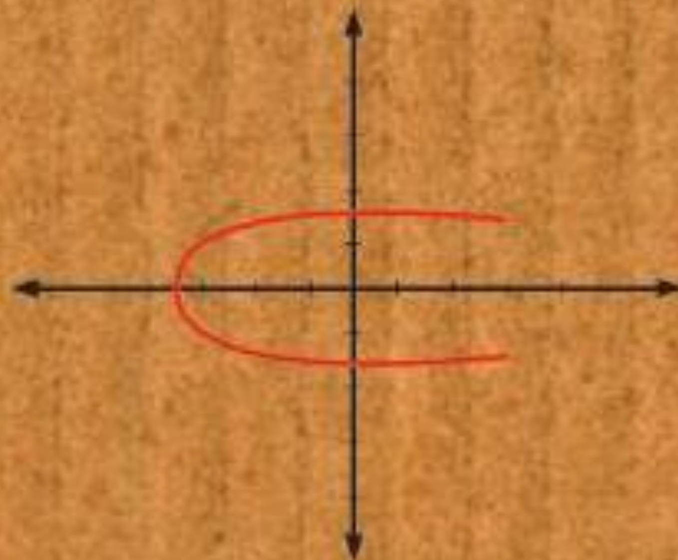


Cálculo

Estudiante

Universidad Veracruzana

INTRODUCCIÓN

El presente documento constituye una propuesta de enseñanza aprendizaje en un área especial de la matemática aplicada: el Cálculo.

Esta disciplina tiene por objeto de estudio incrementar su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas y habilidades para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación a través de funciones.

Así, la decisión de diseñar una propuesta diferente para el proceso de enseñanza aprendizaje, responde a la necesidad de disponer de los conocimientos y de la planeación adecuada y precisa para enfrentar, con mayores expectativas de éxito, el aprendizaje del Cálculo. Este curso se imparte a los estudiantes de diferentes áreas académicas de la Universidad Veracruzana, con carácter obligatorio, y se presenta como una propuesta como un primer curso de Cálculo.

La propuesta se fundamenta en el diseño de unidades didácticas por cada tema, donde se detalla un plan de trabajo concreto con competencias específicas, que coadyuven al aprendizaje significativo a través de la **Resolución de Problemas**. En tanto, la estrategia didáctica resolución de problemas reside fundamentalmente en la *reflexión y la creatividad.*

Por ello, nos proponemos que, como consecuencia de la aplicación de las unidades didácticas, los estudiantes desarrollen y mejoren aquellas habilidades que faciliten la apropiación de los conocimientos de cálculo.

Nos referimos a habilidades como: observar, sistematizara, generalizar y definir en palabras propias conceptos como: función, dominio, rango, variable dependiente e independiente, razón de cambio, derivada, etc. De este modo, en la tarea de motivar el desarrollo de estrategias heurísticas para la resolución de problemas propios del Cálculo, el profesor desempeña el papel de guía y facilitador del aprendizaje. Para ello, debe estimular procesos de razonamiento que favorezcan el desarrollo de heurísticas, en tanto técnicas de indagación y de descubrimiento necesarios en la resolución de problemas.

La génesis de alguna heurística le permiten al profesor ponderar las acciones de los estudiantes, que eventualmente puedan conducir a resultados plausibles, sin importar si son correctos o no. En esta tarea, resulta conveniente que el discurrir de los estudiantes pueda acompañarse de una breve explicación o comentario en relación al camino elegido en la resolución.

En la tarea metacognitiva de darse cuenta de tal avance, los estudiantes comprenden mejor el tema a estudiar y su conocimiento adquiere mayor significatividad.

Por otra parte, el profesor inducirá a los estudiantes a valorar los procesos que pueden ser explicados por sus compañeros, que ayuden a los estudiantes a buscar una explicación en aquellos procesos que no han logrado.

En este sentido, los pasos que parezcan trucos sacados de la manga, merecen un tratamiento valorativo diferenciado. El papel del monitor es captar el trabajo global desarrollado por los estudiantes que, individualmente o en equipo, trabajan en la resolución de un problema, permitiendo con esto concretar el tipo de ayuda que puede dar el profesor a los estudiantes.

La ayuda del profesor ha de alentar a los estudiantes para que se planteen interrogantes y hagan sugerencias. La ayuda debe ser tal que favorezca la resolución del problema pero de manera equilibrada. Es decir, no debe ser excesiva pero tampoco ha de ser limitada ni limitante al grado de hacer desistir a los resolutores en su propósito. Esta práctica puede hacer que los estudiantes consigan resolver problemas de una complejidad adecuada a su nivel, sin la ayuda del profesor. El proceso de reflexión y el planteamiento de interrogantes se desarrollan y son mejorados a través de una práctica continua en la resolución de problemas.

Las unidades didácticas, aquí presentadas, incluyen una serie de situaciones acordes a las clases y problemas para ser resueltos por los estudiantes fuera de clase, unos y otros tratan aspectos diversos del Cálculo en situaciones contextualizadas. Los problemas no tienen que ser necesariamente sencillos; sin embargo, la condición fundamental es que puedan ser entendidos por los estudiantes, sean susceptibles de ser resueltos sin necesidad de trucos y sean generalizables.

Con el objeto de desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, la estrategia de resolución de problemas va de lo concreto a lo abstracto.

Por tanto, cada sesión inicia pidiendo a los estudiantes que resuelvan situaciones que hacen referencia, o que pueden representarse, con números o letras. Cuando los estudiantes logran entender los conceptos presentados en la sesión, el grado de abstracción de los problemas que se les pide resolver será gradualmente mayor. Por lo tanto, exhortamos a los actores principales, nuestros estudiantes, a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de nuestra casa de estudios.

RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL PROFESOR

Pondrá énfasis en el trabajo que los alumnos desarrollarán en el aula. Esto supone aclarar a los estudiantes que deberán realizar, como trabajo extra escolar de cada a sesión, las actividades que se describen a continuación:

Resolver un problema que no haya sido resuelto en el aula a lo largo de las sesiones. El problema puede ser elegido de la lista de problemas a ser resueltos como trabajo individual que aparece al final de la sesión.

Construir y resolver un problema que requiera la aplicación de los conceptos dados en la sesión y que esté relacionado con su área de estudio de interés.

Describir el proceso que han seguido para verificar el resultado del problema que haya resuelto. Consideramos necesario que el profesor o el monitor programe, en cada sesión, las siguientes actividades:

Intervención del profesor, exposición de los estudiantes, trabajo en equipo, trabajo individual y discusión.

A continuación, describimos brevemente cada una de las actividades que mencionamos en el párrafo anterior. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos, no guarda relación con su importancia.

La descripción de las mencionadas actividades no supone que deban realizarse exhaustivamente en una clase de 50 minutos.

Intervención del profesor

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como:

a) Establecer los objetivos particulares.

b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula.

c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

Exposiciones de los estudiantes

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para:

a) Presentar sus argumentos.

b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo.

c) Presentar el proceso de resolución de un problema.

d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar;

e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

Trabajo en equipo

Los equipos podrán integrarse con dos o tres estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

Trabajo individual

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o, bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

Discusión general

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

El trabajo cotidiano consiste, fundamentalmente, en la resolución de problemas de diferentes grados de dificultad. Así, la colección de problemas que proponemos puede facilitar el propósito del profesor

ÍNDICE

ESTÁNDARES PARA LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DEL COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS (CCSSM)

Para saber cuáles son los aprendizajes que se promueven en cada situación didáctica, nos basaremos en los ocho Estándares para la Práctica Matemática de las Funciones establecidas en el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) para el nivel universitario. Estos estándares pueden ser considerados como elementos fundamentales de la resolución de problemas matemáticos:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

COORDINADORES UNIDAD 1:

DR. ALEJANDRO GÓMEZ AGUIRRE

MTRA. ZENAIDA AVILA AGUILAR

COLABORADORES UNIDAD 1:

Alejandro Sánchez Moreno

Yuliana Esmeralda Morales Rosado

José Alberto Reyes Jiménez

Juan León Toral

Julio César Amezcua Alcántar

María de Lourdes Watty Urquidi

Ismael Federico González Aguilar

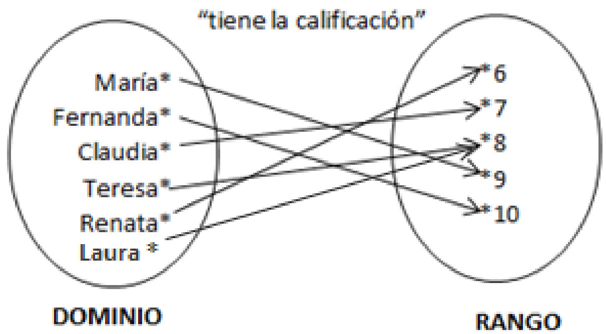
María Yesenia Zavaleta Sánchez

Virginia Palacios Luna

UNIDAD 1: EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESIÓN 1: DIAGRAMAS DE RELACIONES

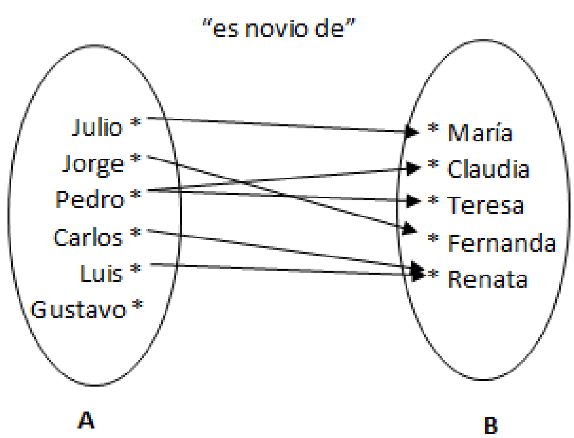
Situación 1.1: Un grupo de amigas obtuvieron las siguientes calificaciones: María 9, Fernanda 10, Claudia 7, Teresa 8, Renata 6 y Laura 8. De esta información se obtiene el diagrama:



¿Qué observas de las relaciones?

Nota: El profesor introduce el concepto de función

Situación 1.2: En un salón de clases existen las siguientes relaciones de noviazgos: Julio es novio de María; Jorge es novio de Fernanda; Pedro es novio de Claudia y de Teresa; Carlos es novio de Renata, pero también Luis es novio de Renata; Gustavo está soltero. Si relacionamos el primer conjunto A "todos los hombres del salón", con el segundo conjunto B "todas las mujeres del salón" mediante la relación "es novio de" tenemos el siguiente diagrama:



¿Es una función? ¿Por qué?

Situación 1.3: A un grupo de estudiantes se les aplicó una encuesta donde les preguntaron qué asignaturas les gustaban de una lista de 4: Matemáticas, Biología, Inglés, Historia. Se obtuvieron los siguientes resultados: A José le gusta Matemáticas; a Ana, Matemáticas; a Luis, Inglés, Historia y Matemáticas; a Raúl, Biología; a Silvia, Biología; a Carlos, Inglés; a Pedro no le gusta ninguna; y a Omar, Historia. Realiza el diagrama que relaciona a los estudiantes (*dominio*), con las asignaturas (*rango*) ¿es o no es una función? ¿Por qué?

Situación 1.4: En una fiesta se encontraban 8 personas, después de un rato de platicar, se dieron cuenta que las 8 tenían la misma edad, 25 años. Realizar un diagrama que relacione a cada persona de la fiesta (*dominio*), con la cantidad de años tiene (*rango*), mediante la relación "tiene la edad de:". ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.5: Si cambiamos los datos de la situación anterior: el Dominio ahora es la edad y el rango son las 8 personas. ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.6: Según las estadísticas de la Organización Internacional del Café (OIC), de octubre de 2010 a junio de 2011, los principales países exportadores de café en el mundo son: Brasil, que exporta principalmente a EEUU, Italia, Argentina y Uruguay; Vietnam, que exporta principalmente a Alemania y Estados Unidos; Colombia, que exporta principalmente a Estados Unidos, Japón, Alemania y Portugal; e India, que exporta principalmente a Italia, Alemania y Rusia. Realizar un diagrama que relacione como Dominio a los países exportadores de café y Rango a los países que lo importan. ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.7: Supóngase de la situación 1.1, que ahora el dominio son las calificaciones y el rango son las estudiantes (sin incluir a Laura). Realiza el diagrama y determina si la relación de la calificación con la estudiante es una función. ¿Por qué?

PROBLEMAS PERSONALES

Las Situaciones 1.1P a 1.6P están basados en problemas del libro ***Implementing the Common Core State Standards through Mathematical Problem Solving de la NCTM***

Situación 1.1P: Si el *dominio* de una relación es escribir el nombre de una persona en el momento de su nacimiento en una base de datos y el *rango* son las huellas únicas de cada persona. ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.2P: Usted está planeando un viaje, la relación donde ingresa a su computadora una cantidad de dinero que puede gastar en pasajes de avión (*dominio*) y la computadora le da muchos lugares diferentes a los que usted puede volar por esa cantidad de dinero (*rango*). ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.3P: Cuando se utiliza una máquina expendedora, la relación donde se presiona una letra (*dominio*) y su caramelo de elección es la salida (*rango*). ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.4P: Si ahora la máquina expendedora, sin importar la letra que presiones (*dominio*), la salida es una bolsa de papas fritas (*rango*). La relación de la letra con las papas fritas, ¿es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.5P: Cuando el Sr. González llama por su nombre a un estudiante (*dominio*), el alumno le da la media de los 10 números que obtuvo al lanzar diez veces un dado (*rango*). ¿La relación del estudiante con la media de los 10 números es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.6P: Tu amigo escribe un programa de computadora en el que se introduce un número positivo (x) (*dominio*) y la computadora escribe dos valores, los valores de $\sqrt{x}$ y -$\sqrt{x}$ (*rango*). La relación de los de los números positivos (x) con los valores de $\sqrt{x}$ y -$\sqrt{x}$ ¿es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.7P: Realiza un diagrama de relación de una situación de la vida real, en la que represente una función y otro en la que no.

SESIÓN 2: TABLAS DE RELACIONES

Situación 2.1: Una función es una relación en la que se asigna a cada uno de los elemento de una columna de la tabla perteneciente al dominio con exactamente un elemento de otra columna de la tabla perteneciente al rango.

Sabiendo la anterior definición de función, responde lo siguiente:

Juan quiere contratar un teléfono por plan, para lo que una compañía le ofrece lo siguiente:

Número de llamadas	Precio
50	\$300.00
100	\$300.00
200	\$300.00
300	\$300.00
400	\$300.00
500	\$400.00

La función que relaciona el número de llamadas con el precio por número de llamadas, ¿es una función? ¿Por qué?

Situación 2.2: Un biólogo realiza un cultivo de bacterias. En la primera fase (adaptación) las bacterias se adaptan a las condiciones de crecimiento. En la fase de crecimiento, las bacterias comienzan la división celular y la población de bacterias crece. El biólogo fue registrando el número de bacterias acumuladas día con día como sigue:

Día	Número de bacterias
0	10
1	27
2	73
3	200
4	546

La tabla que relaciona los días transcurridos (*dominio*) con el número de bacterias (*rango*) existentes ¿es o no una función? ¿Por qué?

Situación 2.3: Una esfera sólida de cobre se somete a un incremento homogéneo de temperatura en un lapso de tiempo determinado y ésta comienza a dilatarse como sigue:

Tiempo	Crecimiento de Diámetro
0 min	0 mm
1 min	1.00 mm
2 min	1.41 mm

3 min	1.73 mm
4 min	2.00 mm
5 min	2.23 mm

La tabla que relaciona el Tiempo transcurridos (*dominio*) con el crecimiento del diámetro de la esfera en ese tiempo (*rango*) ¿es o no una función? ¿Por qué?

Situación 2.4: Supóngase de la situación anterior, que el crecimiento del diámetro de la esfera representa el dominio y el tiempo transcurrido que le corresponde representa el rango. Realiza la tabla y determina si esta relación es una función. ¿Por qué?

