involucra una TCC
- La TCC explica por qué todos los electrones son idénticos
- Explica por qué sistemas de partículas idénticas se distinguen en bosones y fermiones

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

- La descripción de sistemas con interacciones complicados involucra una TCC
- La TCC explica por qué todos los electrones son idénticos
- Explica por qué sistemas de partículas idénticas se distinguen en bosones y fermiones
- Las interacciones en la TCC se describen mediante productos de operadores que crean y aniquilan partículas

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

- Un campo toma las coordenadas de un punto en el espacio y el tiempo para describir la amplitud de algo en dicho punto (acción a distancia)

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

- Un campo toma las coordenadas de un punto en el espacio y el tiempo para describir la amplitud de algo en dicho punto (acción a distancia)
- En la Física de Partículas, el espacio y el tiempo se toman como el espacio-tiempo de la teoría de la relatividad especial

Afirmaciones Iniciales

Cada partícula y cada onda en el Universo es simplemente una excitación de un campo cuántico que está definido sobre todo el espacio y el tiempo

- Un campo toma las coordenadas de un punto en el espacio y el tiempo para describir la amplitud de algo en dicho punto (acción a distancia)
- En la Física de Partículas, el espacio y el tiempo se toman como el espacio-tiempo de la teoría de la relatividad especial $\Rightarrow$ Campos escalares, vectoriales, espinoriales, tensoriales.

Lagrangianos

En mecánica, para saber cómo se mueve una partícula de masa m entre los puntos A y B, usamos las leyes de Newton

$$F = m\ddot{x} \; ,$$

Lagrangianos

En mecánica, para saber cómo se mueve una partícula de masa m entre los puntos A y B, usamos las leyes de Newton

$$F = m\ddot{x} \, ,$$

- Clásicamente, integramos entre $t = 0$ y $t = \tau$ para conocer la trayectoria de la partícula

Lagrangianos

En mecánica, para saber cómo se mueve una partícula de masa m entre los puntos A y B, usamos las leyes de Newton

$$F = m\ddot{x} \ ,$$

- Clásicamente, integramos entre $t = 0$ y $t = \tau$ para conocer la trayectoria de la partícula
- En Mecánica Cuántica no seguimos trayectorias

Lagrangianos

En mecánica, para saber cómo se mueve una partícula de masa m entre los puntos A y B, usamos las leyes de Newton

$$F = m\ddot{x} \ ,$$

- Clásicamente, integramos entre $t = 0$ y $t = \tau$ para conocer la trayectoria de la partícula
- En Mecánica Cuántica no seguimos trayectorias

Pero, si consideramos la energía cinética y potencial promedio,

$$\bar{T} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{1}{2} m[\dot{x}(t)]^2 dt \ , \qquad \bar{V} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} V[x(t)] dt \ ,$$

Lagrangianos

En mecánica, para saber cómo se mueve una partícula de masa m entre los puntos A y B, usamos las leyes de Newton

$$F = m\ddot{x} \ ,$$

- Clásicamente, integramos entre $t = 0$ y $t = \tau$ para conocer la trayectoria de la partícula
- En Mecánica Cuántica no seguimos trayectorias

Pero, si consideramos la energía cinética y potencial promedio,

$$\bar{T} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{1}{2} m[\dot{x}(t)]^2 dt \ , \qquad \bar{V} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau V[x(t)] dt \ ,$$

podemos preguntarnos cómo cambian $\bar{T}$ y $\bar{V}$ si cambiamos la trayectoria.

Funcionales

Un funcional F toma una función f y regresa un número

Funcionales

Un funcional F toma una función f y regresa un número

$$F[f] = \int_0^1 f(x)dx \ ,$$

Funcionales

Un funcional F toma una función f y regresa un número

$$F[f] = \int_0^1 f(x)dx \ ,$$

Entonces, si $f(x) = x^2$,

$$F[f] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Funcionales

Un funcional F toma una función f y regresa un número

$$F[f] = \int_0^1 f(x)dx \ ,$$

Entonces, si $f(x) = x^2$,

$$F[f] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

La derivada de un funcional

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[f(x') + \epsilon\delta(x - x')] - F[f(x')]}{\epsilon} \ .$$

Funcionales

Un funcional F toma una función f y regresa un número

$$F[f] = \int_0^1 f(x)dx \ ,$$

Entonces, si $f(x) = x^2$,

$$F[f] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

La derivada de un funcional

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[f(x') + \epsilon\delta(x - x')] - F[f(x')]}{\epsilon} \ .$$

$$J[f] = \int [f(y)]^p \phi(y) dy \Rightarrow \frac{\delta J}{\delta f(x)} = p[f(x)]^{p-1}\phi(x).$$

