Ciencia y matemáticas

Las matemáticas se originaron como una abstracción de la experiencia empírica del mundo exterior. El lenguaje se desarrolló cuando nuestros ancestros trataron de trasmitirse mutuamente la información necesaria para su supervivencia común. Los aspectos cuantitativos del lenguaje constituyeron el comienzo de las matemáticas. La información que se encuentra detrás de las expresiones: “perseguido por un oso” y “perseguido por osos”, podía ser muchas veces asunto de vida o muerte para un hombre de las cavernas. La distinción entre uno y más de uno es tan vital, que la mayor parte de las lenguas tiene formas distintas (singular y plural) para acentuar la diferencia; algunas lenguas tienen hasta una tercera forma (la dual), que se usa cuando son precisamente dos las cosas que se mencionan.

La operación de contar surgió cuando se descubrió que el mismo adjetivo, digamos tres se podía usar para una terna de peces, una terna de osos o una terna de cualesquiera cosas. En la evolución del hombre, más tarde se observó que una terna de peces pescados por el padre, combinada con una pareja de peces pescados por la madre, producía un quinteto de pescados cuando se ponían juntos. Aún más tarde, algún genio observó que una terna de cosas cualesquiera, combinada con una pareja de cosas cualesquiera, producía un quinteto de cosas cualesquiera; entonces se dice que nació la aritmética. Las tablas de adición, sustracción, multiplicación y división constituyen un compendio de hechos observados experimentales.

Los números son abstracciones del mundo exterior, pero los números mismos tienen propiedades. Un entero como el 9 tiene divisores exactos que son enteros, 1, 3, 9; pero el 7 tiene sólo 1 y 7 como divisores enteros. Un entero que únicamente es divisible exactamente entre si mismo y el uno, es llamado un *número primo*. Los primeros números primos son 1, 2, 3, 5, 7, 11. El concepto de número primo viene a ser una abstracción de una abstracción. En esta forma, las matemáticas, a pesar de su origen último en el mundo físico, muy pronto se alejaron muchísimo de ese mundo.

La aritmética y el algebra

La aritmética trata de los números específicos, el álgebra, en cambio, con frecuencia formula proposiciones que son verdaderas para un número cualquiera. A este “número cualquiera” del que habla el álgebra, se le asigna un símbolo, digamos la letra *x*. Si se quiere hablar acerca de otros símbolos, *y*, *z*, etcétera. El álgebra formula proposiciones como:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2;$$

Esta proposición escrita en el lenguaje del álgebra se puede traducir al español como “la suma de dos números cualesquiera multiplicada por la diferencia entre los dos mismos números es igual a la diferencia entre los cuadrados de los dos números”. Esta proposición es verdadera para cualquier valor numérico que se represente con *x* y *y*; en otras palabras la expresión es verdadera para todos los números. En este sentido se puede decir que la aritmética formula proposiciones acerca de números específicos, mientras el álgebra puede formular proposiciones acerca de todos los números.

El álgebra también formula proposiciones tales como $y = x + 3$. Aquí se puede elegir cualquier número para x, pero una vez elegido, sólo hay un valor de y, para el cual la proposición es correcta. Si se específica que $x = 2$, la proposición es correcta sólo si $y = 5$. Los matemáticos describen esta situación diciendo que y es una *función* de x. Si, y es una función de x, entonces x también es una función de y; y se dice que x y y están relacionadas funcionalmente. De hecho, una expresión como : $y = x +3$ es una función proposicional, que se convierte en una proposición sólo cuando los números específicos sustituyen a las variables x y y. una relación funcional entre dos magnitudes, se puede mostrar en un dibujo sobre un sistema de coordenadas (gráfica), como ejemplo tenemos: $y = 3x^2 +7$, o $y = 3x + 7$.

Consideremos la proposición: $x^2 - 1 = 0$. Esta proposición es verdadera cuando $x = +1$, y cuando x = -1. Los valores +1 y -1 se denominan raíces de la ecuación de segundo grado debido a la presencia del término x elevado al cuadrado. Sin embargo no es posible encontrar números ordinarios que satisfagan la ecuación: $x^2 + 1 = 0$. Estas ecuaciones definen una nueva clase de números, que no se encuentran directamente en el mundo físico de la experiencia cotidiana. Estos nuevos números necesitan de símbolos que los representen ($+i$, $-i$).

Este paso se dio en el siglo XVI. Los nuevos números se denominaron números imaginarios. Es verdad que son imaginarios, pero lo son también todos los números en el sentido de que son abstracciones hechas por el cerebro. La opinión actual considera a los números imaginarios como invenciones que satisfacen una necesidad descubierta. Los números imaginarios fueron inventados para satisfacer una necesidad puramente matemática; ya que no había preocupación alguna por la utilidad que pudieran tener para describir el mundo físico.