Situación 2.5: El puente Golden Gate en San Francisco California, fue diseñado por expertos ingenieros de manera que pueda atravesar el rio suspendido por 2 torres. El puente esta sostenido por unas cuerdas en la parte superior que van variando en altura conforme se va alargando el puente. Se hizo un registro de la altura de las cuerdas y del largo del puente de una torre a otra como sigue:

Largo	Altura
0 metros	102 metros
2 metros	66 metros
4 metros	38 metros
6 metros	18 metros
8 metros	6 metros
10 metros	2 metros
12 metros	6 metros
14 metros	18 metros
16 metros	38 metros
18 metros	66 metros
20 metros	102 metros

La tabla que relaciona como *dominio* el largo del puente y como *rango* la altura de las cuerdas ¿es o no una función? ¿Por qué?

Situación 2.6: Si cambiamos los datos de la situación anterior: Supóngase ahora que el *dominio* es la altura de las cuerdas y el *rango* es el largo del puente ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 2.7: Un grupo de estudiantes obtuvo las siguientes calificaciones:

Alumno	Calificación
María	8
Lourdes	10
Francisco	10
Juan	9
Claudia	7
Teresa	8
Renata	6
Luis	10
Fernando	6

Situación 2.8: En una librería, la computadora registra la cantidad de libros vendidos en una semana y los ordena de la mayor a la menor con su día de venta correspondiente, como sigue:

Cantidad Vendida	Día
30	Miércoles
27	Sábado
27	Lunes
21	Viernes
15	Martes
13	Jueves

La tabla que relaciona la cantidad de libros vendidos (*dominio* también llamado *entradas*) con su día de venta (*rango* también llamado *salidas*), ¿es o no una función? ¿Por qué?

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 2.1P: Pedro quiere saber si el costo de viajar en taxi en la ciudad de Xalapa (dominio) se relaciona con la distancia recorrida (rango) para lo cual cuenta con los registros de la tabla siguiente:

Costo del transporte	Km recorridos
$20.00	1
$20.00	5
$20.00	10
$25.00	15
$30.00	20
$30.00	25
$35.00	30

¿Es o no una función? ¿Por qué?

SESIÓN 3: PARES ORDENADOS

Situación 3.1: Se llama *par ordenado* a un conjunto formado por dos elementos matemáticos, un primer elemento $\boldsymbol{a}$ y un segundo elemento $\boldsymbol{b}$ que se denotan: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

En una base de datos hay diez personas enlistadas con el año en el que nacieron como sigue:

1.- 1989

2.- 1992

3.- 1976

4.- 1970

5.- 1955

6.- 1995

7.- 2000

8.- 1966

9.- 1982

10.-1958

Organiza la información en pares ordenados. Como primer elemento escribir el año de nacimiento y como segundo elemento la edad de cada uno al año 2014.

Situación 3.2: Una función es un conjunto de *pares ordenados* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en donde el primer elemento $\boldsymbol{x}$ pertenece al conjunto llamado Dominio y el segundo elemento $\boldsymbol{y}$ pertenece al Rango. Que satisfacen esta condición: No hay dos pares ordenados con el mismo primer elemento y diferente segundo elemento.

Sabiendo la anterior definición de función, ¿los siguientes conjuntos de pares ordenados representan una función? ¿Por qué? Realiza el diagrama de relaciones y la tabla para cada uno.

1.- {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)}

2.- {(1, 3), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (4, 9), (5, 78), (6, 14)}

3.- {(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)}

4.- {(0, 0), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3), (16, 4), (16, -4)}

Situación 3.3: Existen conjuntos infinitos de pares ordenados, por lo que en Matemáticas hay una manera de abreviarlos, por ejemplo: $\{(x, y) \mid x = y\}$, que es igual a: {(1, 1), (2, 2), (3, 3),…}

En los siguientes conjuntos de parejas ordenadas escriba 5 elementos que pertenezcan a dicho conjunto. Responda si es o no una función y justifique su respuesta.

1.- $\{(1, y) \mid y\ es\ entero\}$

2.- $\{(x, y) \mid x - y = 0\}$

3.- $\{(x, y) \mid x * y = 1\}$

4.- $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$

5.- $\{(x, y) \mid x + 2y = 3\}$

Situación 3.4: Carlos y Martha se van a casar, será un evento familiar así que entre los dos planean tener un total de 100 invitados. El dominio son los invitados del novio y el rango los de la novia. Enumere varios pares de números que satisfacen este requisito. ¿Representan o no una función? ¿Por qué?

Situación 3.5: Supóngase de la situación anterior, que ahora los invitados de la novia pertenecen al dominio y los del novio al rango. ¿Los pares ordenados de esta relación representan una función? ¿Por qué?

SESIÓN 4: GRÁFICAS

Situación 4.1: Decimos que la gráfica y es una función de x, si cada valor de x en el eje de las abscisas (horizontal) tiene un único valor de y en el eje de las ordenadas (vertical) asociado. Decimos que y es el valor de la función o la variable dependiente, y x es el argumento o variable independiente.

Sabiendo la anterior definición de función:

a) Grafica los pares ordenados:

1.- $\{(x, y) \mid y = 2x\}$

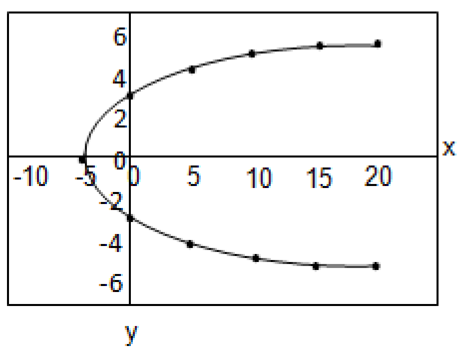
2.- $\{(0, y) \mid y \ es \ entero\}$

3.- $\{(x, y) \mid 2x + y = 0\}$

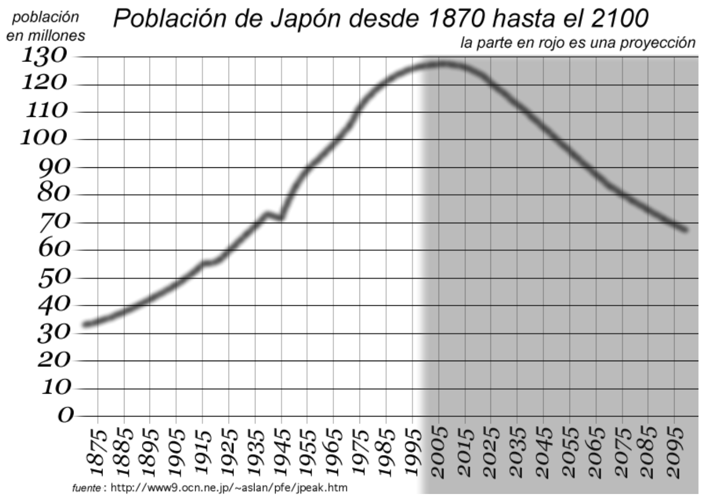
b) ¿Las gráficas obtenidas son una función? ¿Por qué?

Situación 4.2:

a) Identifica 6 pares ordenados (puntos) de la gráfica.
b) ¿La gráfica representa una función? ¿Por qué?

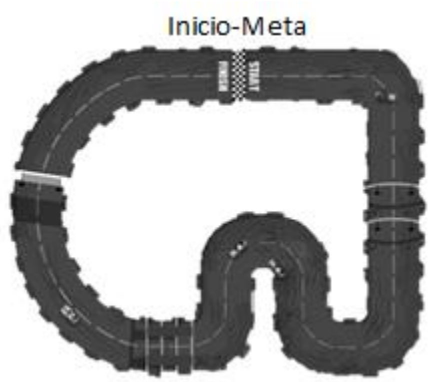


Situación 4.3: El gobierno de Japón publicó en sus estadísticas oficiales, la siguiente gráfica con la estimación de su población para el 2100:

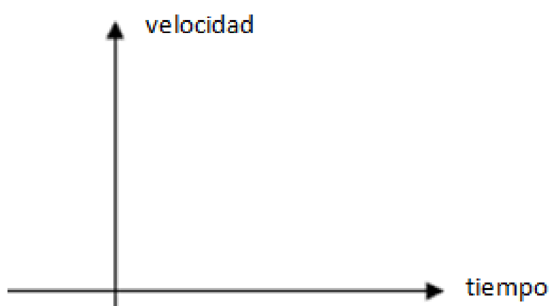


a) Realiza el diagrama, tabla y pares ordenados que relacionan el año con su población proyectada a partir del 2005.
b) ¿En qué año crece más la población?
c) ¿La gráfica representa una función? ¿Por qué?
d) ¿Cuál es el dominio y rango?

Situación 4.4: Un corredor de autos realiza una carrera en la siguiente pista.

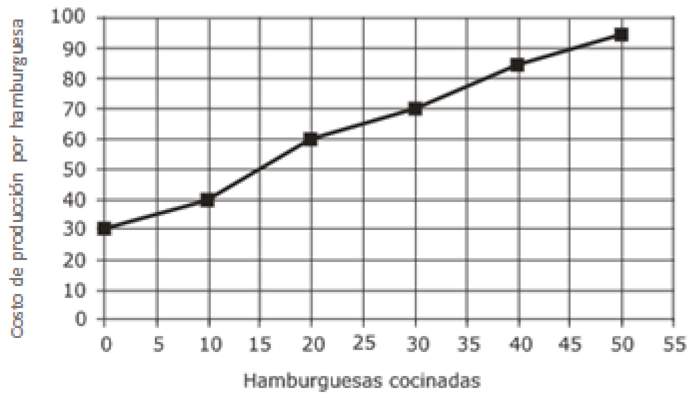


a) ¿Cómo crees que sería la posible gráfica de la velocidad a la que va el corredor de autos?



b) ¿Qué representa la variable dependiente y la variable independiente?
c) ¿La gráfica representa o no una función? ¿Por qué?

Situación 4.5: Dada la siguiente gráfica del costo de producción de hamburguesas.



a) ¿La gráfica representa una función?
b) ¿Qué representa la variable independiente x y la variable dependiente y?
c) ¿Cuál es el dominio?
d) ¿Cuántas hamburguesas nos dan el mayor costo de producción por hamburguesa?
e) Si suponemos que ahora las hamburguesas cocinadas dependen del costo de producción, realiza la nueva gráfica, ¿es función? (es llamada función inversa).

Ver: Números reales

https://www.youtube.com/watch?v=lsoFP2YApvs

Ver: Dominio continuo y discreto

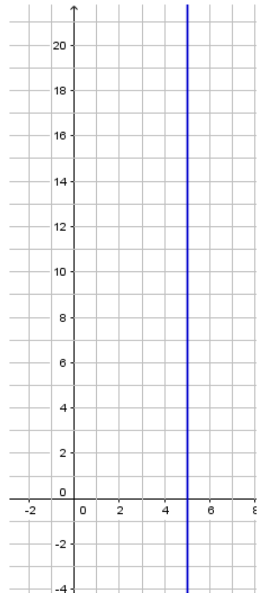
https://www.youtube.com/watch?v=z7tGPe2Q2YE

Ver: Tipos de intervalo

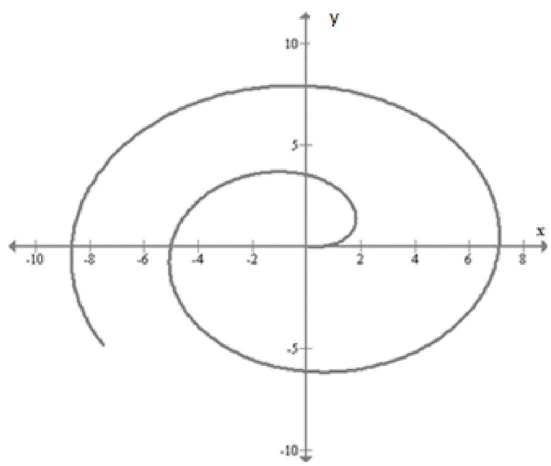
https://www.youtube.com/watch?v=LnK47p17AtQ

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 4.1P: ¿La gráfica siguiente representa una función? ¿Por qué?



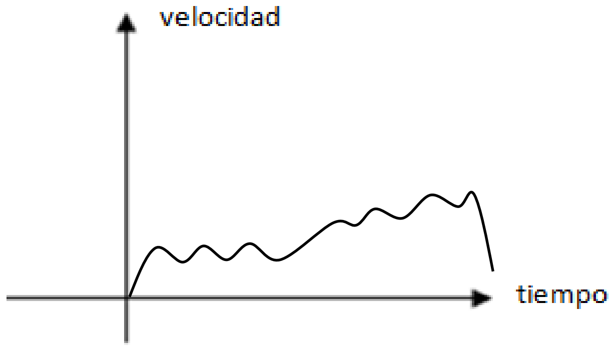
Situación 4.2P: La siguiente gráfica es conocida como el espiral de Fermat. ¿Representa una función? ¿Por qué?



Situación 4.3P[1]: Las perspectivas del Banco Nacional de México indican que la economía, en 2013, tuvo el siguiente comportamiento: un inicio promisorio (que va en aumento); luego entre abril y septiembre la situación se descompuso y, finalmente, en el último trimestre, la situación mejoró sustancialmente. Dibuja una posible gráfica del comportamiento de la economía en el año 2013.

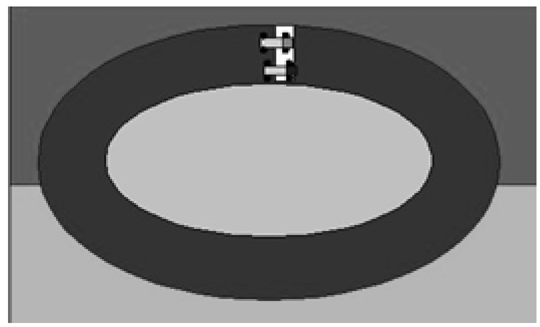
Situación 4.4P: Si un automóvil registró la siguiente gráfica de velocidades, ¿cuál de las siguientes pistas recorrió?

[1] Basada en el libro **Calculo Diferencial** del Tecnológico de Monterrey p. 27

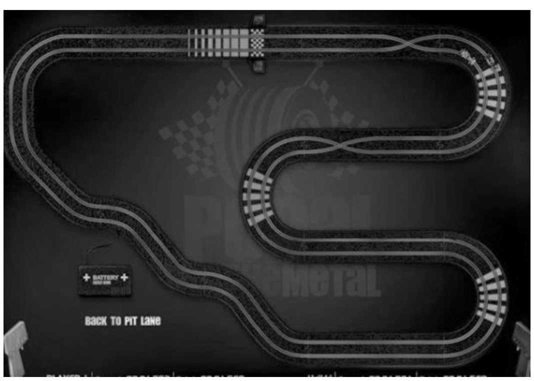


a)

b)



c)



SESIÓN 5: RELACIÓN ALGEBRAICA (ECUACIÓN)

Situación 5.1: En una relación algebraica (ecuación), si la variable dependiente y se puede dejar expresada en términos de la variable independiente x, se podrá escribir $y = f(x)$

Sabiendo lo anterior, despeja las siguientes relaciones algebraicas dejando a y en términos de$x$, t o la variable que corresponda y posteriormente sustituyendo a y por $f(x), f(t)$ o según corresponda.

a) $5x - y = 0$
b) $2x - y + 3 = 0$
c) $-y_0 - V_{0y}\mathrm{t} = -\mathrm{y} + \frac{1}{2}at^2$
d) $V_y{}^2 = V_{0y}{}^2 + 2a(y - y_0)$

Situación 5.2[2]: Una manzana cuesta 6 pesos.

a) ¿Cuánto cuestan cinco manzanas? ¿Diez manzanas?
b) ¿Cómo podemos representar el costo total de x cantidad de manzanas?
c) "El costo total de cinco manzanas es de 30 pesos". Si quisiéramos abreviar esta frase, se podría escribir $f(5)$ = 30. ¿Qué crees que significa $f(5)$ en palabras?
d) Hemos leído la expresión $f(x)$ como "f de x." ¿Cómo leer $f(15)$? ¿Qué significa $f(15)$? ¿Cuál es su valor?
e) Grafica puntos de la forma $(x, f(x))$ para diferentes valores de x. ¿La gráfica representa una función?

Situación 5.3: Una función $f(x)$ es una regla que asigna a cada elemento x del Dominio, con exactamente un elemento del Rango denotado por $f(x)$

Sabiendo la anterior definición de función, responde lo siguiente:

¿Las relaciones algebraicas de la situación 5.1, donde se despejó a y en términos de x, representan funciones?

Situación 5.4: Despeja ahora a x en términos de y y posteriormente sustituye a x por $g(y)$, ¿estas relaciones algebraicas representan funciones, es decir las funciones $f(x)$ tienen función inversa $g(y)$?