Mínima acción

Entonces, para $\bar{T}$ y $\bar{V}$ tenemos*

$$\frac{\delta \bar{V}[x]}{\delta x(t)} = \frac{\bar{V}'[x(t)]}{\tau} \, , \qquad \frac{\delta \bar{T}[x]}{\delta x(t)} = -\frac{m\ddot{x}}{\tau} \, ,$$

Mínima acción

Entonces, para $\bar{T}$ y $\bar{V}$ tenemos*

$$\frac{\delta \bar{V}[x]}{\delta x(t)} = \frac{\bar{V}'[x(t)]}{\tau}\,, \qquad \frac{\delta \bar{T}[x]}{\delta x(t)} = -\frac{m\ddot{x}}{\tau}\,,$$

y de las Leyes de Newton

$$\frac{\delta \bar{V}[x]}{\delta x(t)} = \frac{\delta \bar{T}[x]}{\delta x(t)}\,.$$

Mínima acción

Entonces, para $\bar{T}$ y $\bar{V}$ tenemos*

$$\frac{\delta \bar{V}[x]}{\delta x(t)} = \frac{\bar{V}'[x(t)]}{\tau}\,, \qquad \frac{\delta \bar{T}[x]}{\delta x(t)} = -\frac{m\ddot{x}}{\tau}\,,$$

y de las Leyes de Newton

$$\frac{\delta \bar{V}[x]}{\delta x(t)} = \frac{\delta \bar{T}[x]}{\delta x(t)}\,.$$

o bien

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}(\bar{T} - \bar{V}) = 0.$$

Mínima acción

Entonces, para $\bar{T}$ y $\bar{V}$ tenemos*

$$\frac{\delta \bar{V}[x]}{\delta x(t)} = \frac{\bar{V}'[x(t)]}{\tau}\,, \qquad \frac{\delta \bar{T}[x]}{\delta x(t)} = -\frac{m\ddot{x}}{\tau}\,,$$

y de las Leyes de Newton

$$\frac{\delta \bar{V}[x]}{\delta x(t)} = \frac{\delta \bar{T}[x]}{\delta x(t)}\,.$$

o bien

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}(\bar{T} - \bar{V}) = 0.$$

La diferencia entre la energía cinética promedio y la energía potencial promedio es estacionaria alrededor de la trayectoria clásica.

Mínima acción

Definimos el Lagrangiano

$$L = T - V.$$

Mínima acción

Definimos el Lagrangiano

$$L = T - V.$$

La integral sobre el tiempo de esta cantidad es la acción

$$S = \int_0^{\tau} L \; dt = \int_0^{\tau} (T - V) dt = \tau(\bar{T}[x] - \bar{V}[x]) \, ,$$

Mínima acción

Definimos el Lagrangiano

$$L = T - V .$$

La integral sobre el tiempo de esta cantidad es la acción

$$S = \int_0^\tau L \; dt = \int_0^\tau (T - V) dt = \tau(\bar{T}[x] - \bar{V}[x]) \; ,$$

Principio de mínima acción de Hamilton

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0 \; .$$

Mínima acción

Definimos el Lagrangiano

$$L = T - V.$$

La integral sobre el tiempo de esta cantidad es la acción

$$S = \int_0^{\tau} L\ dt = \int_0^{\tau} (T - V) dt = \tau(\bar{T}[x] - \bar{V}[x]) \ ,$$

Principio de mínima acción de Hamilton

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0 \ .$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta L}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}(t)} = 0.$$

Mínima acción

Densidad Lagrangiana

$$L = \int dx \mathcal{L} \Rightarrow S = \int dt dx \mathcal{L}.$$

Mínima acción

Densidad Lagrangiana

$$L = \int dx\mathcal{L} \Rightarrow S = \int dtdx\mathcal{L}.$$

Si $\mathcal{L}$ depende de una función del espacio-tiempo $\phi(x)$ y su derivada $\partial_\mu\phi(x)$, entonces

$$S = \int d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi).$$

Mínima acción

Densidad Lagrangiana

$$L = \int dx \mathcal{L} \Rightarrow S = \int dt dx \mathcal{L}.$$

Si $\mathcal{L}$ depende de una función del espacio-tiempo $\phi(x)$ y su derivada $\partial_\mu \phi(x)$, entonces

