MARTES 13 DE AGOSTO DE 2019

U N I V E R S I D A D V E R A C R U Z A N A

Ciencia y Luz

75 ANIVERSARIO Universidad Veracruzana 1944-2019

Universidad Veracruzana Ciencia UV

De: Francisco Gabriel Hernández Zamora*
Edición: Dirección de Comunicación de la Ciencia, UV
Correo: *dcc@uv.mx*

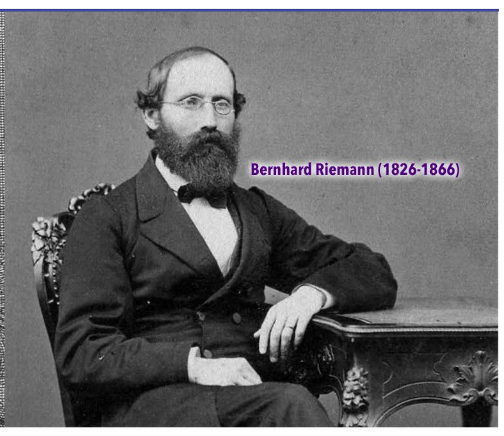
# LA GEOMETRÍA COMPLEJA,
## UNA SINGULAR FORMA DE MEDICIÓN

DURANTE EL SIGLO XVII, PIERRE DE FERMAT (1601-1665) Y RENÉ DESCARTES (1596-1650) ENCONTRARON UNA MANERA –DISTINTA A LAS CONOCIDAS HASTA ENTONCES– DE MOSTRAR LA GEOMETRÍA. USARON REPRESENTACIONES ALGEBRAICAS DE LAS FIGURAS, LO QUE SE CONOCE COMO GEOMETRÍA ANALÍTICA O DE COORDENADAS. UNA DE ESTAS REPRESENTACIONES ES COSA CORRIENTE PARA QUIENES HAN CURSADO LA EDUCACIÓN SECUNDARIA, DONDE LA HERRAMIENTA PRINCIPAL PARA REALIZAR MEDICIONES ES EL TEOREMA DE PITÁGORAS. ASIMISMO, LAS COORDENADAS EMPLEADAS EN ESTE SISTEMA NOS AYUDAN A ENTENDER SUPERFICIES MÁS COMPLICADAS TALES COMO LA ESFERA, EN LAS QUE PODEMOS DESCRIBIR UNA UBICACIÓN –DAR COORDENADAS– POR LA LONGITUD Y LA LATITUD EN LOS MAPAS DE NAVEGACIÓN.

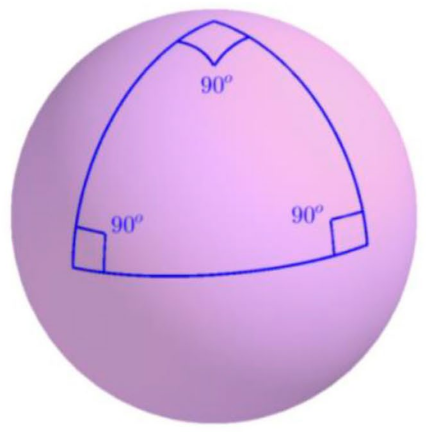

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los más destacados matemáticos de la época, fue el primero en precisar la noción de curvatura de una superficie.

René Descartes (1596-1650)

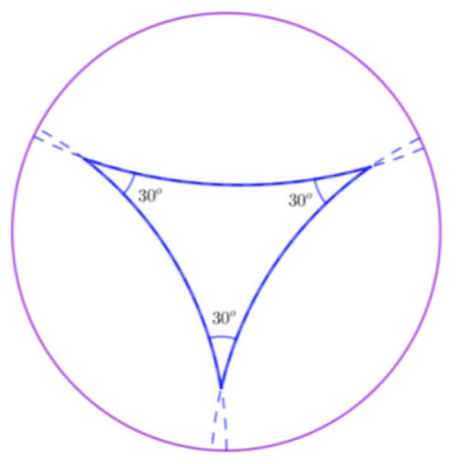

Pierre de Fermat (1601-1665)