Situación 5.5: ¿Las siguientes relaciones algebraicas son funciones? ¿Por qué?

1.- $f(x) = 2x + 1$

---

[2] Basadas en el libro **Implementing the Common Core State Standards through Mathematical Problem Solving** de la NCTM p.21

2.- $g(x) = \begin{cases} x \text{ para } x \geq 0 \\ -x \text{ para } x \leq 0 \end{cases}$

3.- $h(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } x \geq 1 \\ 0 \text{ para } x \leq 1 \end{cases}$

4.- $C(x) = \begin{cases} 0 \text{ para } x \leq 0 \\ 1 \text{ para } 0 < x < 10 \\ 2 \text{ para } x \geq 10 \end{cases}$

5.- $r(x) = \sqrt{x}$

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 5.1P: Una empresa que fabrica computadoras tiene gastos fijos por $100 diariamente y un costo de producción de $7,000.00 por computadora. La empresa las saca al mercado con un precio de venta de $10,000.00 por computadora.

a) ¿Cuál es la utilidad semanal de la empresa? Encuentra esta relación algebraica (toma en cuenta que en la utilidad influyen: el costo fijo diario que tiene la empresa, las computadoras vendidas y el costo de producción por computadora)

b) ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 5.2P: El plan de teléfono celular de Claudia tiene un costo de $ 100 por mes, más cincuenta centavos por minuto. Su amiga Lupita está en otra compañía que le ofrece un plan con un costo de un peso con cincuenta centavos por minuto. Claudia no sabe si seguir con su compañía o cambiarse a la de Lupita.

a) ¿Cuál es tu consejo? Toma en cuenta que existe una relación entre los minutos de llamada y el precio por minuto para cada plan. Realiza las gráficas o tablas que creas correspondientes

b) ¿Ambas representan una función o no? ¿Por qué?

COORDINADORES UNIDAD 2:

DR. ALEJANDRO GÓMEZ AGUIRRE

MTRA. ZENAIDA AVILA AGUILAR

COLABORADORES UNIDAD 2:

Virginia Palacios Luna

Yuliana Esmeralda Morales Rosado

UNIDAD 2: FUNCIONES LINEALES

SESIÓN 1: RAZÓN DE CAMBIO Y FUNCIÓN LINEAL

Situación 1.1: Las siguientes tablas muestran el consumo promedio de gasolina de automóviles en 3 circuitos de carreras de Fórmula 1, en relación con la variación de su velocidad.

C1	
Vel (Km/h)	Consumo (ml)
160	640
170	680
180	720
190	760
200	800
210	840

C2	
Vel (Km/h)	Consumo (ml)
160	1280
170	1360
180	1440
190	1520
200	1600
210	1680

C3	
Vel (Km/h)	Consumo (ml)
160	480
170	510
180	540
190	570
200	600
210	630

a) ¿Existe algún patrón de cambio del consumo de gasolina y la velocidad en cada circuito? ¿Cuál?
b) Mediante una representación gráfica determina en que pista se consume menos gasolina y en cual más.
c) ¿Existe alguna intersección con respecto al eje de las X?
d) Que conclusión obtienes de la pregunta anterior.
e) ¿Por qué crees que el consumo sea diferente en cada circuito?

Situación 1.2: A partir de los datos de las siguientes tablas:

a)

x	$f(x)$
-2	3
-1	6
0	9
1	12
2	15
3	18

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2	0	-2	-4	-6	-8

c)

x	$f(x)$
0	2.5
1	5
2	7.5
3	10
4	12.5
5	15

a) ¿Existe algún patrón de cambio $f(x)$ con respecto a x?
b) Representa los datos de las tablas anteriores en el plano cartesiano
c) ¿Existe alguna semejanza? ¿Cuál?
d) ¿Existe alguna diferencia? ¿Cuál?
e) ¿Cuál es la intersección de cada una de las gráficas con el eje y (ordenada al origen)?

*Las Situaciones 1.3 y 1.4 fueron basadas en el libro **Calculo Diferencial** del Tecnológico de Monterrey p. 29*

Situación 1.3: Supongamos que actualmente mides 1.70 m de estatura y pesas 65.30 kg y que hace 10 años tenías una estatura de 1.45 m, mientras que tu peso era de 44 kg.

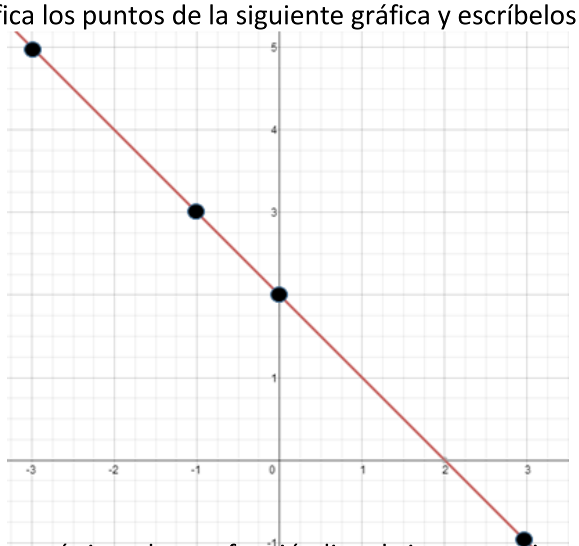
a) ¿Cuánto ha cambiado tu estatura de 10 años a la fecha?
b) ¿Cuánto cambió tu peso en ese tiempo?
c) Si consideramos otros datos para el peso y la estatura ¿harías la misma operación para obtener el cambio de éstos en un cierto periodo?
d) ¿Cómo denotarías el *cambio* en el peso (para cualquier peso)?
e) De la misma forma, ¿cómo denotarías el *cambio* en la estatura?

Situación 1.4: Con los datos de la situación anterior, se quiere saber cuánto creciste por año, durante los últimos 10 años.

a) ¿Qué harías para obtener esta información?
b) ¿Cuánto creciste por año?
c) Si hace 7 años pesabas 46.2 kg, ¿cuánto aumentaste por año desde hace 10 años hasta hace 7 años?

A eso que hiciste se le llama **cambio promedio** $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde y es la variable dependiente y x la variable independiente.

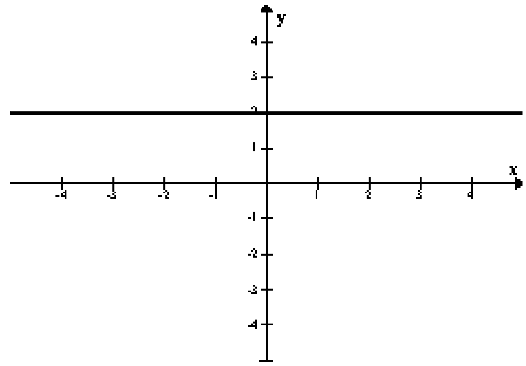
Situación 1.5: Identifica los puntos de la siguiente gráfica y escríbelos en una tabla:



De acuerdo a las características de una función lineal vistas anteriormente,

a) ¿La gráfica representa una función lineal?
b) Escribe en cada punto marcado el par ordenado (x, y) que representa de acuerdo a la gráfica.
c) Registra los puntos marcados en una tabla. ¿Cómo es el *cambio promedio* en cualquier par de puntos que tomes?
d) ¿Qué puedes conjeturar acerca de las funciones lineales en cuanto al cambio promedio?

Situación 1.6: ¿La siguiente gráfica representa una función? ¿Cuál es su dominio y rango? ¿Es una función lineal?



Ver: Obtener dominio y rango

https://www.youtube.com/watch?v=o9hEO2MYOZg

Situación 1.7: Determina si las siguientes funciones expresadas en las tablas son lineales obteniendo el cambio promedio (también lo llamaremos ***pendiente*** de la función lineal).

g(x)	x
-15	-2
-3	0
3	1
21	4

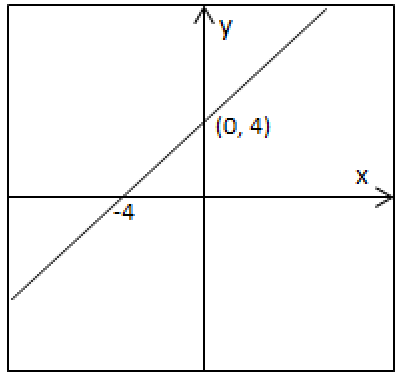
t	C(t)
-3	19
0	1
4	5
10	71

x	$f(x)$
0	1
-2	7
5	-14
-8	25

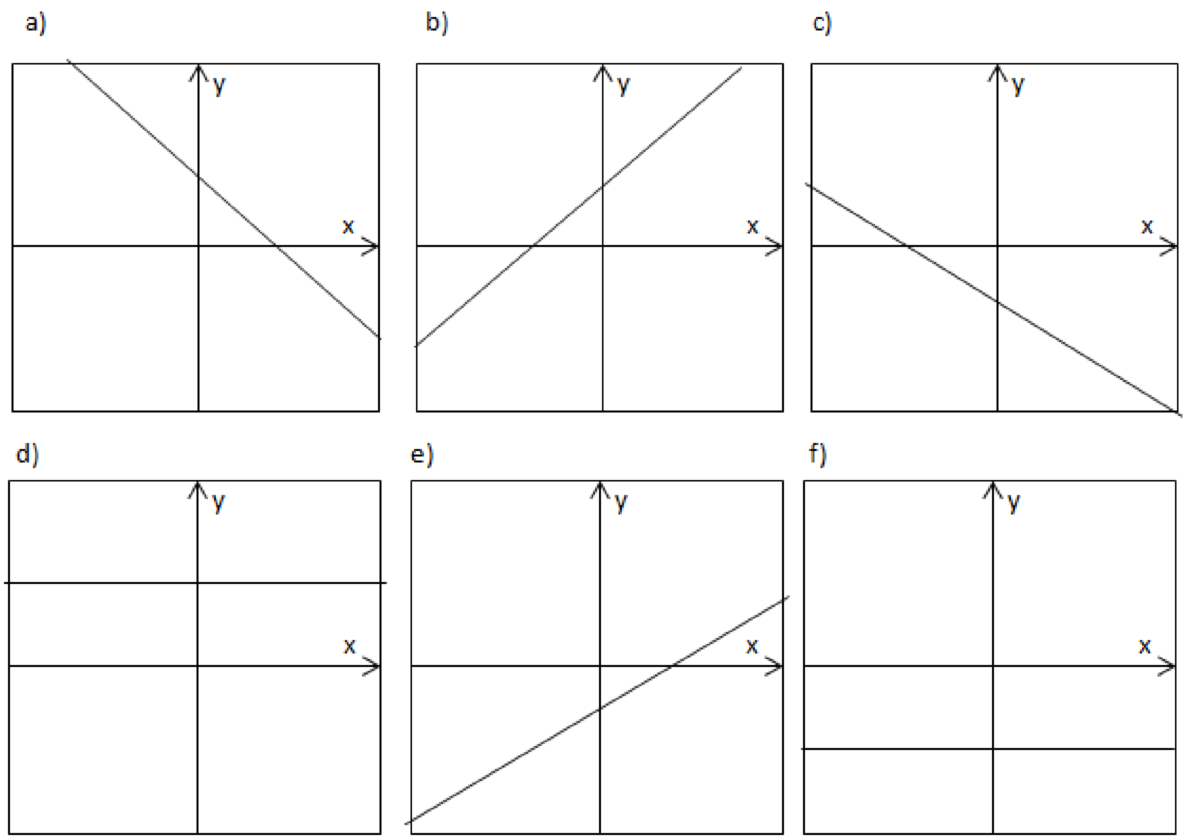
Situación 1.8: Carlos va a la tienda y quiere comprar bolsas de papas fritas y paquetes de galletas, para él y sus amigos. Cada bolsa de papas cuesta 8 pesos y cada paquete de galletas cuesta 4 pesos. Además dispone de 80 pesos que se debe gastar exactamente.

a) Si compra 6 papas, ¿cuántos paquetes de galletas puede comprar?
b) Si la cantidad de paquetes de galletas depende de la cantidad de bolsas de papas que compre. Registra en una tabla diferentes valores que pueden tomar las 2 variables.
c) ¿La tabla representa una función lineal? ¿Por qué?
d) Se sabe que las funciones lineales son líneas rectas con expresión algebraica $y = mx + b$ donde b es el punto de intersección con el eje y. Si m es el cambio promedio constante (pendiente) de la recta. ¿Cómo modelarías la compra de papas y galletas (encontrar la expresión algebraica que satisface los puntos registrados en la tabla)?
e) Si ahora la cantidad de bolsas de papas depende la cantidad de paquetes de galletas, determine la función inversa.

Situación 1.9: Obtén la función que modela la siguiente gráfica:



Situación 1.10: Dadas las siguientes gráficas, obtén los signos de la pendiente y de la intersección con el eje y. Proporciona una posible relación algebraica que modele cada gráfica



PROBLEMAS PERSONALES

*Las Situaciones 1.1P al 1.3P fueron basadas en el libro **Calculo Diferencial** del Tecnológico de Monterrey p. 34-35*

Situación 1.1P: Una laptop de \$15,684.00 se deprecia (disminuye su valor) a un valor de \$3,359.00 en 4 años. Si la depreciación es lineal, V es el valor de la laptop y t es el tiempo:

a) ¿Cuál es el valor de b? ¿Cuál es el valor del *cambio promedio* (también lo podemos llamar *tasa* de depreciación)?
b) Obtén una fórmula para el valor de la laptop en función del tiempo

Situación 1.2P: Analiza la siguiente tabla y determina lo que se pide:

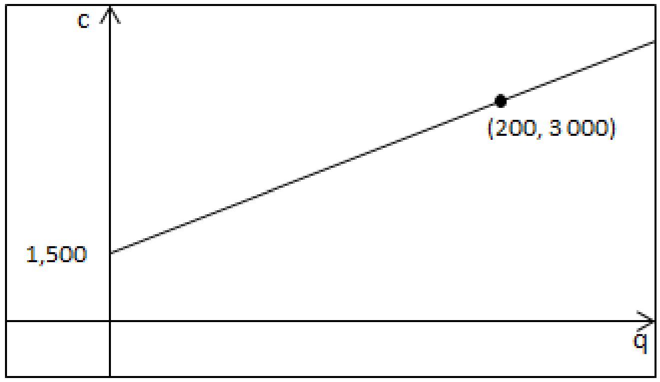
x	1	6	11	16
y	-2.38	-0.88	0.62	2.12

a) ¿Es una función lineal?
b) ¿Qué datos necesitas para plantear la función?
c) ¿Cuál es el cambio promedio (pendiente) de la función?
d) ¿Cómo obtienes b (la intersección con el eje y) y cuál es su valor?
e) Escribe la función que modela la tabla

Situación 1.3P: El Ladiser de Química Orgánica requiere adquirir los reactivos Ácido Sulfúrico y Ácido Clorhídrico para la generación soluciones, los costos del Ácido Sulfúrico son de \$250 pesos por litro y del Ácido Clorhídrico \$125 pesos por litro, se dispone de \$2,500.00, debiendo gastar la totalidad del dinero.

a) Con el dinero disponible se deben adquirir 3 litros de Ácido Sulfúrico para la realización de un proyecto ¿Cuántos litros de Ácido Clorhídrico se pueden comprar?
b) Si el requerimiento de Ácido Sulfúrico se incrementa a 12 litros, ¿cuantos litros de Ácido Clorhídrico se compraron?
c) ¿Cuál es el conjunto de valores permitidos para la adquisición del Ácido Sulfúrico y del Ácido Clorhídrico?
d) Si la cantidad de litros de Ácido Sulfúrico depende de la cantidad de litros de Ácido Clorhídrico que se compren, registra el conjunto de valores en una tabla, ¿representa una función lineal?
e) Escribe la función que modela la tabla anterior
f) De la función obtenida, determina el valor de la intersección con el eje x y qué significado tiene de acuerdo al contexto.

Situación 1.4P: La siguiente gráfica representa la función de costos $C(q)$ de una empresa, de acuerdo a la cantidad q de artículos producidos. Determina la función que modela la gráfica y contesta lo que se pide:



a) ¿Cuál es el costo fijo de la empresa?
b) ¿Cuál es el costo variable de la empresa?