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso se escriben como

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \ .$$

Mínima acción

Densidad Lagrangiana

$$L = \int dx\mathcal{L} \Rightarrow S = \int dtdx\mathcal{L}.$$

Si $\mathcal{L}$ depende de una función del espacio-tiempo $\phi(x)$ y su derivada $\partial_\mu\phi(x)$, entonces

$$S = \int d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso se escriben como

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0\ .$$

Uno puede, por ejemplo, obtener la ecuación de Klein-Gordon* como la ecuación de Euler-Lagrange para el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Primera y Segunda cuantización

- Electrones, neutrones, etc. obedecen ecuaciones de onda (Schrödinger)

Primera y Segunda cuantización

- Electrones, neutrones, etc. obedecen ecuaciones de onda (Schrödinger)
  - **Primera cuantización:** Las partículas se comportan como ondas

Primera y Segunda cuantización

- Electrones, neutrones, etc. obedecen ecuaciones de onda (Schrödinger)
  - **Primera cuantización:** Las partículas se comportan como ondas
- Fotones, fonones, etc. se comportan como partículas

Primera y Segunda cuantización

- Electrones, neutrones, etc. obedecen ecuaciones de onda (Schrödinger)
  - **Primera cuantización:** Las partículas se comportan como ondas
- Fotones, fonones, etc. se comportan como partículas
  - **Segunda cuantización:** Las ondas se comportan como partículas

Primera y Segunda cuantización

- Electrones, neutrones, etc. obedecen ecuaciones de onda (Schrödinger)
  - **Primera cuantización:** Las partículas se comportan como ondas
- Fotones, fonones, etc. se comportan como partículas
  - **Segunda cuantización:** Las ondas se comportan como partículas
- Visión unificadora: Campos cuánticos.

Oscilador armónico

Consideremos una masa en un resorte de constante K.

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2.$$

Oscilador armónico

Consideremos una masa en un resorte de constante K.

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2.$$

El problema mecánico-cuántico se traduce a resolver*

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}Kx^2\right)\psi = E\psi.$$

Oscilador armónico

Consideremos una masa en un resorte de constante K.

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2.$$

El problema mecánico-cuántico se traduce a resolver*

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}Kx^2\right)\psi = E\psi.$$

Las soluciones son

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\xi.$$

Oscilador armónico

Consideremos una masa en un resorte de constante K.

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2.$$

El problema mecánico-cuántico se traduce a resolver*

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}Kx^2\right)\psi = E\psi.$$

Las soluciones son

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\xi.$$

Las energías correspondientes son

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Oscilador armónico

Este problema también puede resolverse con un enfoque algebraico. Tenemos que

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \ ,$$

Oscilador armónico

Este problema también puede resolverse con un enfoque algebraico. Tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \ , \\ &\rightarrow \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)\end{aligned}$$

Oscilador armónico

Este problema también puede resolverse con un enfoque algebraico. Tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \ , \\ &\to \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)\end{aligned}$$

El problema es que $\hat{x}$ y $\hat{p}$ no conmutan. De hecho

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{i\omega}{2}[\hat{x}, \hat{p}] \ ,$$

Oscilador armónico

Este problema también puede resolverse con un enfoque algebraico. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \ , \\
&\to \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right)
\end{aligned}
$$

El problema es que $\hat{x}$ y $\hat{p}$ no conmutan. De hecho

$$
\frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 + \frac{i\omega}{2}[\hat{x}, \hat{p}] \ ,
$$

Esto puede remediarse si definimos los operadores (no Hermitianos)

$$
\begin{aligned}
\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) \ , \\
\hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p} \right) \ .
\end{aligned}
$$

Oscilador armónico

Estos operadores satisfacen*

$$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$$

Oscilador armónico

Estos operadores satisfacen*

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

y permiten reescribir

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \, , \\ \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \, . \end{aligned}$$

Oscilador armónico

Estos operadores satisfacen*

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

y permiten reescribir

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \, , \\ \hat{p} &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \, . \end{aligned}$$

Entonces, podemos reescribir

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \, .$$

Oscilador armónico

Esta factorización sugiere que si el operador (compuesto) $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ tiene un eigenestado $|n\rangle$ con eigenvalor n, entonces $\hat{H}$ tiene también por eigenestado $|n\rangle$ con eigenvalor*

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Oscilador armónico

Esta factorización sugiere que si el operador (compuesto) $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ tiene un eigenestado $|n\rangle$ con eigenvalor n, entonces $\hat{H}$ tiene también por eigenestado $|n\rangle$ con eigenvalor*

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) .$$

Se llama $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ el operador de número,

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle .$$

Oscilador armónico

Esta factorización sugiere que si el operador (compuesto) $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ tiene un eigenestado $|n\rangle$ con eigenvalor n, entonces $\hat{H}$ tiene también por eigenestado $|n\rangle$ con eigenvalor*