Desde entonces los físicos han encontrado muy útiles los números imaginarios para describir el mundo físico.

Hipernúmeros

La aritmética y el álgebra común tratan de las propiedades de los números ordinarios, tomados de uno en uno, pero también es posible tratar con números en grupos de dos, de tres o de cuantos se quiera. Por ejemplo, se puede tratar con dos números a la vez, como en las fracciones ordinarias o quebrados. Un grupo de número s considerado como una sola magnitud, se llama hipernúmero; y los números individuales del grupo se llaman elementos. Cada tipo de hipernúmero tiene su propio conjunto de reglas de combinación; este conjunto es su álgebra. El concepto de hipernúmero es muy útil para entender las relaciones entre la ciencia y las matemáticas. Muchas magnitudes medidas en la física tiene las mismas propiedades de que ciertos hipernúmeros de las matemáticas.

Un tipo de hipernúmero con dos elementos los constituyen las parejas formadas por un número ordinario y un número imaginario. Tales hipernúmeros se llaman números complejos; y las reglas de combinación de los números complejos constituyen el *álgebra de los números complejos*. Los números complejos resultaron tan útiles, que los matemáticos trataron de producir, con el mismo tipo de proceso nuevas clases de números. Los números complejos son considerados como el tipo de número más fundamental; considerando a un número real ordinario como una clase especial de número complejo, que tiene su parte “imaginaria” igual a cero.

Las matemáticas se originaron como una abstracción de la experiencia empírica del mundo físico. Los símbolos se referían a objetos reales. En algún momento se encontró que los símbolos y las operaciones se podían desligar completamente de cualquier objeto físico; y se construyeron sistemas, partiendo solamente de símbolos y las operaciones. El matemático estuvo entonces en libertad para definir cualquier tipo de símbolo u operación que pudiera imaginar.

Como los símbolos se podían definir estableciendo que tenían la propiedad A, entonces la proposición “Este símbolo tienen la propiedad A” era verdadera y podía servir como premisa de un silogismo. Por deducción fue posible demostrar los teoremas, que fueron así proposiciones verdaderas acerca de las propiedades del sistema de símbolos. Con este procedimiento se construyó un enorme cuerpo de conocimientos matemáticos; que son conocimientos totalmente independientes del mundo físico, si se exceptúan las limitaciones impuestas por el hecho de que los matemáticos mismos forman parte del mundo físico.

El método científico es esencialmente cuantitativo y los números son básicos para la observación precisa y la predicción. Los científicos llegaron a descubrir que hay una correspondencia biunívoca entre el comportamiento de una parte del mundo físico y el comportamiento de una parte de un determinado sistema matemático de símbolos. Entonces pudieron utilizar el sistema matemático como un modelo de esa parte del mundo físico.

El científico parte de un conjunto de magnitudes que ha medido en el mundo exterior. Primero deberá encontrar un hipernúmero que corresponda a sus magnitudes. En la física, por ejemplo, hay tres magnitudes básicas: *masa*, *tiempo*, y *longitud*. Todas las demás medidas son combinaciones de estas tres. La masa es una propiedad de un objeto aislado o de un agregado; y se mide por un número ordinario. Los intervalos de tiempo y los intervalos de distancia (longitudes) son propiedades de dos puntos; pero también se miden por números ordinarios. Los hipernúmeros que sólo tienen un elemento, o sea los números ordinarios, se llaman números escalares y corresponden a magnitudes escalares del mundo físico.

Después de las magnitudes escalares, la magnitud que sigue en simplicidad es en mundo físico es un desplazamiento, es decir, un *movimiento* de un lugar a otro. Un desplazamiento implica tanto dirección y sentido como magnitud y, por ello, requiere de un hipernúmero de más de un elemento. Los desplazamientos en un plano requieren dos elementos o componentes, y el hipernúmero que les corresponde se llama *vector* de dos dimensiones; los desplazamientos en el espacio tridimensional requieren tres componentes y se llaman *vectores* de tres dimensiones. En general, un desplazamiento en un espacio de n dimensiones requiere n componentes y es descrito por un vector de n dimensiones.

Estadística

La estadística es aquella parte de las matemáticas que hace predicciones cuantitativas, a partir de los datos proporcionados por los acontecimientos repetidos. Estos acontecimientos repetidos pueden ser verdaderas repeticiones experimentales, como en la *teoría de los errores*, o bien, pueden ser repeticiones imaginarias, como en los conjuntos de la mecánica estadística. La estadística proporciona un ejemplo cuantitativo del proceso científico que usualmente se describe cualitativamente cuando decimos que los hombres de ciencia observan la naturaleza, estudian las medidas, postulan modelos para predecir nuevas mediciones y validan el modelo cuando la predicción es acertada.