Situación 1.5P: Una casa tiene un valor actual de $800,00.00, si su valor aumenta de forma constante cada año en un 5% del valor original:

a) Obtén la fórmula para el valor de la casa en función del tiempo.
b) Utiliza la fórmula que obtuviste para determinar dentro de cuántos años la casa tendrá un valor de $1,650,782.00

Situación 1.6P: El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta y a la temperatura de 175°C el gas ocupa 100 metros cúbicos.

a) Encuentra un modelo matemático que exprese el volumen del gas en función de la temperatura.
b) ¿Cuál es el volumen del gas a una temperatura de 140°C?
c) Grafica la función encontrada en el inciso a)

COORDINADORES UNIDAD 3:

DR. ALEJANDRO GÓMEZ AGUIRRE

MTRA. ZENAIDA AVILA AGUILAR

COLABORADORES UNIDAD 3:

Yuliana Esmeralda Morales Rosado

María Yesenia Zavaleta Sánchez

María de Lourdes Watty Urquidi

Virginia Lagunes Barradas

Antonio Luna Díaz Peón

UNIDAD 3: FUNCIONES CUADRÁTICAS

SESIÓN 1: RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Situación 1.1: Si obtenemos el cambio promedio de a a b cuando $b - a = constante$, tenemos que $m = \frac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b-a} = \frac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{constante}$ a este valor lo llamaremos: Primera diferencia de $f(x)$.

En las siguientes tablas de relaciones analizar cómo son las primeras diferencias de $f(x)$:

a)

x	$f(x)$
-2	3
-1	6
0	9
1	12
2	15
3	18

b)

x	$f(x)$
0	1
4	2
8	5
12	10
16	17

c)

x	$f(x)$
0	0
1	3
2	12
3	27
4	48

¿Cuáles describen funciones lineales? Argumentar la respuesta.

Situación 1.2: En las tablas anteriores, que NO representan una función lineal, generar dos nuevas columnas. En una columna escribir las primeras diferencias obtenidas y en la otra obtener las diferencias de estas diferencias (segundas diferencias), como sigue:

x	$f(x)$	Primera diferencia	Segunda diferencia
x_1	$f(x_1)$		
		$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = Diferencia\ 1$	
x_2	$f(x_2)$		$Diferencia\ 2 - Diferencia\ 1$
		$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = Diferencia\ 2$	
x_3	$f(x_3)$		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

¿Qué observas en las segundas diferencias de $f(x)$ obtenidas en cada una de las tablas?

a) ¿Qué tienen en común los resultados que obtuviste en las tablas consideradas?
b) ¿Las diferencias de diferencias de f(x) puede ser cero? ¿Por qué?
c) Las funciones que modelan las tablas consideradas en los incisos anteriores se llaman Cuadráticas, ¿qué puedes conjeturar sobre estas funciones de acuerdo a tus respuestas anteriores?

Situación 1.3: ¿Cuáles de las siguientes situaciones son modeladas por una función cuadrática?

a) Una esfera sólida de cobre se sometió a un incremento homogéneo de temperatura y se dilató hasta llegar a un crecimiento máximo de su diámetro. Posteriormente se puso a enfriar y se registró como fue regresando el diámetro a su tamaño:

Tiempo (minutos)	Tamaño del Diámetro
0	11 mm
1	10.5 mm
2	10.25 mm
3	10.125 mm
4	10.063 mm
5	10.031 mm
6	10.016 mm

b) Carlos deja caer una piedra de la azotea de un edificio, que tiene una altura de 20 metros. Comienza a tomar el tiempo en que tarda en llegar al suelo y la distancia que va recorriendo como sigue:

Tiempo (segundos)	Distancia recorrida
0	0 m
1	0.8 m
2	3.2 m
3	7.2 m
4	12.8 m
5	20 m

c) El gerente de una empresa azucarera analiza los registros de venta de sus productos y anota en una tabla las utilidades obtenidas por tonelada de azúcar como sigue:

Azúcar (toneladas)	Utilidades (miles de pesos)
1	13
3	32
5	47
7	58
9	65
11	68
13	67

15	62
17	53

d) Los cables que sostienen un puente colgante tienen diferentes alturas y están sostenidos por dos torres de 50 metros de alto. Los cables tocan la superficie de rodamiento a la mitad de la distancia de las torres. El registro de la altura de las cuerdas de una torre a otra es el siguiente:

Largo (metros)	**Altura (metros)**
0	50
5	38.281
10	28.125
15	19.531
20	12.5
25	7.031
30	3.125
35	0.781
40	0
45	0.781
50	3.125
55	7.031
60	12.5
65	19.531
70	28.125
75	38.281
80	50

Situación 1.4: Grafica las tablas de la situación anterior que pueden ser modeladas por una función cuadrática.

a) ¿Cómo conjeturas que son las gráficas que caracterizan a las funciones cuadráticas?
b) En cada par de puntos consecutivos de la gráfica correspondiente a la tabla d) traza las rectas que representan las pendientes (razones de cambio promedio o primeras diferencias) y analiza cómo cambian de inclinación con respecto al valor.

Situación 1.5: Se sabe que las primeras diferencias (razones de cambio) de una función cuadrática en los siguientes puntos son:

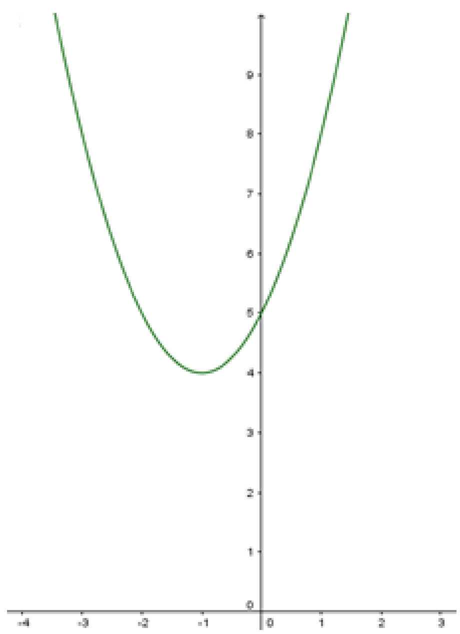
x	Primera diferencia de $f(x)$
-3	
	-5
-2	
	-3
1	
	-1
0	
	1
-1	
	3
2	

a) ¿Qué significa que la razón de cambio sea positiva o negativa en un par de puntos?

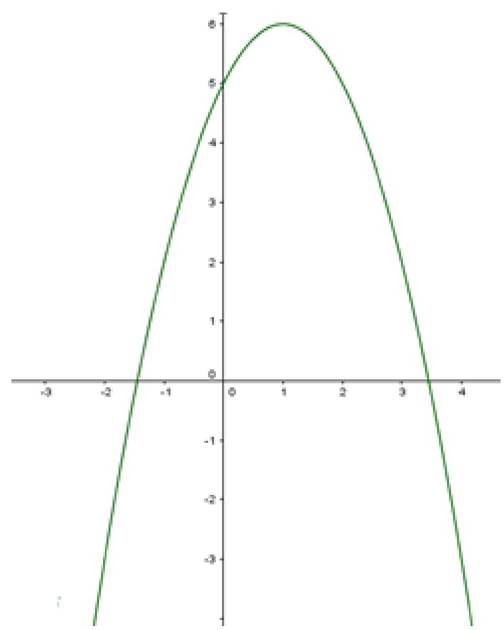
b) ¿Qué sucede en una función cuadrática cuando sus razones de cambio pasan de ser negativas a positivas o viceversa?

c) Analizando las razones de cambio de la tabla, determina cuál sería la gráfica de su función $f(x)$

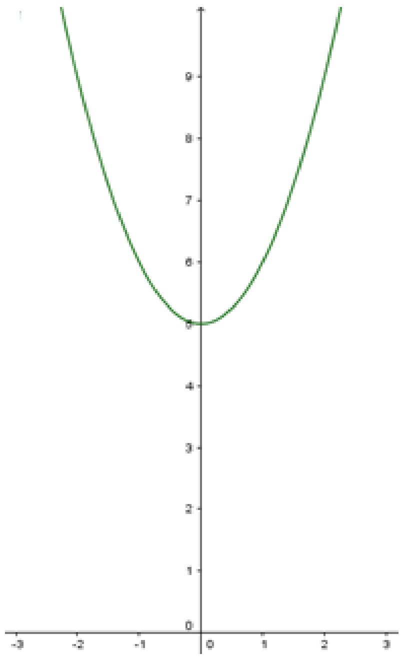
a)



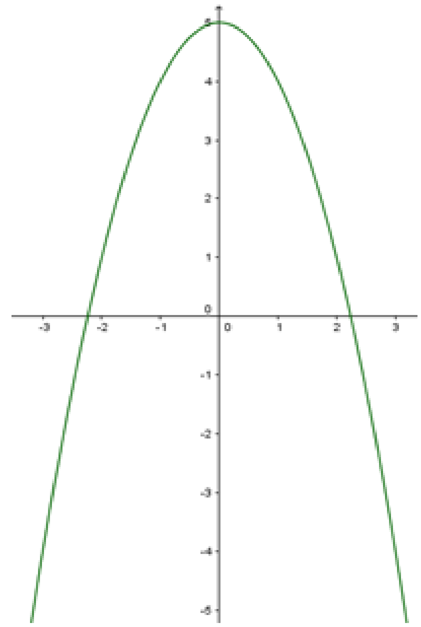
b)



c)

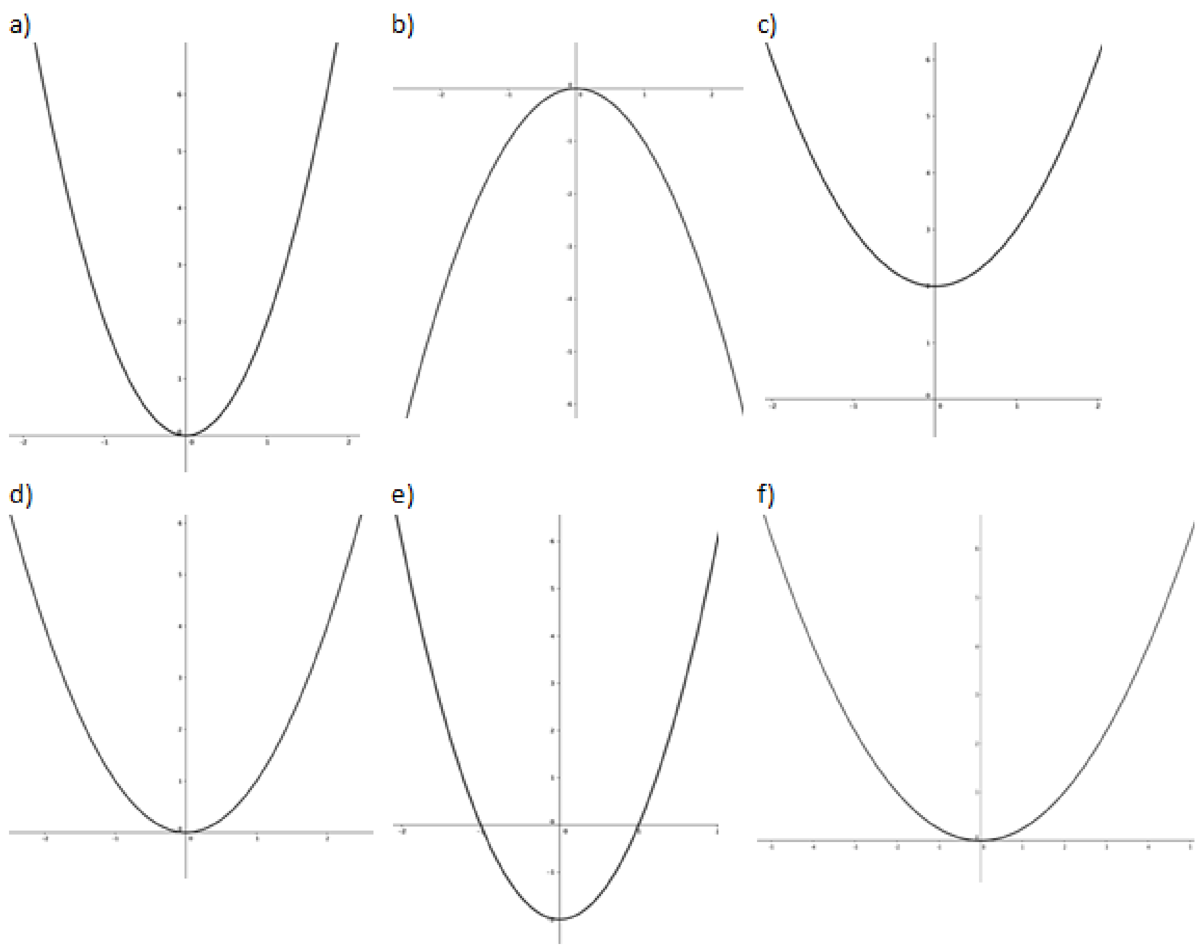


d)



Situación 1.6: Dado el valor de las pendientes obtenidas de una función (primeras diferencias). Determine las gráficas asociadas con estas pendientes.

Valores de las pendientes	Gráfica o gráficas asociadas
$3, 1, -1, -3$	
$-3, -1, 1, 3$	
$-6, -2,2,6$	
$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	



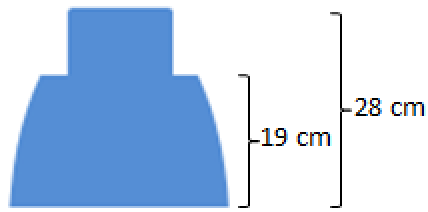
Explique lo que sucede en los casos que al conjunto de valores de las pendientes se le asocian varias gráficas

Situación 1.7: El registro del llenado de un contenedor de agua es medido de acuerdo a la altura que ocupa el agua en el contenedor cada minuto, como se observa en la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	Altura (cm)
1	4
2	7
3	12
4	19
5	28

a) ¿El llenado del contenedor puede ser modelado por una función cuadrática? Grafica la tabla.

b) Si al contexto le agregamos que la forma del contenedor es la imagen siguiente, ¿puede ser modelada por una función cuadrática? Dibuja la nueva gráfica. ¿Qué puedes concluir?



Contenedor

Situación 1.8: Si la forma general de una función cuadrática es $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ determina la función que modela el llenado del contenedor de la situación anterior para x en [1,4].

Situación 1.9: El puente Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 160 metros de altura y están separadas por una distancia de 1280 metros. El puente está suspendido de dos enormes cables que forman una parábola.

a) Determina la función que modela la altura del cable en cualquier posición x de la calzada, donde la posición (0,0) es el centro del puente (vértice de la parábola).
b) Si un automóvil se encuentra a 400 metros del centro del puente, ¿cuál es la altura del cable en esa posición?

Situación 1.10: En las situaciones anteriores se han construido las funciones cuadráticas que modelan algunos fenómenos usando 3 puntos.

a) ¿Puedo construir una función cuadrática con los siguientes 3 puntos: (1,9), (2, 12), (5, 21)?
b) ¿Qué puedes conjeturar con respecto al uso de 3 puntos para construir la función cuadrática?

Situación 1.11: Una empresa registra las ganancias que puede obtener de la venta de sus artículos de acuerdo al precio fijado. Si se sabe que las ganancias $f(x)$ con respecto al precio x del artículo pueden ser modeladas por una función cuadrática y se tienen los siguientes registros:

Precio	Ganancia
$100	$490,000
$200	$1´020,000
$500	$1´410,000

a) Determina la función cuadrática que modela las ganancias de la empresa
b) ¿Puedes obtener la ganancia máxima por la venta de artículos? Argumenta tu respuesta.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P: Una constructora registra el número de metros cúbicos de agua que deben utilizarse en el llenado de piscinas circulares de 2 metros de profundidad y que tienen diferentes radios, obteniendo la siguiente tabla:

Radio (m)	Volumen (m^3)
1	6.2832
2	25.1326
3	56.5486
4	100.5308
5	157.0796

¿Esta situación está modelada por una función cuadrática?