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) .$$

Se llama $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ el operador de número,

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Entonces

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) , \qquad \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle.$$

Oscilador armónico

Los operadores $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ se llaman operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\ , \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Oscilador armónico

Los operadores $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ se llaman operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \;, \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

El estado base del oscilador armónico $|0\rangle$ se define como el estado en el que

$$\hat{a}|0\rangle = 0.$$

Oscilador armónico

Los operadores $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ se llaman operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \ , \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

El estado base del oscilador armónico $|0\rangle$ se define como el estado en el que

$$\hat{a}|0\rangle = 0.$$

El resto de los estados excitados se pueden construir a partir de $|0\rangle$ aplicando repetidas veces $\hat{a}^\dagger$,

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle.$$

Osciladores armónicos desacoplados

Consideremos N osciladores armónicos simples desacoplados. El Hamiltoniano del sistema completo es

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hat{H}_k \; , \qquad \hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2} m_k \omega_k^2 \hat{x}_k^2 \; .$$

Osciladores armónicos desacoplados

Consideremos N osciladores armónicos simples desacoplados. El Hamiltoniano del sistema completo es

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hat{H}_k \ , \qquad \hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2} m_k \omega_k^2 \hat{x}_k^2 \ .$$

Definamos ahora el operador $\hat{a}_k^\dagger$, que crea un cuanto de energía en el k-ésimo oscilador,

$$\hat{a}_k^\dagger |n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle \propto |n_1, n_2, \ldots, n_k + 1, \ldots\rangle,$$

Osciladores armónicos desacoplados

Consideremos N osciladores armónicos simples desacoplados. El Hamiltoniano del sistema completo es

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hat{H}_k \ , \qquad \hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2} m_k \omega_k^2 \hat{x}_k^2 \ .$$

Definamos ahora el operador $\hat{a}_k^\dagger$, que crea un cuanto de energía en el k-ésimo oscilador,

$$\hat{a}_k^\dagger |n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle \propto |n_1, n_2, \ldots, n_k + 1, \ldots\rangle,$$

Correspondientemente, definimos $\hat{a}_k$, que aniquila un cuanto de energía en el k-ésimo oscilador,

$$\hat{a}_k |n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle \propto |n_1, n_2, \ldots, n_k - 1, \ldots\rangle,$$

Osciladores armónicos desacoplados

Consideremos N osciladores armónicos simples desacoplados. El Hamiltoniano del sistema completo es

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hat{H}_k \ , \qquad \hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2} m_k \omega_k^2 \hat{x}_k^2 \ .$$

Definamos ahora el operador $\hat{a}_k^\dagger$, que crea un cuanto de energía en el k-ésimo oscilador,

$$\hat{a}_k^\dagger |n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle \propto |n_1, n_2, \ldots, n_k + 1, \ldots\rangle,$$

Correspondientemente, definimos $\hat{a}_k$, que aniquila un cuanto de energía en el k-ésimo oscilador,

$$\hat{a}_k |n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle \propto |n_1, n_2, \ldots, n_k - 1, \ldots\rangle,$$

Los operadores obedecen

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_q] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_q^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_q^\dagger] = \delta_{kq}.$$

Osciladores armónicos desacoplados

El Hamiltoniano del sistema se puede escribir como

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \, .$$

Osciladores armónicos desacoplados

El Hamiltoniano del sistema se puede escribir como

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) .$$

Definimos el estado base (vacío) $|0, 0, \ldots\rangle \equiv |0\rangle$ como aquel estado en el que

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0.$$

Osciladores armónicos desacoplados

El Hamiltoniano del sistema se puede escribir como

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \ .$$

Definimos el estado base (vacío) $|0, 0, \ldots\rangle \equiv |0\rangle$ como aquel estado en el que

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0.$$

Un estado general en la representación de número de ocupación, $|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle$ se construye como

$$|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\ldots n_N!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \ldots (\hat{a}_N^\dagger)^{n_N} |0\rangle.$$

Osciladores armónicos desacoplados

El Hamiltoniano del sistema se puede escribir como

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) .$$

Definimos el estado base (vacío) $|0, 0, \ldots\rangle \equiv |0\rangle$ como aquel estado en el que

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0.$$

Un estado general en la representación de número de ocupación, $|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle$ se construye como

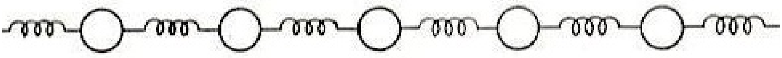
$$|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\ldots n_N!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \ldots (\hat{a}_N^\dagger)^{n_N} |0\rangle.$$

O, en notación compacta,

$$|\{n_k\}\rangle = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle.$$

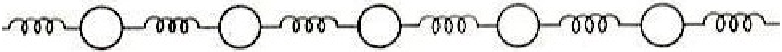
Osciladores armónicos acoplados

Consideremos una cadena de N átomos, cada uno de masa m y conectados por resortes tales que en equilibrio, la separación es a.



