Universidad Veracruzana
Centro de Investigación en Recursos Energéticos
y Sustentables. Campus Coatzacoalcos

Guía para la preparación del examen de admisión

MATEMÁTICAS

1 Álgebra

1.1 Mostrar que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y + 2 = 0$$

forman una base para el espacio vectorial de soluciones.

1.2 Calcular la matriz de cambio de base (o de vectores propios) de la transformación:

$$T(x, y) = (x + 9y, 4x + y)$$

1.3 Calcular el valor de x, para que los vectores $(x, 2, 3), (1, 1, 0)$ y $(2, x, -1)$ formen una base para R^3.

1.4 Sea $B = \{x - 1, x + 3, x^2 + x, x + 2\}$ un conjunto, mostrar si forma una base para los polinomios de grado 2.

1.5 Decir si la siguiente función es lineal o no.

$$T(x, y, z) = (cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$$

en donde θ constante.

1.6 Encontrar los valores propios de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} a & a-b & 0 \\ 0 & b+c & -c \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

1.7 Diagonalizar la matriz A dada, indicando sus valores propios, vectores propios, la matriz B de vectores propios, etc.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1.8 Determine si la transformación

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

es lineal, en caso de ser TL encontrar su representación matricial.

1.9 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

donde $a - c \neq 0$. Calcule los valores propios y los vectores propios de dicha matriz.

1.10 La evolución de dos especies en un mismo habitat puede modelarse a través de:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

en donde x_n, y_n representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año n, la solución a este sistema es:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

si $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$, calcular la solución para $n = 50$.

2 Cálculo Multivariable.

2.1 Si ϕ es una función de variable real diferenciable. Muestre que la función f definida por

$$f(x, y) = x^3\phi(x^2 - y)$$

satisface la ecuación;

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + 2x^2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3f(x,y)$$

2.2 Comprobar que la función $g(x,t) = 2+e^{-t}\text{sen}(x)$ satisface la ecuación del calor $g_t = g_{xx}$ (aquí $g(x,t)$ representa la temperatura de un hilo metálico en el punto x en el instante t).

2.3 Sean f y g dos funciones de variable real y diferenciables. Sea $\phi(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$. Muestre que ϕ satisface la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

2.4 Calcular una ecuación del plano tangente a la gráfica de

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

en $x = 1$, $y = 1$.

2.5 Hallar los puntos de extremo de f sujeta a la restricción:

$$f(x,y) = x - y + z, \text{ sujeta a } x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

2.6 Calcular el rotacional de:

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

2.7 Calcular el valor de la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy$$

integrales dobles para calcular dicho volumen.

2.8 La altitud h del volcan Mauna de Hawaii se describe (aproximadamente) por la función $h(x,y) = 2.59 - 0.00024y^2 - 0.00065x^2$, donde h es la altitud en millas sobre el nivel del mar y x e y miden las distancias en millas este-oeste y norte-sur desde la cima de la montaña. En $(x,y) = (-2,-4)$:

(a) ¿A que velocidad crece la altitud en la dirección $(1,1)$? ,

(b) ¿En que dirección se encuentra el camino de máxima pendiente positiva?

2.9 Sea $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, calcular $\nabla \times (\nabla f)$.

3 Ecuaciones Diferenciales.

3.1 Suponga que un circuito en serie RC tiene un resistor variable. Si la resistencia al tiempo t está dada por $R = k_1 + k_2 t$. donde k_1 y k_2 son constantes positivas, entonces la ecuación que representa a nuestro circuito está dada por

$$(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

Si $E(t) = E_0$ y $q(0) = q_0$, donde E_0 y q_0 son constante.

MATEMÁTICAS

3.2 De acuerdo con la ley de Stefan de la radiación, la temperatura absoluta T de un cuerpo que se enfría en un medio a temperatura absoluta constante T_m está dada como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T^4 - T_m^4),$$

3.3 Recta de regresión. Se presentan los datos del censo de los Estados Unidos entre 1790 y 1950:

Año	Población	Año	Población
1790	3.929	1880	50.156
1800	5.308	1890	62.948
1810	7.240	1900	75.996
1820	9.638	1910	91.972
1830	12.866	1920	105.711
1840	17.069	1930	122.775
1850	23.192	1940	131.669
1860	31.433	1950	150.697
1870	38.558		

(a) Construir un modelo logístico con estos datos. Ayuda: lo que vas a encontrar es una ecuación de la forma $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = aP + b$, en donde a y b son los valores que tienen que determinar con ayuda de los datos, para hacerlo, primero necesitan aproximarse a la la derivada dP hacerlo con las diferencias centrales, diferencias hacia atrás y diferencias hacia adelante. Para hacer la regresión puedes ocupar las funciones que vienen integradas en matlab (polyfit).

(b) Resolver la ecuación diferencial que obtuviste en el inciso anterior.

(c) Graficar la solución del inciso anterior y los puntos dados en el censo.

3.4 Un modelo simple para la forma de un tsunami o maremoto, está dado por

$$\frac{dW}{dx} = W\sqrt{4 - 2W}$$

en donde $W(x) > 0$ es la altura de la ola expresada como una función de su posición respecto a un punto en altamar.

(a) Busca todas las soluciones constantes.

(b) Resuelve la ecuación diferencial.

(c) Usa matlab para obtener las gráficas de las soluciones que satisfacen la condición inicial $W(0) = 2$.