Situación 1.2P: En un colegio, los registros muestran que la calificación promedio, C, de un alumno es una función del número t de horas que éste estudia y destina a realizar tareas por semana; obteniéndose la siguiente tabla:

t	C(t)
0	1.2
1	1.41
2	1.64
3	1.89
4	2.16
5	2.45
6	2.76

7	3.09
8	3.44

a) La calificación promedio C, como función del número de horas t, ¿es una función cuadrática?
b) Encuentra la ecuación que modela a dicha función.
c) ¿Cuál es la calificación promedio esperada por el alumno que estudia y realiza tareas 12 horas a la semana?
d) ¿Cuántas horas a la semana deberá estudiar un alumno para que su calificación promedio sea 10?
e) Describe la gráfica de la función "calificación promedio", considerando su dominio como el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a 0.

Situación adaptada del libro "Álgebra intermedia" de Allen R. Ángel

Situación 1.3P: Se deja caer un objeto en reposo y se mide la distancia d, en metros, que recorre el objeto, t segundos después del punto de partida, obteniendo la siguiente tabla:

Tiempo t (segundos)	**Distancia d (metros)**
0	0
1	4.9
2	19.6
3	44.1
4	78.4
5	122.5

a) Determina la función que modela los datos de la tabla
b) Suponiendo que se sigue esta tendencia en los puntos ¿Cuántos metros recorrerá el objeto después de 6 segundos?
c) Realiza la gráfica de la función.

Situación adaptada del documento digital "Ministerio de educación del Ecuador: texto de matemáticas, bachillerato general unificado"

SESIÓN 2: CUADRÁTICAS EN FORMA DE VÉRTICE (FORMA NORMAL)

Situación 2.1: Encontrar los siguientes binomios elevados al cuadrado

$(x-5)^2$

$(x-3)^2$

$(x+1)^2$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

¿Puedes relacionar los términos del resultado con los del binomio inicial? ¿Qué puedes conjeturar (deducir)?

Situación 2.2:

a) Factorizar la siguiente función a binomio cuadrado perfecto, tomando en cuenta el resultado anterior.
$$n(x) = 2x^2 + 8x + 8$$
b) Factorizar las siguientes funciones usando el primero y segundo término, ¿cómo debe ser c para que se satisfaga que $f(x)$ es un binomio cuadrado perfecto?
$$f(x) = x^2 - 8x + c$$
$$f(x) = 3x^2 + 9x + c$$

Situación 2.3: Para las funciones que no se pueden factorizar en binomios cuadrados perfectos las podemos "completar" agregando o quitando el número necesario al binomio, para que se satisfaga el último término "c", como se observó que debía satisfacerse en la situación 2.2

Factorizar las siguientes funciones (completar cuadrados), de manera que tengan la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde a, h y k son constantes.

$h(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$g(x) = 3x^2 + 18x + 28$

$p(x) = -x^2 - 4x + 4$

$n(x) = x^2 - 10x$

Situación 2.4: La función cuadrática $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$ es llevada a su forma de vértice $p(x) = 3(x-1)^2 + 2$, realiza lo que sigue:

a) Analiza algunos de los posibles valores de x, ¿cómo es la expresión $(x-1)^2$ (tiene resultados positivos, negativos, cero)?
b) Tomando en cuenta que 3 es positivo, ¿cómo es la expresión $3(x-1)^2$?
c) ¿Cuál es el valor menor que puede tomar la expresión $3(x-1)^2$?
d) ¿Cuál es el valor de x necesario para que la expresión anterior alcance su valor más pequeño (mínimo)?
e) Sustituyendo el valor de x del inciso anterior en la forma de vértice, ¿qué valor toma $p(x)$?
f) ¿Cuáles son las coordenadas del punto mínimo?

Situación 2.5: La función cuadrática $g(x) = -3x^2 + 12x - 11$ es llevada a su forma de vértice $g(x) = -3(x-2)^2 + 1$, realiza lo que sigue:

a) Analiza algunos de los posibles valores de x, ¿cómo es la expresión $(x-2)^2$(tiene resultados positivos, negativos, cero)?
b) Tomando en cuenta que -3 es negativo, ¿cómo es la expresión $-3(x-2)^2$?
c) ¿Cuál es el valor mayor que puede tomar la expresión $-3(x-2)^2$?
d) ¿Cuál es el valor de x necesario para que la expresión anterior alcance su valor más grande (máximo)?
e) Sustituyendo el valor de x del inciso anterior en la forma de vértice, ¿qué valor toma $g(x)$?
f) ¿Cuáles son las coordenadas del punto máximo?

Situación 2.6: Usar algún software libre (por ejemplo Desmos) para graficar y encontrar el vértice e intersecciones con el eje *x* de las siguientes funciones cuadráticas:

$h(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$g(x) = 3x^2 + 18x + 28$

$p(x) = -x^2 - 4x + 4$

$n(x) = x^2 - 10x$

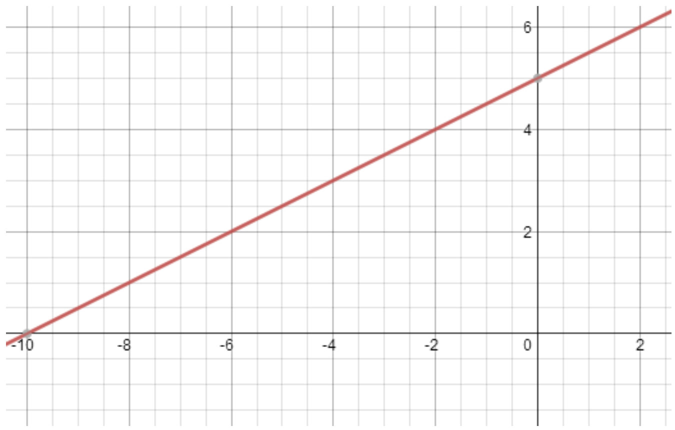
Comparar tus resultados con las factorizaciones hechas en la situación 2.3

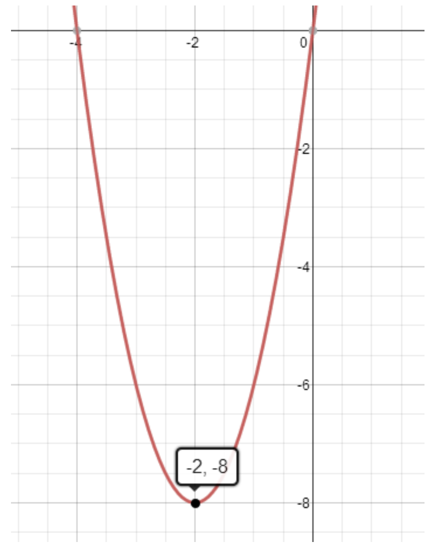
Situación 2.7: El precio de un vuelo en cierta aerolínea varía de acuerdo al número de pasajeros. Si exactamente 200 personas se registran en el vuelo, el precio por persona es de \$300 dólares, es decir, la aerolínea tiene un ingreso de \$60,000.00 dólares. Sin embargo, si más de 200 personas se registran, el precio del vuelo se reduce un dólar por cada persona adicional. Sea x el número de pasajeros superior a 200:

a) Determine la función que modele el ingreso obtenido por la aerolínea.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo que puede obtener la aerolínea?

c) Obtenga el número de pasajeros necesarios para tener un ingreso de $61,600 dólares.
d) Determine una función que modele el número de pasajeros superior a 200 de acuerdo al ingreso. ¿Cómo es esta función con respecto a la obtenida en a)?

Situación 2.8: Escribe las funciones que modelen cada una de las siguientes gráficas e identifica su dominio y rango:





Situaciones 2.9 a 2.3P están basadas en problemas del libro ***Precálculo. Matemáticas para el Cálculo (2007) de*** **Steward, J., Redlin, L., Watson, S**

Situación 2.9: Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x cantidad de pizarrones está dado por la función $R(x) = 40x - 0.2x^2$,¿Cuál es el ingreso máximo y cuántos pizarrones se tienen que fabricar para obtener ese máximo?

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 2.1P: Cuando el paracetamol se toma oralmente su concentración en el torrente sanguíneo del paciente después de t minuto está dada por $C(t) = 0.3t - 0.002t^2$, la concentración se mide en mg/L ¿Cuándo se alcanza la concentración máxima? ¿Cuándo elimina el cuerpo la concentración de paracetamol?

Situación 2.2P: El número de mangos que produce cada árbol en una huerta depende de la densidad de árboles plantados. Si se plantan n árboles en una hectárea de tierra, entonces cada árbol produce 450-5n mangos.

¿Cuál es el número de mangos producidos por hectárea?

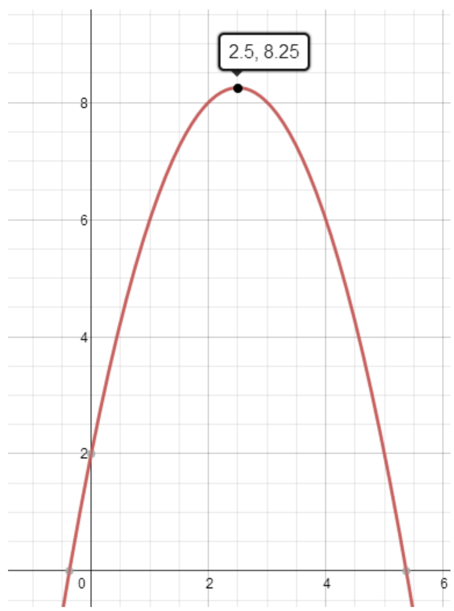
¿Cuántos árboles por hectárea se tienen que sembrar a fin de obtener la producción máxima de mangos?

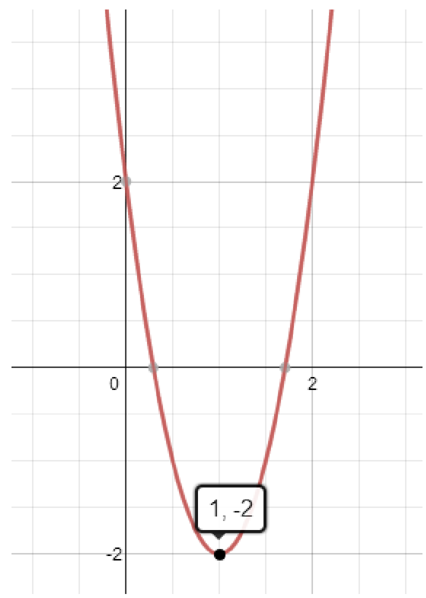
Situación 2.3P: La efectividad de un comercial de televisión depende de cuantas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces,

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

Donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿Cuántas veces lo tiene que ver un televidente?

Situación 2.4P: Escribe las funciones que modelen las siguientes gráficas:





Situación 2.5P: Un almacén de semillas registra la utilidad $U(x)$ obtenida por la cantidad x de costales de harina vendidos y los registra en una tabla como sigue:

x	99	100	101	102	103
$U(x)$	2997	3000	2997	2988	2973

a) ¿Qué tipo de función es?
b) ¿Cuántos costales nos dan una utilidad máxima? ¿Cuál es esa utilidad?
c) ¿Cuál es la función $U(x)$ que modela la utilidad de venta de cualquier cantidad de costales de harina x?

COORDINADORES UNIDAD 4:

DR. ALEJANDRO GÓMEZ AGUIRRE

LIC. NERY ROMERO GASPERIN

COLABORADORES UNIDAD 4:

Yuliana Esmeralda Morales Rosado

María Yesenia Zavaleta Sánchez

María de Lourdes Watty Urquidi

UNIDAD 4: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

SESIÓN 1: FUNCIONES EXPONENCIALES

Situación 1.1: Un nuevo juego que descargó en su celular consiste en pasar por distintos niveles de dificultad, por lo que en cada uno le dará una puntuación. Al iniciar jugando le regalan un punto, en el primer nivel gana 2 puntos, en el segundo nivel 4 puntos, en el tercero 8, en el cuarto 16 y en el quinto nivel 32 puntos.

a) ¿Considera que esta situación es una función? ¿por qué?
b) Si es una función, ¿cuál es el dominio y el rango? Encuentre sus conjuntos.
c) ¿De qué depende que gane puntos?
d) ¿Será una función lineal? ¿por qué?
e) ¿Será una función cuadrática? ¿por qué?

Situación 1.2: La siguiente tabla muestra los niveles ganados con los puntos acumulados, descrita en la situación 1.1.

Nivel (n)	0	1	2	3	4	5
Puntos ganados $P(n)$	1	2	4	8	16	32

Tabla 1

a) Grafica los puntos $(n, P(n))$ de la tabla.
b) ¿Qué operaciones realizas para obtener los puntos que se ganan en el octavo nivel?
c) Represente las operaciones para obtener cada valor $P(n)$ de la tabla, considerando todos los valores anteriores representados. ¿observa alguna relación entre estas representaciones? ¿cuál?
d) ¿Cuántos puntos ganará en el nivel 32?
e) Represente algebraicamente el total de puntos $P(n)$ que ganarías al final de cualquier nivel n.

Situación 1.3: Las funciones exponenciales tienen la forma matemática siguiente:

$$y = b^c$$

Donde b se conoce como base y c como exponente. Generalmente, la base es un valor constante y el exponente es variable. En diversas aplicaciones de ciencia e ingeniería se pueden obtener conjuntos de datos que se presentan en forma tabular, tales como los siguientes:

Tiempo	Posición
0	1.09
1	2.76
2	7.41
3	20.12
4	54.61
5	148.46

6	403.45
7	1096.63
8	2981.04
9	8103.16
10	22026.01

a) ¿Puedes identificar la variable dependiente y la independiente en el modelo exponencial $y = b^c$?
b) ¿Qué falta conocer del modelo?
c) ¿Puedes calcularlo considerando un par de datos de la tabla?
d) ¿Qué sucede con el cálculo si consideras otros datos de la tabla?
e) ¿Te es familiar este valor?

Situación 1.4: Un artista abre su cuenta de Facebook para mantenerse en contacto con sus fans y ese mismo día lo contactan 2 amigos. Después revisa su cuenta diariamente, observando que en el primer día tiene 6 amigos, en el segundo tiene 18, en el tercero 54, en el cuarto 162 y en el quinto día tiene 486 amigos que lo siguen por este medio:

a) ¿Será una función lineal? ¿por qué?
b) ¿Será una función cuadrática? ¿por qué?
c) De seguir con la tendencia descrita, cuando el artista checa su cuenta en el día 8, ¿cuántos fans tiene ahora en su cuenta? Explica cómo llegaste al resultado.
d) Encuentre la función $f(x)$ que modele el número de amigos que el artista tiene agregados al facebook en x días.
e) Usa este modelo para determinar los amigos que tiene el día 10 a las 5 de la tarde.
f) Grafique en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares estos valores. Describa su comportamiento.

Nota: Las situaciones 1.2 y 1.3 son modeladas por las llamadas funciones exponenciales donde la variable es un exponente. La forma general de éstas se escribe:

$$f(x) = a \cdot b^{\mathrm{x}}$$

Donde b representa el factor de cambio o base de la función, x y a son cualesquiera números reales.

Ver: Función Exponencial

https://www.youtube.com/watch?v=YL-f8Jo-ASk

Ver: Propiedades de la función exponencial

https://www.youtube.com/watch?v=P7hrBKWyf_o

Situación 1.5: Grafique las funciones con apoyo de un programa y explique .

a) Dadas las siguientes funciones, determine la regla que explique su comportamiento.

   a. $f(x) = 3^{\frac{1}{2}x}$
   b. $f(x) = 3^{x}$
   c. $f(x) = 3^{2x}$
   d. $f(x) = 3^{6x}$

   Si cambian todos los exponentes de las funciones a negativos. Explica lo que observas.

b) Determine la regla que explique el comportamiento de las siguientes funciones con respecto a las de a).

   a. $f(x) = 3^{\frac{1}{2}x+2}$
   b. $f(x) = 3^{x+2}$
   c. $f(x) = 3^{2x+2}$
   d. $f(x) = 3^{6x+2}$

   Si en el exponente de en vez de sumarle 2 se le resta. ¿Qué puedes deducir al respecto? ¿Qué sucede con cualquier gráfica de a) cuando se le resta un número mayor que uno en comparación cuando se le resta un número menor que uno y en qué orden se encuentran estas tres gráficas?¿y cuando se le suma?

c) Determine la regla que explique el comportamiento de las siguientes funciones.

   a. $f(x) = 3^{x}$
   b. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x}$
   c. $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$
   d. $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3^{x}$
   e. $f(x) = -2 \cdot 3^{x}$

d) Explique en forma general lo que sucede al comparar las gráficas de los siguientes tipos de funciones

   a. $f(x) = 3^{x}$
   b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
   c. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

e) En cualquier función de la forma $f(x) = a \cdot b^{x}$¿qué representa a en su gráfica?

f) ¿Qué valores no puede tomar b? ¿por qué?