Osciladores armónicos acoplados

Consideremos una cadena de N átomos, cada uno de masa m y conectados por resortes tales que en equilibrio, la separación es a.



Las masas están en las posiciones $R_j = ja$ pero pueden desplazarse una cantidad x_j. El momentum de la j-ésima masa es p_j y el Hamiltoniano correspondiente

$$\hat{H} = \sum_j \frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \frac{1}{2}K(\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_j)^2 \ .$$

Osciladores armónicos acoplados

Se puede demostrar* que dicho Hamiltoniano puede reexpresarse de la forma

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \ ,$$

Osciladores armónicos acoplados

Se puede demostrar* que dicho Hamiltoniano puede reexpresarse de la forma

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \ ,$$

es decir, un sistema de osciladores desacoplados.

Osciladores armónicos acoplados

Se puede demostrar* que dicho Hamiltoniano puede reexpresarse de la forma

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) ,$$

es decir, un sistema de osciladores desacoplados.
Estos *modos* se llaman **fonones. Cada uno se comporta como un oscilador armónico, aunque cada fonón se comporta como partícula.**

Osciladores armónicos y partículas idénticas

Para describir sistemas de partículas idénticas, necesitamos

- Cambiar la manera de etiquetar los estados

Osciladores armónicos y partículas idénticas

Para describir sistemas de partículas idénticas, necesitamos

- Cambiar la manera de etiquetar los estados
- *Deshacernos* de las funciones de onda

Osciladores armónicos y partículas idénticas

Para describir sistemas de partículas idénticas, necesitamos

- Cambiar la manera de etiquetar los estados
- *Deshacernos* de las funciones de onda
- Respetar que en el Universo hay BOSONES y FERMIONES

Partículas en la caja

- Las funciones de onda para una partícula en la caja son de la forma

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ip_m x} \,, \qquad p_m = \frac{2\pi m}{L} \,, m \in \mathbb{N}.$$

Partículas en la caja

- Las funciones de onda para una partícula en la caja son de la forma

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ip_m x} \ , \qquad p_m = \frac{2\pi m}{L} \ , m \in \mathbb{N}.$$

- Llamamos a los posibles estados de momentum de la partícula p_1, p_2, etc

Partículas en la caja

- Las funciones de onda para una partícula en la caja son de la forma

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i p_m x} \,, \qquad p_m = \frac{2\pi m}{L} \,, m \in \mathbb{N}.$$

- Llamamos a los posibles estados de momentum de la partícula p_1, p_2, etc
- La energía de una partícula en el estado p_m es E_{p_m}.

Partículas en la caja

- Las funciones de onda para una partícula en la caja son de la forma

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ip_m x} \,, \qquad p_m = \frac{2\pi m}{L} \,, m \in \mathbb{N}.$$

- Llamamos a los posibles estados de momentum de la partícula p_1, p_2, etc
- La energía de una partícula en el estado p_m es E_{p_m}.
- Para dos partículas (bosónicas),

$$\hat{p}|p_1 \; p_2\rangle = (p_1 + p_2)|p_1 \; p_2\rangle \,,$$

Partículas en la caja

- Las funciones de onda para una partícula en la caja son de la forma

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ip_m x} \ , \qquad p_m = \frac{2\pi m}{L} \ , m \in \mathbb{N}.$$

- Llamamos a los posibles estados de momentum de la partícula p_1, p_2, etc
- La energía de una partícula en el estado p_m es E_{p_m}.
- Para dos partículas (bosónicas),

$$\begin{aligned} \hat{p}|p_1 \ p_2\rangle &= (p_1 + p_2)|p_1 \ p_2\rangle \ , \\ \hat{H}|p_1 \ p_2\rangle &= (E_{p_1} + E_{p_2})|p_1 \ p_2\rangle. \end{aligned}$$