3.5 Una viga uniforme de longitud L soporta una carga concentrada w_0 en $x = \frac{1}{2}L$. Use la transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ de

$$El\frac{d^4y}{dx^4} = w_0\delta(x - \frac{1}{2}L).$$

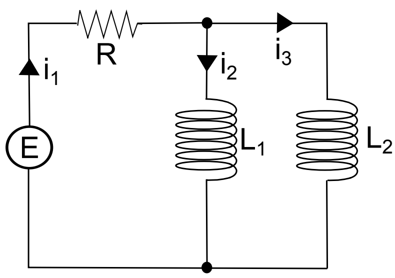
donde $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y'(0) = 0$ y $y'(L) = 0$. (con δ la función delta de Dirac.)

3.6 El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura es

$$\begin{array}{rcl} L_1\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 & = & E(t) \\ L_2\frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 & = & E(t) \end{array}$$

(a) Resuelve el sistema anterior si $R = 5\Omega$, $L_1 = 0.01h$, $L_2 = 0.0125h$, $E = 100V$, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

(b) Determine la corriente $i_1(t)$.

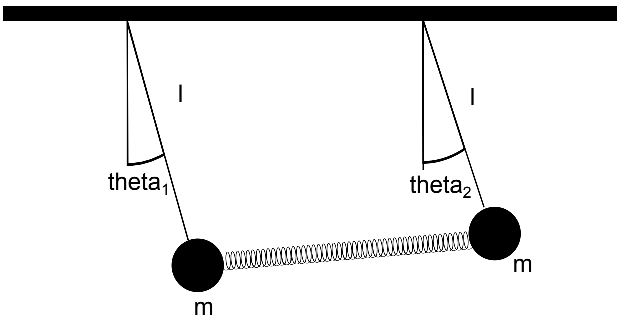


3.7 Suponga que dos péndulos idénticos están acoplados por medio de un resorte con k constante (ver figura). Se puede demostrar que que cuando los ángulos de desplazamiento θ_1 y θ_2 son pequeños, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que describen el movimiento es

$$\begin{array}{rcl} \theta_1'' + \frac{g}{l}\theta_1 & = & -\frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) \\ \theta_2'' + \frac{g}{l}\theta_2 & = & \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) \end{array}$$

MATEMÁTICAS

Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $\theta_1(0) = \theta_0, \theta_1'(0) = 0, \theta_2(0) = \psi_0, \theta_2' = 0$, donde θ_0 y ψ_0 son constantes. Por conveniencia, sea $\omega^2 = g/l$, $K = k/m$.



3.8 Suponga que el primer teorema de traslación se cumple cuando el símbolo a se reemplaza por ki donde k es un número real e $i^2 = -1$. Demuestre que $\mathcal{L}\{te^{kti}\}$ se puede usar para deducir

$$\mathcal{L}\{t\cos(kt)\} = \frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\text{sen}(kt)\} = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$$

3.9 Use el problema anterior para resolver el problema

$$x'' + w^2 x = \cos(wt)$$

con $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

3.10 Encuentra soluciones no triviales para la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + \lambda y = 0$$

sujeta a las condiciones en la frontera $y(0) = 0$; $y(L) = 0$.

3.11 Las cargas críticas de columnas delgadas dependen de las condiciones de extremo de la columna. Suponga que una columna vertical homogénea delgada está empotrada en su base $(x = 0)$ y libre en su parte superior $(x = L)$ y que se aplica una carga axial constante P en su extremo libre. Esta carga causa una deflexión pequeña δ como se muestra en la figura o no causa tal deflexión. En cualquier caso la ecuación diferencial para la deflexión $y(x)$ es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = P\delta$$

(a) ¿Cuál es la deflexión predicha cuando $\delta = 0$?

(b) Cuando $\delta \neq 0$, demuestre que la carga de Euler para esta columna es un cuarto de la carga de Euler para la columna que está abisagrada.

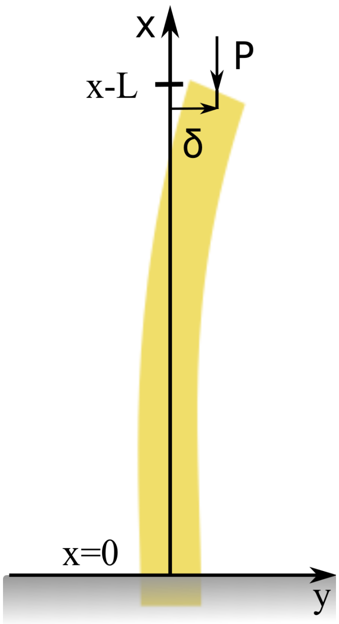


Figure 1: Deflexión de una viga.

3.12 Una viga en voladizo de longitud L está empotrada en su extremo derecho y se aplica una fuerza de P libras en su extremo izquierdo libre. Cuando el origen se toma como su extremo libre (ver figura), se puede demostrar que la deflexión $y(x)$ de la viga satisface la ecuación diferencial:

$$EIy'' = Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

Encuentre la deflexión de la viga en voladizo si $w(x) = w_0 x$, con $0 < x < L$ y $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

MATEMÁTICAS

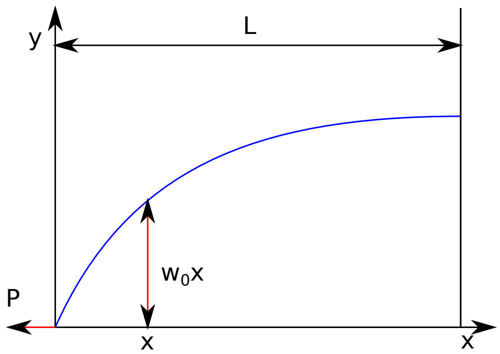


Figure 2: Deflexión de la viga en voladizo.