Bernhard Riemann (1826-1866)

Cuando queremos medir sobre una superficie (o variedad diferenciable) curvada (con curvatura), es decir que no es plana, aparecen ciertas dificultades. El alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los más destacados matemáticos de la época, fue el primero en precisar la noción de curvatura de una superficie. Con esta idea y la definición de geodésica (la curva con menor distancia entre dos puntos sobre una superficie, concepto totalmente análogo al de recta en el plano), demostró que existen superficies en las que los ángulos internos de los triángulos formados por las geodésicas no suman necesariamente dos ángulos rectos. Este descubrimiento dio origen a considerar geometrías no euclidianas, que fueron introducidas, de manera independiente, por Nikolái Lobachevski (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860).



Geometría esférica. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 180°



Geometría hiperbólica. La suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que 180°

### NUEVAS VARIEDADES DE MEDICIÓN

A la pregunta de cómo medir en variedades más generales, Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemán de quien Gauss elogió su tesis doctoral, dio respuesta dotando al espacio donde se trabaja de una fórmula similar (métrica riemanniana) al teorema de Pitágoras para medir longitud de curvas, la cual permitía calcular perímetros de figuras, áreas, volúmenes, ángulos entre geodésicas que se intersectan y cualquier tipo de mediciones que se les pudiera ocurrir en aquellos años.

Ahora bien, para estudiar una variedad debemos tener una función que nos describa la distancia entre puntos. Esta función se ve muy limitada cuando consideramos únicamente números reales. Es necesario entonces considerar estructuras algebraicas más generales; por ejemplo, si tratamos de resolver una ecuación cuadrática del tipo $x^2 - 2x + 2 = 0$, recurrimos a la fórmula general (llamada en el Facebook "la chicharronera"), es decir $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Como podemos observar, y para nuestra sorpresa, debemos calcular la raíz cuadrada de un número negativo. Las raíces de números negativos se atribuyen a los babilonios (1800 a. C.), y desde entonces se han encontrado dentro de la cultura matemática. Durante el siglo XVIII varios matemáticos usaron el símbolo $\sqrt{-1}$ en la solución de sus problemas. Sin embargo, fue Euler quien introdujo la letra $i$ para denotar al número $\sqrt{-1}$ y encontró la ecuación que es considerada la más bella de las matemáticas, la cual relaciona la unidad "*1*" con tres constantes importantes, a saber, la constante de Euler "*e*", el número "$\pi$" y el número complejo "*i*": $e^{i\pi} = -1$.