Supongamos, por ejemplo, que se han tomado 100 medidas en una sola serie de experimentos de una magnitud física específica, como la velocidad de la luz. Las medidas van desde 299.69 millones de metros por segundo a 299.91 millones de metros por segundo. Las medidas se distribuyen dentro de ese margen, en la forma siguiente:

299.69 a 299.71	1
299.71 a 299.73	2
299.73 a 299.75	6
299.75 a 299.77	13
299.77 a 299.79	16
299.79 a 299.81	21
299.81 a 299.83	18
299.83 a 299.85	11
299.85 a 299.87	6
299.87 a 299.89	4
299.89 a 299.91	2

Tabla 1. Mediciones de la velocidad de la luz

Estos datos pueden ser representados en una gráfica formando una curva escalonada llamada *histograma de distribución*. Se ha encontrado, por la experiencia en otros casos, que, mientras más medidas se efectúan, utilizando intervalos cada vez más pequeños, el histograma resulta más regular. Conforme aumenta el número de medidas, el histograma se acerca más a una curva suavizada llamada *curva de distribución* de los datos del experimento. Se supone que esta curva de distribución es una propiedad fija del conjunto particular de condiciones (aparatos, observadores, condiciones atmosféricas, etcétera) del experimento.

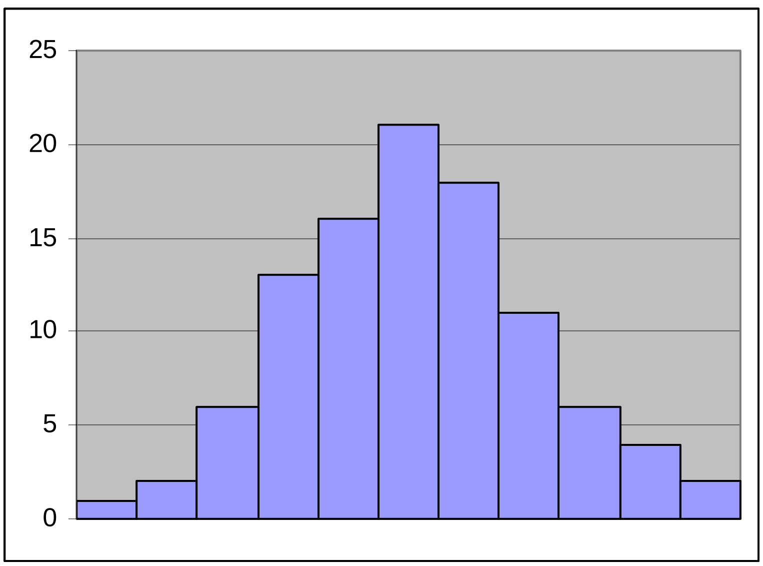

Fig. 1. Histograma

Se dice que la curva especifica la población progenitora de los resultados del experimento; es decir, los resultados posibles que se obtienen a partir de un número infinito de mediciones bajo las condiciones del experimento. Esta curva se especifica cuantitativamente, mediante los parámetros de su ecuación matemática: la *media*, la *desviación estándar*, y los otros que sean necesarios. La media es un número que localiza el centro de la curva, y la desviación estándar es un número que indica la amplitud de la curva. Algunas formas comunes reciben un nombre, como la curva de Gauss o distribución normal, la distribución binomial, la distribución de Poisson, y otros más.

Un experimento real no se ejecuta un número infinito de mediciones, sino sólo un número pequeño. Este conjunto pequeño de mediciones constituye una muestra de la población progenitora. Se puede calcular la media y la desviación estándar de la muestra. Estos números constituyen una estimación de los parámetros desconocidos de la población progenitora.

Cuando se conoce la curva de distribución de una muestra de los resultados de un experimento, es conveniente hacer una predicción sobre la siguiente medida individual. El área comprendida entre la curva de distribución y el eje horizontal es cuantitativamente igual al número de mediciones de la muestra. Si cada ordenada de la curva de distribución se divide entre el número de medidas de la muestra, se obtendrá así una curva cuya forma es similar a la de la curva de distribución. Esta nueva curva se llama curva de probabilidad para la muestra. La probabilidad de que la siguiente medida esté comprendida dentro de un margen determinado, se puede estimar partiendo del área que se encuentra comprendida “bajo” la curva de probabilidad que corresponde a ese margen.

La presición de la estimación aumenta con la dimensión de la muestra usada para construir la curva de probabilidad; y sólo llega a la exactitud cuando la muestra está constituida por la totalidad de la población progenitora. En algunos casos simples, se puede obtener la curva de distribución para los datos de una experimento an no efectuado, a partir de un “experimento mental” en el que se imagina el resultado del experimento para condiciones idealizadas (dados).