Situación 1.6: Se estima que la población de un municipio del Estado es de 1,400 habitantes y crece a una tasa del 3% anual, esto es, el porcentaje de lo que aumentará la población con respecto a la cantidad actual de habitantes:

a) Si al año se regresa a censar la población, escriba la operación que realizaría para determinar la cantidad de habitantes que tendrá el municipio.

b) Escriba las operaciones expresadas en un producto para determinar el total de habitantes en el segundo año.

c) Determine la función que le permita saber la población $P(t)$ del municipio en cualquier año t.
d) Utilizando la función que modela esta situación determine la población que tendrá el municipio si se regresa a censar a los 13 años, un mes y 24 días.

Situación 1.7: Se hará la construcción de una carretera, para lo cual dos constructoras A y B ofrecen sus presupuestos y en función del costo el cliente decidirá la mejor opción. El presupuesto de la constructora A establece la cantidad de $100, 000.00 diarios por el tiempo que dure la obra, el presupuesto de la B por el contrario establece que inicialmente se le pague $1.00, y a partir del primer día $2.00, el segundo día $4.00, el tercero $8.00, el cuarto $16, el quinto $32.00, el sexto $64.00, el séptimo $128.00 y así sucesivamente hasta que se termine la obra.

a) ¿Cuánto se pagaría hasta el día 21 con la constructora A y B, respectivamente? ¿Qué sucede a partir del día 22?
b) Encuentre las funciones $A(t)$ y $B(t)$ que representan el costo de construcción de la carretera por la constructora A y B, respectivamente.
c) Si en ambos presupuestos se consideran las horas del día que se tiene a la maquinaria y a los trabajadores en la obra. ¿Cuánto se pagaría con la constructora A y con la B; respectivamente, si decidiera parar la obra el 21 del mes a las 12 horas del medio día?
d) ¿Qué decisión tomaría que le permita hacer la mejor elección?
e) Elabore una gráfica que ilustre las funciones modeladas para esta situación.

Situación 1.8: Un biólogo tiene una población de estudio de 3, 000 bacterias y les proporciona a sus estudiantes la misma cantidad, para que le entreguen resultados de su crecimiento en tres meses, considerando que crecen a una razón del 2% mensual. Los estudiantes entregan al Biólogo sus resultados del cálculo de la población de bacterias, pero según el Biólogo sus resultados son incorrectos, pues él tiene datos diferentes a partir del segundo mes:

Meses (t)	0	1	2	3
Núm. de bacterias calculadas por los alumnos (G)	3,000	3,060	3,120	3,180
Núm. de bacterias calculadas por el biólogo (F)	3,000	3,060	3,121.20	3, 183.62

Tabla 3

a) Encuentre las funciones $F(t)$ que utilizó el biólogo y $G(t)$que usaron los alumnos para llegar a sus resultados, pasado un tiempo de “t” meses.
b) Determinar en ambos casos el factor de cambio.
c) ¿Cuáles son las consideraciones que hicieron los estudiantes y las que hizo el Biólogo, es decir en que se basaron para llegar a estos resultados? ¿Cuál proyecto es el correcto? ¿Por qué?

Situación 1.9: Un almacén de semillas registra la utilidad de $U(x)$ pesos obtenida por la cantidad x de costales de harina vendidos y los registra en una tabla como sigue:

x	99	100	101	102	103
$U(x)$	2997	3000	2997	2988	2973

a) ¿Qué tipo de función es?
b) ¿Cuántos costales nos dan una utilidad máxima? ¿Cuál es esa utilidad?
c) ¿Cuál es la función $U(x)$ que modela la utilidad de venta de cualquier cantidad de costales de harina x?

Situación 1.10: Suponga que deposita en el banco la cantidad de $18,000.00 y le pagan el 2% de interés capitalizable mensualmente:

a) Determine lo que tendrá ahorrado al finalizar el primer mes, el segundo mes y el tercer mes. Exprese las operaciones que le llevaron al resultado, simplificadamente.
b) Exprese una función que represente en general el monto $M(t)$ que obtendrá con el capital C(que es lo que se deposita en el banco) a una tasa de interés i para cualquier tiempo t.
c) La función que modeló ¿Es lineal, cuadrática o exponencial? ¿Por qué?

Situación 1.11: Una empresa que vende computadoras, puede vender 1000 computadoras si el precio es de 12,000 pesos cada una. Pero si el precio lo aumenta a 13,000 pesos se estima que se pueden vender 100 computadoras menos.

a) Identifica las variables dependiente e independiente que intervienen en la situación.
b) ¿La relación entre variables representa una función?
c) Si la demanda es lineal. Determina una función que modele el número de computadoras vendidas en función del precio.

Situación 1.12: Compré un Iphone 5 el año pasado en 14,000 pesos. Después de un año su valor se ha depreciado en un 15%. Si continúa esta tendencia en lo subsecuente:

a) ¿Cuál sería su valor al final de primer año?
b) ¿Cuál sería su valor al final de segundo año?
c) Expresе las operaciones de forma simplificada que permita conocer el valor del celular después de 3 años.
d) Esta situación ¿se modela con una función lineal, cuadrática o exponencial? ¿por qué?
e) Determine la función que modela esta situación para cualquier año y describa su comportamiento.

Situación 1.13: Considerando la situación 1.11

a) ¿Cuál sería el costo del Iphone después de 3 años, si se devaluara un 10%?
b) Compare las gráficas de la devaluación del celular a una tasa de interés del 15% y del 10%, con base en ello explique cómo cambia su valor.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P: Se plantan 3 flores de girasol y al cabo de dos meses se tienen 9 plantas, al término de tres meses se tienen 27 flores y cuando han pasado 4 meses ya se tienen 81 plantas.

a) ¿Será una función exponencial? ¿Por qué?
b) Determine el factor de cambio de esta situación, si lo hay.
c) ¿Cuál será la función que representa esta situación?
d) ¿Cuántas flores de girasol se tendrán pasados los 6 meses?

Situación 1.2P: Suponga que le hicieron un préstamo de $1,000 y le cobran el 4% mensual, ¿cuánto dinero tiene que pagar después de cuatro meses?

a) Elabore una tabla que ilustre los valores cada mes.
b) ¿Cuál es el factor de cambio que identifica cada mes?
c) Encuentre la función que describe esta situación.
d) ¿Cuál es el factor de cambio si el interés del 4% mensual es capitalizable quincenalmente?

Situación 1.3P: En la reserva ecológica de los Tuxtlas, los biólogos estudian las especies de animales en peligro de extinción y en particular determinan que la población de monos araña disminuye a una razón del 30% anual, por pérdida de su habitad y cacería furtiva. Si estiman que la población de monos araña, en las colindancias con la población de Soteapan, es de 300:

a) ¿Será una función exponencial? ¿Por qué?
b) Si es una función exponencial, ¿cuál es el factor de cambio?
c) Determine la función que describe esta situación.
d) Encuentre la gráfica de la función y explique su comportamiento.
e) ¿Cuándo se extinguirá la población de monos araña?

SESIÓN 2: FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Situación 2.1: La maestra de Biología encargó un experimento que consiste en observar el número de bacterias que se forman en una rebanada de melón después de cierto tiempo. Usando un microscopio, los estudiantes observaron la actividad de 1 bacteria, y conforme pasaba el tiempo notaron que para la primera hora había 2 bacterias, para la segunda 4 bacterias, para la tercera 8 bacterias, para la cuarta 16 bacterias y así sucesivamente para las demás horas,

a) Exprese una función que represente el número de bacterias $f(t)$ al final de un número de horas cualquiera "t" e identifique la variable dependiente y la independiente.
b) ¿Qué tipo de función representa esta situación? ¿por qué?
c) En la función $f(t)$ aproxime en qué tiempo hay 128 bacterias.
d) ¿Y 256 bacterias?
e) ¿En qué tiempo hay 180 bacterias? Haga aproximaciones con los valores de "t" de su función $f(t)$ de manera que se vaya acercando a 180.
f) El tiempo "t" encontrado, se puede expresar como $log_2 180 = t$, donde $log_2 180$ significa el logaritmo de base 2 del número 180. Dada la expresión $log_2 180 = t$, explique su relación con la función $f(t)$.
g) En la función que modela el tiempo $log_2 180 = t$ para esta situación identifique la variable dependiente y la independiente. Escriba una función en general que modele el tiempo.
h) Grafica las funciones encontradas en a) y g). Explica las diferencias o similitudes que encuentras.

Definición: El logaritmo de base a de un número real positivo x es n, y se denota por $log_a x = n$ si y sólo si n es el exponente al que debe elevarse la base a para obtener x.

Situación 2.2: Una empresa que distribuye productos de nutrición afilia (inscribe) a Don Roberto para que consuma sus productos, al cual le ofrece que afilie dos personas obteniendo con ello un porcentaje del 2% proporcional de lo que éstas consuman. Pero si cada persona convence a dos personas de afiliarse, a Don Roberto le subirán su porcentaje. Y así sucesivamente irán aumentando las personas afiliadas y con ello las ganancias de Don Roberto, siempre y cuando no se le salga una persona que forma parte de su pirámide de personas afiliadas.

a) Si Don Roberto es el nivel inicial y las dos personas que afilia forman parte del primer nivel de su esquema piramidal ¿Cuántas personas llevará afiliadas en sexto nivel?
b) Los datos que se presentan en el contexto de esta situación ¿determinan una función? ¿de qué tipo: lineal, cuadrática o exponencial? ¿por qué?
c) Exprese la función que represente el número de personas afiliadas $f(n)$ en cualquier nivel del esquema de pirámide "n".
d) ¿En qué nivel Don Roberto espera tener inscritas 512 personas?
e) Determine la función $g(n)$ para que Don Roberto sepa en qué nivel "n" se encuentra su pirámide, sabiendo que ha inscrito a un "x" número de personas.
f) Realice las gráficas de $f(n)$ y $g(n)$. Explique el comportamiento de ambas.

Situación 2.3: Suponga que deposita en el banco la cantidad de $18,000.00 y le pagan el 2% de interés capitalizable mensualmente:

a) ¿En cuánto tiempo tendrá $20,000?
b) ¿Cuál será la función $f(b)$ para encontrar el tiempo que tiene que transcurrir para que obtenga una cantidad deseada (b) puesta en el banco en una cuenta que genera el porcentaje (i) de interés?

COORDINADORES UNIDAD 5:

DR. ALEJANDRO GÓMEZ AGUIRRE

MTRA. ZENAIDA AVILA AGUILAR

UNIDAD 5: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

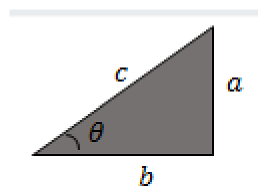
SESIÓN 1: FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA Y USO DE LAS TIC

Situación 1.1: María se sube a la rueda de la fortuna de 30m de altura en Six Flags. Si se sabe que la rueda tarda 4 minutos en dar un giro completo, determina una gráfica que modele la altura de María en el tiempo t, después de 2 giros. ¿Qué tipo de función crees que es?

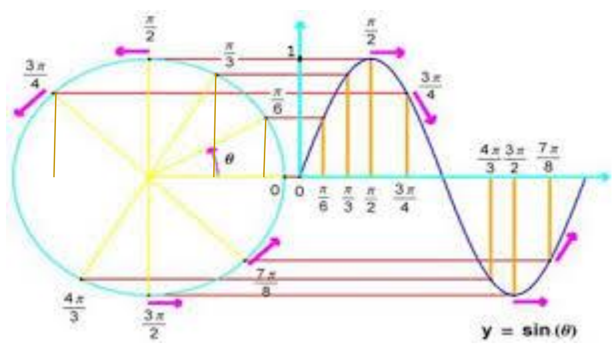
Situación 1.2: Antes de iniciar es importante recordar las siguientes definiciones (también se puede ver el video: https://www.youtube.com/watch?v=aHEXgPU__e4):

Considere el triángulo rectángulo con lados a y b e hipotenusa c. Si θ es el águlo entre la hipotenusa y el lado b se define el siguiente cociente como la función seno:

$$sen\ (\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

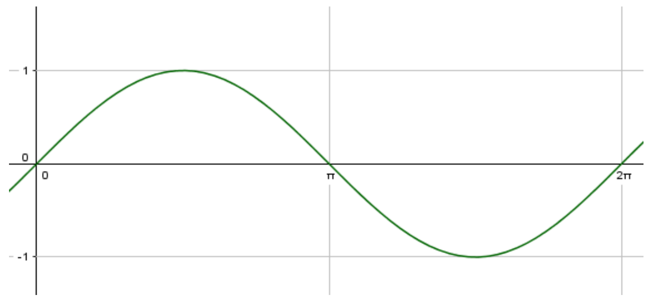


Considere una circunferencia de radio 1 y coloque el triángulo rectángulo con hipotenusa $c = 1$ (es decir, $sen\ (\theta) = \frac{a}{1} = a$). Observe que si aumenta el valor del ángulo θ de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianes, el valor del $sen\ (\theta)$ aumenta de 0 hasta 1:



La longitud del cateto a disminuye hasta llegar a 0 conforme θ avanza de $\frac{\pi}{2}$ a π. Conforme el ángulo θ va de π a $\frac{3\pi}{2}$ la función $sen\ (\theta)$ disminuye de 0 a -1. Finalmente de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π la función aumenta de -1 a 0.

Es decir, la gráfica siguiente es modelada por la función $y = sen\ (\theta)$



Pueden aplicarse diversas operaciones de escala y traslación a la onda y obtener la función senoidal que la modela, por ejemplo:

Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen(x)$
b) $h(x) = 2sen(x)$
c) $g(x) = 5sen(x)$
d) $d(x) = 8sen(x)$

¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = Bsen(x)$, ¿qué movimiento le hace B a la onda? ¿De qué tamaño es el movimiento?

Situación 1.3: Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen(x)$
b) $h(x) = 2 + sen(x)$
c) $g(x) = 5 + sen(x)$
d) $d(x) = -3 + sen(x)$

¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = C + sen(x)$, ¿qué movimiento le hace C a la onda?

Situación 1.4: Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
b) $h(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
c) $g(x) = sen(x - \pi)$
d) $d(x) = sen(x + 5)$

¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = sen(x - D)$, ¿qué movimiento le hace D a la onda?

Situación 1.5: Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen(x)$
b) $h(x) = sen(2x)$

c) $g(x) = sen(4x)$
d) $d(x) = sen(10x)$

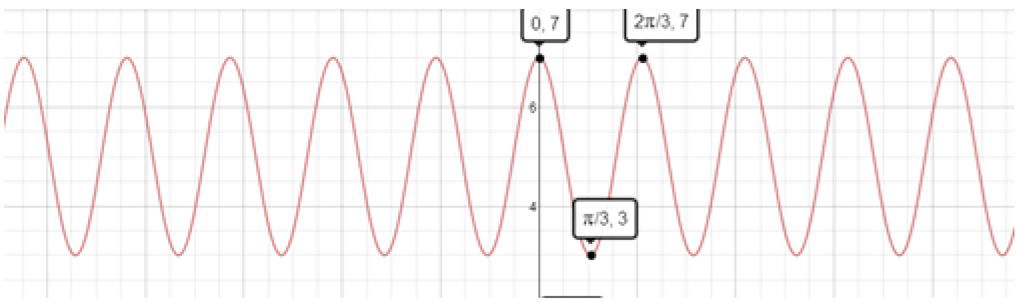
¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = sen(Ax)$, ¿qué movimiento le hace A a la onda? ¿De qué tamaño es el movimiento?