Partículas en la caja

- Notemos que podemos escribir la energía total como

$$E = \sum_m n_{p_m} E_{p_m},$$

Partículas en la caja

- Notemos que podemos escribir la energía total como

$$E = \sum_m n_{p_m} E_{p_m},$$

- Definimos los estados de N partículas enlistando cuántas de ellas están en cada uno de los estados de momentum

$$|n_1 n_2 \ldots\rangle$$

Partículas en la caja

- Notemos que podemos escribir la energía total como

$$E = \sum_m n_{p_m} E_{p_m},$$

- Definimos los estados de N partículas enlistando cuántas de ellas están en cada uno de los estados de momentum

$$|n_1 n_2 \ldots\rangle$$

- Entonces,

$$\hat{H}|n_1 n_2 \ldots\rangle = \left[\sum_m n_{p_m} E_{p_m}\right] |n_1 n_2 \ldots\rangle$$

Partículas en la caja

- Notemos que podemos escribir la energía total como

$$E = \sum_m n_{p_m} E_{p_m},$$

- Definimos los estados de N partículas enlistando cuántas de ellas están en cada uno de los estados de momentum

$$|n_1 n_2 \ldots\rangle$$

- Entonces,

$$\hat{H}|n_1 n_2 \ldots\rangle = \left[\sum_m n_{p_m} E_{p_m}\right] |n_1 n_2 \ldots\rangle$$

Decimos que el estado con momentum p_m tiene n_{p_m} partículas, cada una de las cuales contribuye con una energía E_{p_m}, de forma que el modo p_m contribue con una energía $n_{p_m} E_{p_m}$ a la energía total del sistema.

Partículas en la caja

- A partir del vacío $|0\rangle$, podemos construir $|n_1 n_2 \ldots\rangle$ de la forma

$$|n_1 n_2 \ldots\rangle = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle,$$

Partículas en la caja

- A partir del vacío $|0\rangle$, podemos construir $|n_1 n_2 \ldots\rangle$ de la forma

$$|n_1 n_2 \ldots\rangle = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle,$$

- Esto quiere decir que $\hat{a}_{p_m}^\dagger$ crea una partícula con un estado de momentum específico p_m.

Partículas en la caja

- A partir del vacío $|0\rangle$, podemos construir $|n_1 n_2 \ldots\rangle$ de la forma

$$|n_1 n_2 \ldots\rangle = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle,$$

- Esto quiere decir que $\hat{a}_{p_m}^\dagger$ crea una partícula con un estado de momentum específico p_m.
- Si, por ejemplo, queremos crear una partícula en el estado con momentum p_1 y otra en el estado p_2, o hacerlo en orden inverso, tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger |0\rangle &\propto |11\rangle \\
\hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger |0\rangle &\propto |11\rangle \\
\Rightarrow \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger &= \lambda \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger
\end{aligned}$$

Partículas en la caja

- $\lambda = \pm 1$, dependiendo si el estado es simétrico bajo el intercambio de dos partículas (bosónico) o antisimétrico (fermiónico)

Partículas en la caja

- $\lambda = \pm 1$, dependiendo si el estado es simétrico bajo el intercambio de dos partículas (bosónico) o antisimétrico (fermiónico)
- Para bosones, esto significa

$$\hat{a}^{\dagger}_{p_1}\hat{a}^{\dagger}_{p_2} = \hat{a}^{\dagger}_{p_2}\hat{a}^{\dagger}_{p_1} \Rightarrow [\hat{a}^{\dagger}_{j}, \hat{a}^{\dagger}_{i}] = 0$$

.

Partículas en la caja

- $\lambda = \pm 1$, dependiendo si el estado es simétrico bajo el intercambio de dos partículas (bosónico) o antisimétrico (fermiónico)
- Para bosones, esto significa

$$\hat{a}^{\dagger}_{p_1}\hat{a}^{\dagger}_{p_2} = \hat{a}^{\dagger}_{p_2}\hat{a}^{\dagger}_{p_1} \Rightarrow [\hat{a}^{\dagger}_{j}, \hat{a}^{\dagger}_{i}] = 0$$

.

- Tenemos también que

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_i] = 0$$

Partículas en la caja

- $\lambda = \pm 1$, dependiendo si el estado es simétrico bajo el intercambio de dos partículas (bosónico) o antisimétrico (fermiónico)
- Para bosones, esto significa

$$\hat{a}^{\dagger}_{p_1}\hat{a}^{\dagger}_{p_2} = \hat{a}^{\dagger}_{p_2}\hat{a}^{\dagger}_{p_1} \Rightarrow [\hat{a}^{\dagger}_{j}, \hat{a}^{\dagger}_{i}] = 0$$

.