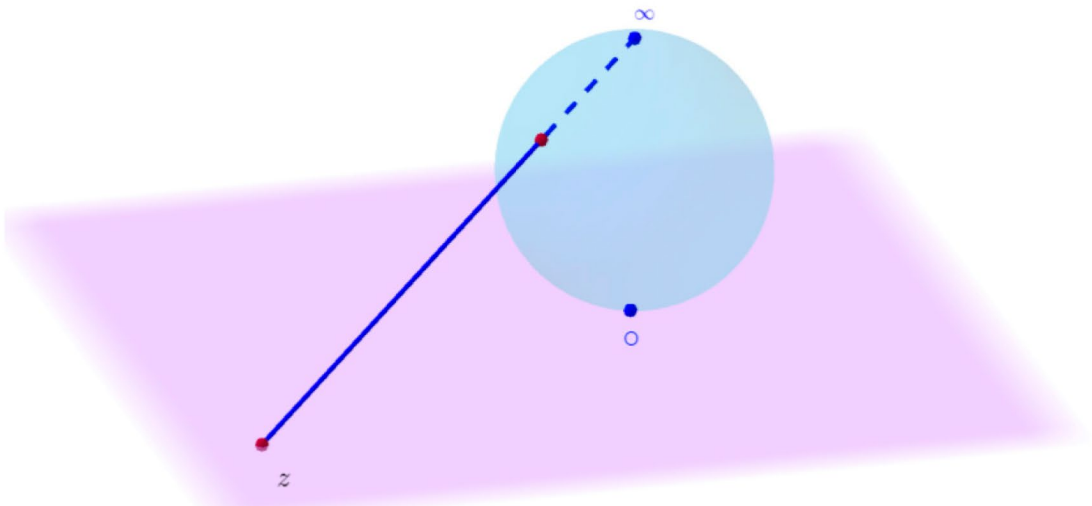
### SURGE LA GEOMETRÍA COMPLEJA

Con la invención del también llamado número imaginario "*i*", de manera independiente Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1768-1822) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855) contribuyeron a la creación del plano complejo, y con ello al surgimiento de la geometría compleja. Así, los números complejos, denotados por $C$, se representaron en el plano cartesiano $R^2$ [donde la primer coordenada es la parte real y la segunda es la parte imaginaria del número complejo: $(x,y)$ se identifica con $x + yi$], con la característica especial que poseen más estructura algebraica (además de sumar, podemos multiplicar y dividir entre ellos).

Dicha estructura guarda relación con la geometría del plano (rotaciones, traslaciones e inversiones); además, esto permitió reescribir ecuaciones trigonométricas y describir curvas importantes de manera más simple: en el plano cartesiano una circunferencia unitaria con centro en el origen se representa por la ecuación $x^2+y^2=1$, mientras que en el plano complejo se representa por $|z| = 1$.

### FUNCIONES Y SINGULARIDADES EN EL PLANO COMPLEJO

El estudio de fenómenos de tipo natural, social, económico o teórico que trabajan los matemáticos normalmente se relaciona con funciones, en particular las funciones en el plano complejo. Sin embargo, la función puede tener ciertas singularidades cuando no está bien definida. Riemann consideró resolver este problema de manera geométrica (proyección estereográfica) al trazar una recta que pasaba por el punto del plano a considerar y por el polo norte de la esfera intersectando un solo punto en la esfera –diferente al polo norte–. Esta asociación, junto con la elección del polo norte con el punto al infinito, se denomina plano complejo extendido o esfera de Riemann; a estas singularidades se les llama polos. De esta forma, la esfera de Riemann encajó a la perfección para entender el comportamiento de las funciones cerca de sus polos.



La esfera de Riemann y el plano complejo.

Hay otros puntos que son singularidades, conocidos como puntos de ramificación, en los cuales una función puede tomar más de un valor. Lo que se hace para estudiar este tipo de singularidades es doblar la esfera de Riemann en dos capas separadas, excepto en los puntos *0* y $\infty$, este último siendo un segundo punto de ramificación. Estas superficies se conocen como superficies de Riemann y su geometría está completamente descrita en términos topológicos –es decir, la forma que tiene una superficie, que puede ser una esfera o un toro con un número de agujeros llamado de género– y nos provee de propiedades importantes de las funciones complejas.


### UNA CONJETURA A RESOLVER EN EL MILENIO

La conjetura de Henri Poincaré (1854-1912), matemático y físico francés, trata de la generalización de propiedades en superficies bidimensionales a superficies de dimensión 3. En 2000 el Instituto Clay de Matemáticas presentó dicha conjetura como uno de los siete problemas del milenio que los matemáticos del mundo deberían solucionar y para incentivar el trabajar en ellos se ofrece una recompensa de un millón de dólares por la solución de cada uno. En 2006, el matemático ruso Grigori Perelman (1966) resolvió la conjetura de Poincaré, convirtiéndola en teorema. A la fecha, es el único de los problemas del milenio resuelto. Perelman rechazó el premio argumentando que no era ningún héroe ni quería ser expuesto de manera masiva. Como vemos, un matemático con carácter retraído cuya historia refuerza el estereotipo del matemático excéntrico.

* Docente Investigador de la Facultad de Matemáticas de la UV
Correo: *pacozam@msn.com*

Gráficas del autor