Situación 1.6: Generalizando las situaciones anteriores, explica cómo es la gráfica de

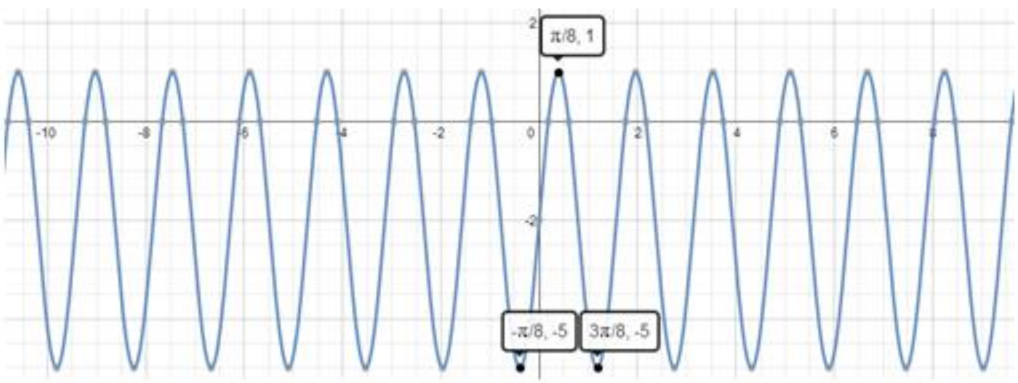
$f(x) = C + Bsen\,A(x - D)$

Situación 1.7: Observa las siguientes gráficas y determina cuál es la función trigonométrica que modela a cada una.

a)



b)



Situación 1.8: La empresa Apple registra la utilidad $\mathrm{U}(x)$ en miles de dólares obtenida por la cantidad x de iPhone5 vendidos en México y los registra en una tabla como sigue:

x	7,000	8,000	9,000	10,000	11,000	12,000	13,000
$\mathrm{U}(x)$	\$41,000	\$46,000	\$49,000	\$50,000	\$49,000	\$46,000	\$41,000

Determina la función $\mathrm{U}(x)$ que modela la utilidad de cualquier cantidad x de iPhone5 vendidos

Situación 1.9[3]**:** La temperatura media en grados Fahrenheit en cada mes en la ciudad de Xalapa a través de un tiempo de 30 años 1983-2013 es la siguiente

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
48.9	51.8	59.2	66.0	73.5	79.1	81.8	81.0	76.6	67.3	59.1	51.7

Si se etiqueta a Enero como x=0, Febrero como x=1, así sucesivamente, este modelo de la temperatura media mensual puede ser ajustado con una curva senoidal. Localiza los puntos en Desmos.

a) ¿De qué tamaño es el periodo? ¿Cuál es valor de A?
b) ¿Cómo obtienes C? ¿Cuál es el valor?
c) ¿Cómo obtienes B? ¿Cuál es su valor?
d) ¿Cómo obtienes D? ¿Cuál es su valor?
e) De lo anterior ¿cuál es la función que modela temperatura media mensual de Xalapa?
f) Determina la función que permite obtener los meses x del año en los que se tiene cierta temperatura promedio

Situación 1.10: Use la función exponencial para hallar x.

a) $\log_4 1024 = x$

b) $\log_x 8 = \frac{4}{3}$

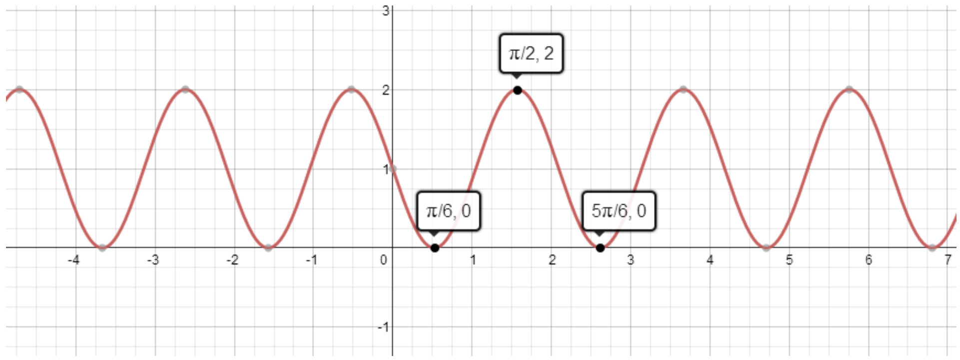
Situación 1.11: Carlos quiere hacer una inversión y el banco le da una tabla que contiene la cantidad invertida y el monto que obtiene con un interés simple anual. Observa qué tipo de función modela la tabla y determina cuál es esa función.

inversión	1000	3000	10000	25000
Monto obtenido	1012	3036	10120	25300

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P: Observa la siguiente gráfica y determina cuál es la función trigonométrica que la modela.

[3] Situación tomada y adaptada del libro ***Implementing the Common Core State Standards through Mathematical Problem Solving*** *de la NCTM p.32*



Situación 1.2P: Dibuja la gráfica de cada función trigonométrica dada (sin usar Desmos).

a) $2sen(x+3)$
b) $6+\ sen\ 3(x-2)$

Situación 1.3P: El 19 de septiembre de 1985 se produjo un sismo en México que causó gran destrucción en el país, especialmente en el DF. La UNAM ha trabajado intensamente en el estudio de este lamentable fenómeno, según datos de expertos se presentó un movimiento prácticamente armónico de 2 segundos de periodo y una duración aproximada de 2 minutos, durante este tiempo la magnitud del terremoto estuvo oscilando entre 7.8 y 8.2 grados de la escala de Richter. ¿Cuál es la función que modela el comportamiento del terremoto? Dibújalo.

COORDINADORES UNIDAD 6:

DR. ALEJANDRO GÓMEZ AGUIRRE

MTRA. ZENAIDA AVILA AGUILAR

LIC. NERY ROMERO GASPERIN

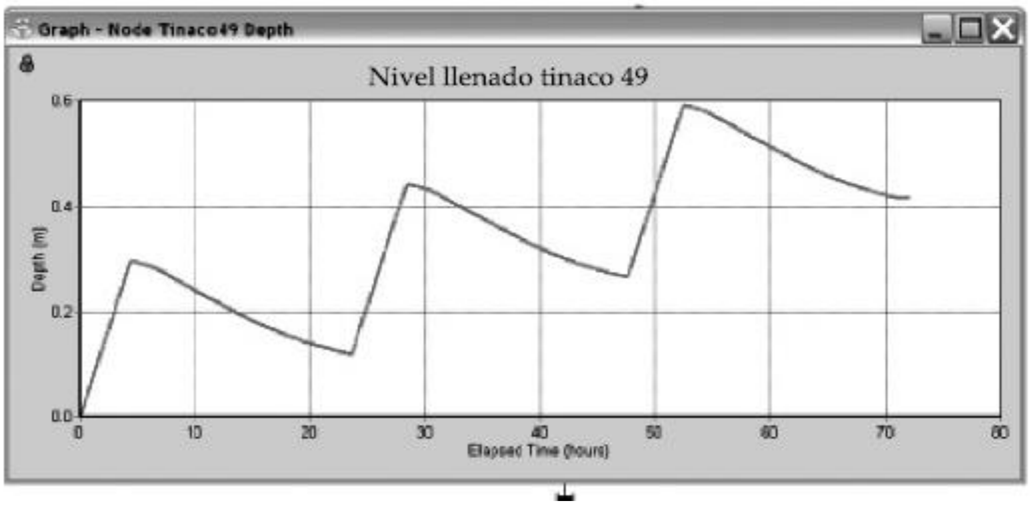
COLABORADORES UNIDAD 6:

Yuliana Esmeralda Morales Rosado

UNIDAD 6: RAZÓN DE CAMBIO A DERIVADA

SESIÓN 1: NECESIDAD DE LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

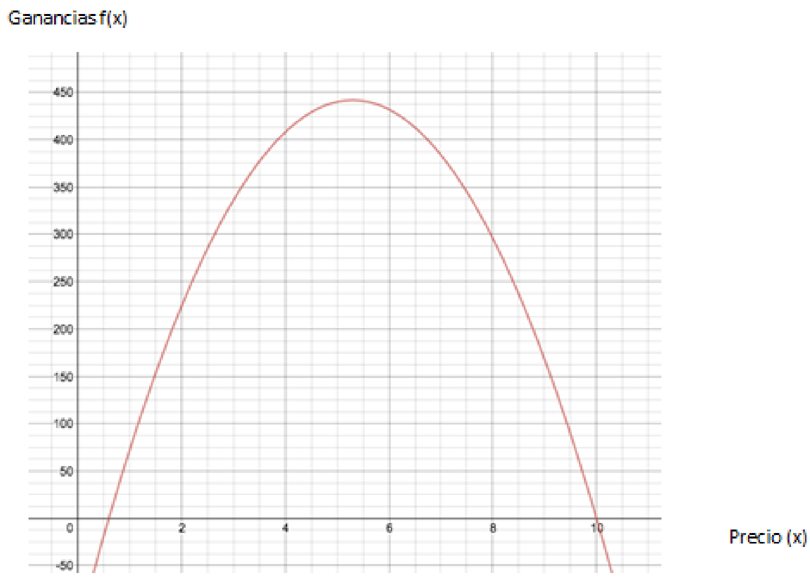
Situación 1.1 En la gráfica se muestra el modelo de la evolución de nivel de agua (metros) de un tinaco de una casa habitación en un transcurso de 72 horas.



Fuente: Artículo ***Modelación de redes de distribución de agua con suministro intermitente***.
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2007-24222012000200001&script=sci_arttext

a) Con base en la gráfica ¿qué puede conjeturar acerca del llenado de agua del tinaco?
b) ¿Cuál es la razón de cambio promedio (variación) por hora del nivel del tinaco en un periodo de 0 a 40 horas? ¿Qué interpretación le das?
c) ¿La razón de cambio promedio (variación) por hora describe el comportamiento de la gráfica?

Situación 1.2 La siguiente gráfica muestra las ganancias de la venta de un artículo que tiene variaciones de su precio en un mes, suponiendo que lo tiene en stock por lo que su costo de producción es el mismo.



a) ¿Qué interpretación le das a la gráfica?
b) ¿Cómo es la variación (razón de cambio) promedio de las ganancias entre cualquier par de precios hasta los $5.00?
c) ¿Cómo es la variación (razón de cambio) promedio de las ganancias entre cualquier par de precios de los $6.00 a los $10.00?
d) ¿Cómo crees que debe ser la variación (razón de cambio) promedio de las ganancias cuando se tiene el precio en el que las ganancias son máximas?

Situación 1.3 La siguiente tabla representa el precio del dólar el 16 de febrero de cada año en el periodo 2009 al 2015

Año	Precio del dólar
2009	14.4326
2010	12.9420
2011	12.1140
2012	12.7658
2013	12.6982
2014	13.3320
2015	14.8605

Fuente: www.sat.gob.mx

a) Determina la variación (razón de cambio) anual del dólar y regístralo en una tabla.
b) ¿Cuál es la variación anual del dólar del día 16 de febrero del 2011?
c) Cuál es la variación mensual de esa fecha si se sabe que el precio del dólar fue:

Fecha	Precio del dólar
16 de enero	12.1028
16 de febrero	12.1140
16 de marzo	12.0171

Fuente: www.sat.gob.mx

d) Cuál es la variación del día 16 de febrero de 2011 si se sabe que el precio del dólar fue:

Fecha	Precio del dólar
15 de febrero	12.0461
16 de febrero	12.1140
17 de febrero	12.0957

Fuente: www.sat.gob.mx

Situación 1.4 Un auto recorre las siguientes distancias en los tiempos que se señalan en la tabla:

Ciudad	Tiempo desde el punto inicial	Distancia del punto inicial
Inicio	0 horas	0 km
A	1 hora	50 km
B	1.5 horas	100 km
C	1.8846 horas	150 km

a) Realiza la gráfica de la distancia que recorre el auto de acuerdo al tiempo que tarda.
b) ¿Cuál es la distancia que existe entre el inicio y la ciudad A, entre la ciudad A y B, y entre la ciudad B y C? ¿Qué tiempo tardo en hacer esos recorridos? ¿Qué quiere decir?
c) ¿Cuál es la velocidad promedio (también es una razón de cambio promedio) que llevaba el auto en todo el recorrido (del inicio a la ciudad C)? ¿Qué significa en la gráfica esta velocidad promedio?
d) ¿La velocidad obtenida describe la velocidad a la que iba el auto en cualquier punto de su recorrido?
e) Si obtenemos la velocidad promedio que llevaba el auto de una ciudad a otra ¿sí describe la velocidad a la que transitó el auto en cualquier punto? ¿Qué representan estas velocidades en la gráfica?
f) ¿Puedo obtener la velocidad a la que paso el auto en el punto de la ciudad A (velocidad instantánea)? ¿qué necesito?
g) Si se sabe el tiempo al que pasó el auto en las siguientes distancias:

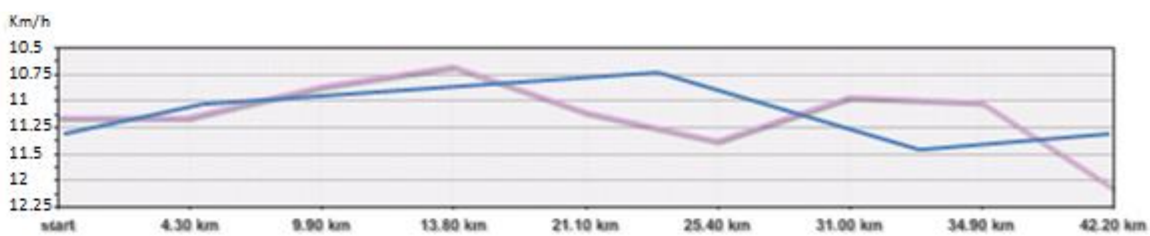
Distancia	Tiempo
47.5248117	0.97
48.343170960	0.98
49.168233740	0.99
49.583278935	0.995
49.749766257	0.997

49.916521717	0.999
49.958252479	0.9995
49.991649155	0.9999
49.999164885	0.99999
49.999916488	0.999999
49.999991649	0.9999999
49.999999165	0.99999999

¿Puedo calcular la velocidad instantánea (razón de cambio instantánea) a la que pasó el auto por el punto de la ciudad A (1, 50)? ¿Cuál es? ¿Qué representaría en la gráfica estas velocidades?

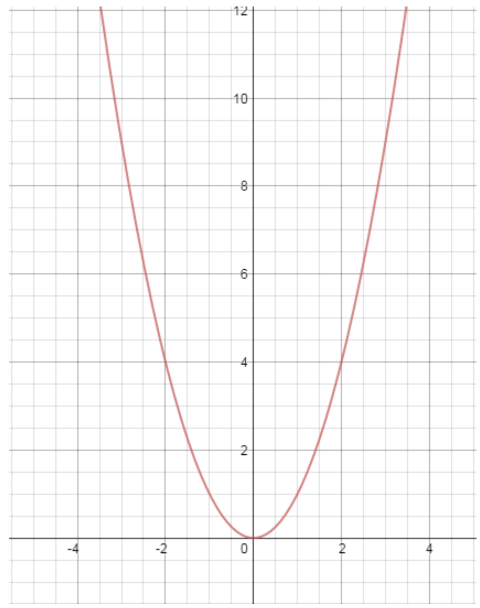
Situación 1.5 Dos amigos (A y B) usan sus relojes con GPS para registrar la velocidad a la que corren. Ambos van a correr un maratón. Inician y llegan juntos a la meta en un tiempo de 3 hrs y 45 minutos. Si un maratón tiene 42.2 km:

a) ¿Cuál es la velocidad promedio de los corredores?
b) ¿Se puede determinar cuál de las siguientes gráficas obtenida por los relojes pertenece al corredor A y cuál al B?



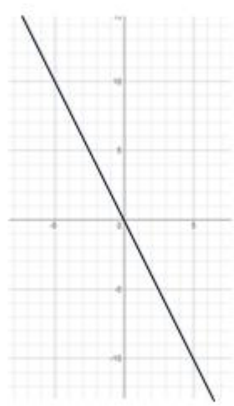
c) De no ser así, ¿qué necesito?

Situación 1.6 Analiza los valores de las razones de cambio instantáneas en cualquier punto de la gráfica (pendientes de las rectas tangentes en los puntos)

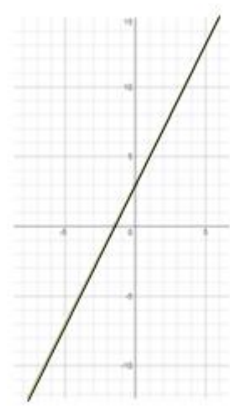


a) ¿Qué pasa con la razón de cambio instantánea en cero (pendiente de la tangente)? ¿En números positivos? ¿En números negativos?
b) Determina cuál de las siguientes gráficas representa su función de las razones de cambio instantáneas.