- Tenemos también que

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_i] = 0$$

- Definimos

$$[\hat{a}^{\dagger}_{i}, \hat{a}_j] = \delta_{ij}$$

Partículas en la caja

- Esto implica que

$$\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}|0\rangle = \hat{a}^\dagger_{p_2}\hat{a}^\dagger_{p_1}|0\rangle = |1_{p_1}1_{p_2}\rangle$$

Partículas en la caja

- Esto implica que

$$\hat{a}^{\dagger}_{p_1}\hat{a}^{\dagger}_{p_2}|0\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{p_2}\hat{a}^{\dagger}_{p_1}|0\rangle = |1_{p_1}1_{p_2}\rangle$$

- No importa el orden en que se coloquen las partículas

Partículas en la caja

- Esto implica que

$$\hat{a}^{\dagger}_{p_1}\hat{a}^{\dagger}_{p_2}|0\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{p_2}\hat{a}^{\dagger}_{p_1}|0\rangle = |1_{p_1}1_{p_2}\rangle$$

- No importa el orden en que se coloquen las partículas
- Finalmente, la acción de los operadores es

$$\begin{aligned}
\hat{a}^{\dagger}_{i}|n_1 \ldots n_i \ldots\rangle &= \sqrt{n_i+1}|n_1 \ldots n_i+1 \ldots\rangle \\
\hat{a}_{i}|n_1 \ldots n_i \ldots\rangle &= \sqrt{n_i}|n_1 \ldots n_i-1 \ldots\rangle
\end{aligned}$$

Partículas en la caja

- Para fermiones, $\lambda = -1$, lo que implica que

$$\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0.$$

Partículas en la caja

- Para fermiones, $\lambda = -1$, lo que implica que

$$\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0.$$

- En particular, si $i = j$,

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger = 0 \ ,$$

Principio de Exclusión de Pauli

Partículas en la caja

- Para fermiones, $\lambda = -1$, lo que implica que

$$\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0.$$

- En particular, si $i = j$,

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger = 0 \ ,$$

Principio de Exclusión de Pauli

- Tenemos también

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = 0.$$

Partículas en la caja

- Para fermiones, $\lambda = -1$, lo que implica que

$$\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0.$$

- En particular, si $i = j$,

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger = 0 \ ,$$

Principio de Exclusión de Pauli

- Tenemos también

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = 0.$$

- Definimos

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} = \delta_{ij}.$$

Partículas en la caja

- Notemos que

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger |0\rangle = -\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i^\dagger |0\rangle \ ,$$

Partículas en la caja

- Notemos que
$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger |0\rangle = -\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i^\dagger |0\rangle \ ,$$
- Importa el orden en que se coloquen las partículas

Partículas en la caja

- Notemos que

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger |0\rangle = -\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i^\dagger |0\rangle \ ,$$

- Importa el orden en que se coloquen las partículas

- La acción de los operadores de creación y aniquilación

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i^\dagger |n_1 \ldots n_i \ldots\rangle &= (-1)^{\Sigma_i} \sqrt{1-n_i} |n_1 \ldots n_i + 1 \ldots\rangle \\
\hat{c}_i |n_1 \ldots n_i \ldots\rangle &= (-1)^{\Sigma_i} \sqrt{n_i} |n_1 \ldots n_i - 1 \ldots\rangle \\
(-1)^{\Sigma_i} &= (-1)^{(n_1+n_2+\ldots+n_{i-1})} \ .
\end{aligned}$$

Partículas en la caja

- En el límite continuo, el momentum se vuelve una variable continua.

Partículas en la caja

- En el límite continuo, el momentum se vuelve una variable continua.
- Las δ_{ij} se transforman en $\delta^{(3)}(\mathbf{p})$

Partículas en la caja

- En el límite continuo, el momentum se vuelve una variable continua.
- Las δ_{ij} se transforman en $\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- En particular, para bosones

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

Partículas en la caja

- En el límite continuo, el momentum se vuelve una variable continua.
- Las δ_{ij} se transforman en $\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- En particular, para bosones

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

- y el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \int d^3p \; E_{\mathbf{p}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}.$$

Partículas en la caja

- En el límite continuo, el momentum se vuelve una variable continua.
- Las δ_{ij} se transforman en $\delta^{(3)}(\mathbf{p})$
- En particular, para bosones
$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{q}}] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$
- y el Hamiltoniano
$$\hat{H} = \int d^3p \; E_{\mathbf{p}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}.$$
- Para fermiones,
$$\{\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\} = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

Segunda cuantización: Los campos

- Los operadores $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ y $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ crean y destruyen partículas en estados de momentum definidos.

Segunda cuantización: Los campos

- Los operadores $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ crean y destruyen partículas en estados de momentum definidos.

- Haciendo combinaciones lieales de dichos operadores (sumas de Fourier), podemos definir **operadores de campo** que crean y destruyen partículas en puntos específicos del espacio-tiempo.

Segunda cuantización: Los campos

- Los operadores $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$ y $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ crean y destruyen partículas en estados de momentum definidos.

- Haciendo combinaciones lieales de dichos operadores (sumas de Fourier), podemos definir **operadores de campo** que crean y destruyen partículas en puntos específicos del espacio-tiempo.

- Si imaginamos un espacio de volumen V,
  - El operador
    $$\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$
    crea una partícula en la posición $\mathbf{x}$

Segunda cuantización: Los campos

- Los operadores $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ y $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ crean y destruyen partículas en estados de momentum definidos.

- Haciendo combinaciones lieales de dichos operadores (sumas de Fourier), podemos definir **operadores de campo** que crean y destruyen partículas en puntos específicos del espacio-tiempo.

- Si imaginamos un espacio de volumen V,
  - El operador
  $$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$
  crea una partícula en la posición $\mathbf{x}$
  - El operador
  $$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$
  aniquila una partícula en la posición $\mathbf{x}$

Segunda cuantización: Los operadores

- En mecánica cuántica, un operador puede describirse de forma general de muchas maneras, p. ej.,

$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta|.$$

Segunda cuantización: Los operadores

- En mecánica cuántica, un operador puede describirse de forma general de muchas maneras, p. ej.,

$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta|.$$

- En la TCC, necesitamos un espacio necesitamos un espacio (de Fock) que contenga estados de muchas partículas.

Segunda cuantización: Los operadores

- En mecánica cuántica, un operador puede describirse de forma general de muchas maneras, p. ej.,

$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta|.$$

- En la TCC, necesitamos un espacio necesitamos un espacio (de Fock) que contenga estados de muchas partículas.
- Entonces, en este espacio de Fock

$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\hat{a}^\dagger_\alpha \hat{a}_\beta$$

Segunda cuantización: Los operadores

- En mecánica cuántica, un operador puede describirse de forma general de muchas maneras, p. ej.,

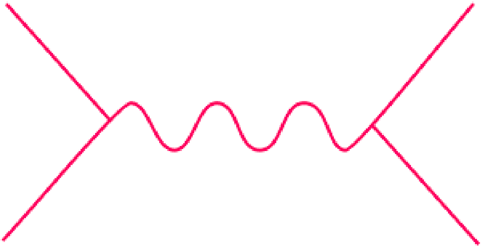
$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta|.$$

- En la TCC, necesitamos un espacio necesitamos un espacio (de Fock) que contenga estados de muchas partículas.
- Entonces, en este espacio de Fock

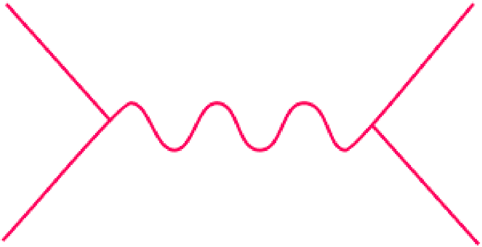
$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\hat{a}^{\dagger}_{\alpha}\hat{a}_{\beta}$$

- Este operador representa la suma sobre todos los procesos donde usamos $\hat{a}_{\beta}$ para remover una partícula en el estado $|\beta\rangle$, multiplicarla por el elemento de matriz correspondiente y usamos $\hat{a}^{\dagger}_{\alpha}$ para poner dicha partícula en el estado final $|\alpha\rangle$.

Segunda cuantización: Los operadores



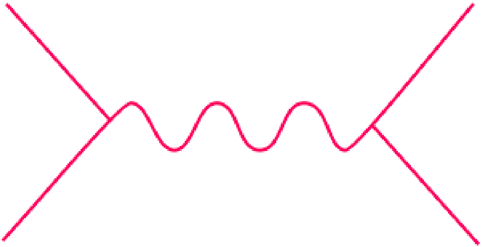
Segunda cuantización: Los operadores



Para procesos donde dos partículas interactúan,

$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} A_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{a}^\dagger_\alpha \hat{a}^\dagger_\beta \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta .$$

Segunda cuantización: Los operadores



Para procesos donde dos partículas interactúan,

$$\hat{A} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} A_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{a}^{\dagger}_{\alpha} \hat{a}^{\dagger}_{\beta} \hat{a}_{\gamma} \hat{a}_{\delta}.$$

Los operadores de dos partículas se escriben como

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{x}).$$