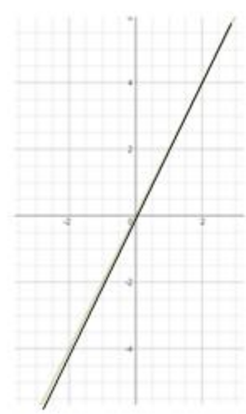
a)



b)



c)



PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P[4] Una compañía, a través de sus fábricas, libera en la atmósfera toneladas de una sustancia química para combatir el "smog". La cantidad de toneladas de sustancia química liberada se registra diariamente, durante un período de 18 horas, obteniendo la siguiente tabla:

Tiempo t (hrs)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Número de toneladas f(t)	0	4.8	11.2	19.2	28.8	40	52.8	67.2	83.2	100.8

a) ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancia química desde que se empieza a liberar hasta 2 horas después?

b) ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancia química desde que se empieza a liberar hasta 6 horas después?

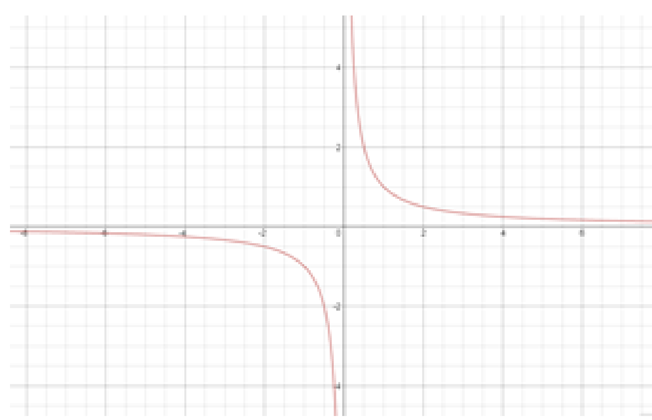
c) ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancia química entre las 12 y las 14 horas?

d) Cuál es la liberación de cambio instantánea de toneladas de sustancia química exactamente 8 horas después, si se cuenta con la siguiente tabla:

Tiempo t (hrs)	7.5	7.75	7.8	7.9	8	8.1	8.2	8.25	8.5
Número de toneladas f(t)	26.25	27.51	27.76	28.28	28.8	29.32	29.84	30.11	31.45

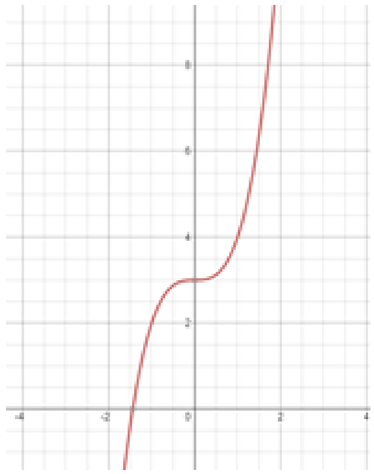
Situación 1.2P. Relaciona cada función con su función derivada y explica por qué.

a)

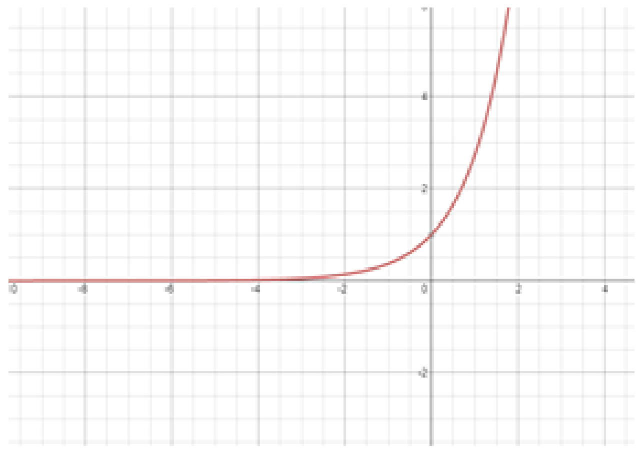


[4] Basada en: http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/razon%20de%20cambio-cb.pdf

b)

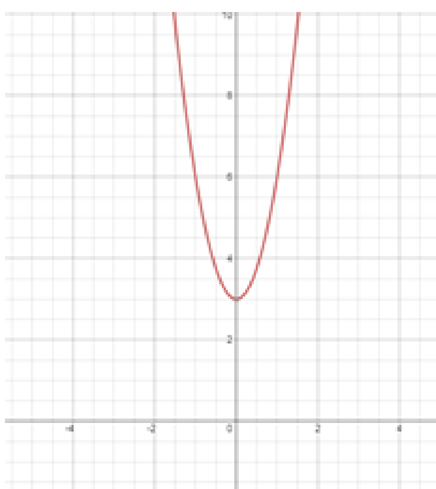


c)

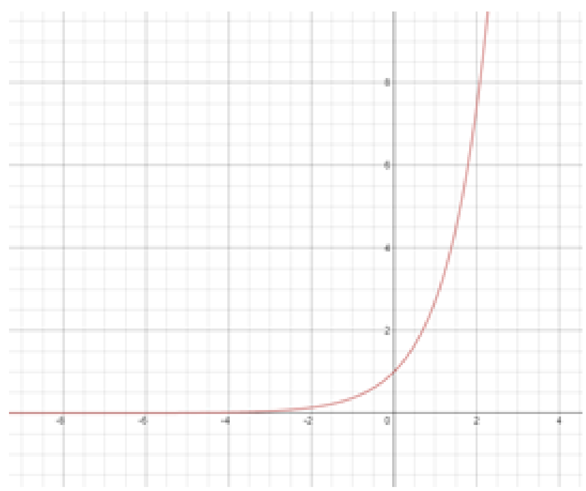


Función derivada:

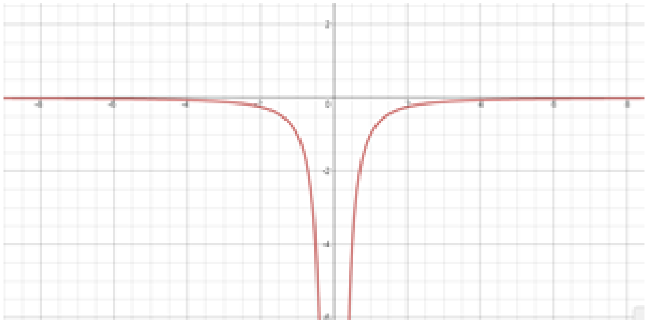
1)



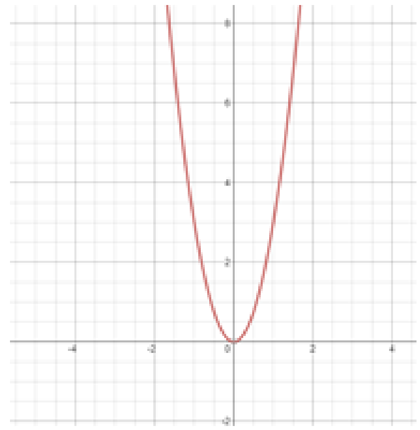
2)



3)



4)

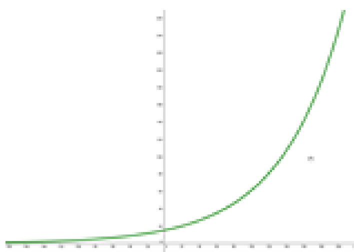


SESIÓN 2: DERIVADA EN UN PUNTO, MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

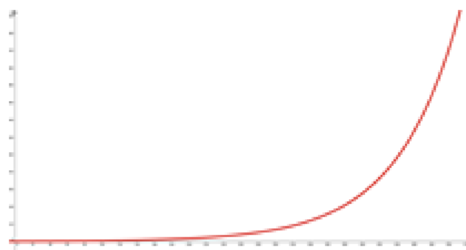
Situación 2.1 La tasa de crecimiento de la población del Estado de México para el 2010 es de 1.4, según cifras oficiales del INEGI, ocupa el primer lugar en los estados más poblados del país, seguido del Distrito Federal y Veracruz.

a) Si en el año 2010 la población es de 15 175 862 ¿cuál es la expresión algebraica que modela el crecimiento de la población para los siguientes años?
b) ¿Cuál será la población para el año 2011?
c) ¿Con qué rapidez crece la población en el año 2011?
d) Determine cuál es la gráfica de la función que representa rapidez con que crece la población en cualquier año.

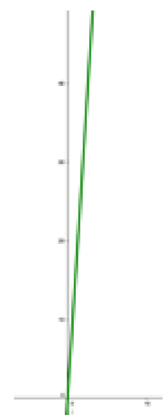
a)



b)



c)



Situación 2.2 Una pequeña empresa veracruzana que elabora dulces artesanales llamados "jamoncillos", tiene costos diarios en pesos determinados por la expresión $c(n) = 200 + 0.13n^2$ donde n es la cantidad de dulces producidos.

a) Si se producen 10 dulces ¿cuál es el costo promedio por dulce?
b) ¿Cuál es el costo promedio por dulce de producir 11 dulces con respecto a 10? ¿Qué significa gráficamente?
c) Encuentre la variación del costo total con respecto a 10 unidades (costo marginal).
d) ¿Porque es importante para la pequeña empresa saber la variación de sus costos cuando aumenta la producción?

Situación 2.3 Una persona que inicialmente pesaba 58 kg sube un kilo por mes, al año asiste a su médico para comenzar una dieta que le permita recuperar su peso. El nutriólogo le explica que debe bajar un kilo por mes, para evitar descompensaciones.

a) De seguir con esta tendencia elabore una gráfica que modele esta situación
b) Explique lo que sucede en la gráfica cuando se llega a un año

c) ¿Cómo es la derivada o pendiente de la recta tangente de la función cuando la persona aumenta de peso?
d) ¿Cómo es la derivada o pendiente de la recta tangente de la función cuando la persona pierde peso?
e) Explique lo que sucede con la derivada cuando se llega a un año y realice la gráfica.

Situación 2.4 Una pelota es lanzada hacia arriba y después de t segundos la pelota tendrá una altura de $f(t) = -16t^2 + 80t$, grafica su trayectoria.

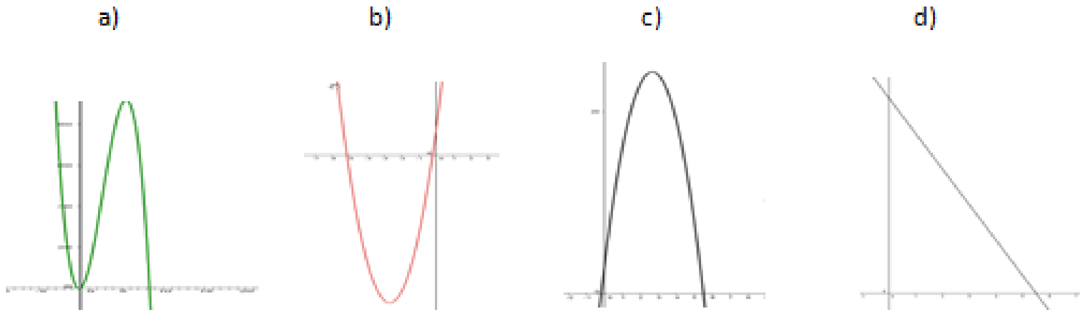
a) ¿A qué velocidad va la pelota a los 2 segundos?
b) Si quiero saber la altura máxima de la pelota, ¿cuál debe ser el valor de la velocidad o razón de cambio instantánea en ese punto?
c) ¿En qué segundo la pelota alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?

Situación 2.5 En un laboratorio se hace una prueba para determinar el metabolismo del azúcar en la sangre, en un tiempo de 4 horas, cuyo comportamiento está determinado por la función $c(t) = 12 + 9t - 3t^2$

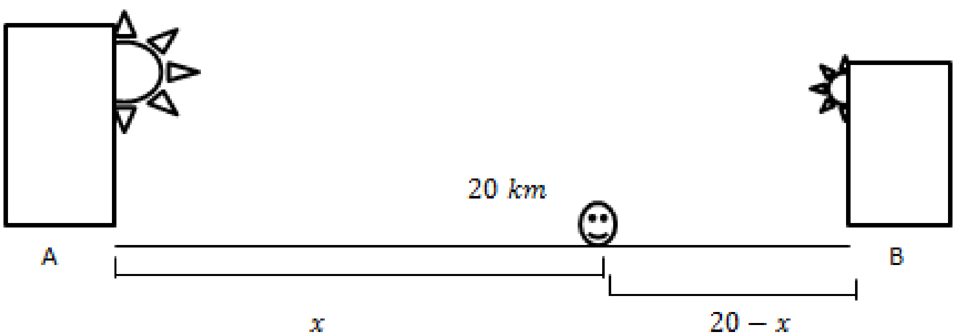
a) Determine en qué tiempo se tiene la mayor concentración de azúcar en la sangre y el valor de esa concentración.
b) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio de la concentración del azúcar en ese punto? ¿Porqué?
c) Encuentre la variación del azúcar en la sangre en el instante de 1 y 2 horas. Explique lo que significa.

Situación 2.6 Un bibliotecario con un horario de trabajo de 8:00 a 15:00 horas, clasifica y número de libros en x número de horas, su productividad está determinada mediante la ecuación $y = 3x + 8x^2 - x^3$.

a) Determine la velocidad a la que el bibliotecario está acomodando libros a las 11 de la mañana y los libros que lleva acomodados hasta esa hora.
b) ¿En qué tiempo acomodó el máximo número de libros? ¿a qué hora fue? y ¿qué sucede después?
c) ¿Cuál es la gráfica de la velocidad con la que el bibliotecario acomoda los libros?



Situación 2.7 Una persona se encuentra ubicada entre dos ciudades A y B, situadas a 20km una de la otra. Cada ciudad tiene una lámpara que ilumina a la otra con diferente intensidad y la persona busca donde debe ubicarse para tener la menor iluminación (como se muestra en la imagen).



Si la función que modela la iluminación en cualquier posición x es:

$$f(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(20-x)^2}$$

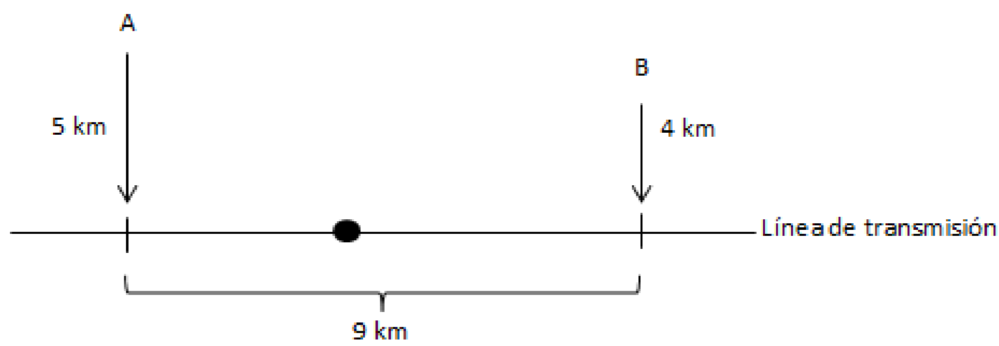
a) Analiza la función y la imagen, ¿qué pasa con $x < 0, x = 0, 0 < x < 20, x = 20, x > 20$?
b) ¿En dónde debe situarse la persona para tener la menor iluminación?

Situación 2.8 Analiza los puntos singulares (donde $f' = 0$) de la función $f(x) = x^3(x-2)$ y determina si son mínimos o máximos

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 2.1P Don Manuel tiene algunas hectáreas de terrenos y les regalará a sus hijos una parte, de tal manera que el más astuto tendrá una mayor área de terreno. Todos tienen 100 metros de alambre para que cerquen su terreno con la condición de que éste sea rectangular. Si fueras un hijo de don Manuel, ¿cuáles serían las medidas de tu terreno para tener un área máxima?

Situación 2.2P Se quiere poner un poste sobre una línea de transmisión para colocar un cable que vaya del poste a la ciudad A y otro del poste a la ciudad B. La ciudad A se encuentra a 5 km del punto más cercano a la línea de trasmisión y la ciudad B se encuentra a 4 km. Si la distancia entre estos dos puntos sobre la línea es 9 km. ¿Dónde debe colocarse el poste de manera que se use la mínima cantidad de cable? ¿Cuál es esa cantidad?



Universidad Veracruzana