



## SIMULACIÓN DINÁMICA DE PUENTES AGRIETADOS

Rolando Salgado Estrada<sup>1</sup>, Jesús M. Santamaría López<sup>1</sup> y A. Gustavo Ayala Milián<sup>2</sup>

### RESUMEN

En este trabajo, se realiza la evaluación de tres métodos para la obtención del comportamiento dinámico de estructuras agrietadas. Estos métodos presentan diferencias notables en cuanto a simplicidad, exactitud y aplicabilidad. Por lo cual se evalúa su eficiencia para la detección de escenarios de daño simulados en puentes de sección compuesta (vigas de acero losa de concreto). Los resultados indican claramente la sensibilidad que tienen los métodos analizados a pequeños cambios en la respuesta dinámica simulada. Este efecto puede provocar que no se detecte el daño cuando existe en el puente o causar una falsa detección cuando éste no existe.

### ABSTRACT

In this paper, the performance evaluation of three dynamic simulation methods for cracked beams is carried out. These methods have large variations related to their simplicity, accuracy and applicability. Subsequently, the efficiency of these methods is evaluated for the detection of simulated damage scenarios in composite concrete-steel bridges. Results clearly indicate the sensitivity of the evaluated methods to small changes in the simulated dynamic response. This fact may lead to no damage detection, when it is present in the bridge, or false detection, when it does not exist.

### INTRODUCCIÓN

Es de todos bien conocido que el daño estructural causa cambios en los parámetros dinámicos de las estructuras. Basados en esto, desde finales del Siglo XX se han propuesto innumerables métodos para detectar, localizar y cuantificar daño en estructuras existentes. Desafortunadamente, estos métodos no se encuentran totalmente desarrollados y no existe un método de detección de daño que pueda aplicarse a todas las condiciones de daño existente. En esta perspectiva, se considera que el desarrollo de métodos para la simulación dinámica de puentes agrietados puede ayudar a validar los métodos de detección de daño.

Tradicionalmente, la simulación de daño en modelos estructurales se ha realizado por medio de modelos matemáticos. La presencia de una grieta en un elemento estructural introduce un cambio de flexibilidad cerca de la punta de la grieta. Uno de los primeros métodos que fue considerado como un importante paso en el desarrollo de métodos para la simulación dinámica de vigas agrietadas fue el propuesto por Christides y Barr (1984). Para ello, utilizando el principio variacional de Hu-Washizu, derivaron las ecuaciones diferenciales de equilibrio en conjunto con sus condiciones de frontera de una viga Euler-Bernoulli de sección transversal uniforme teniendo uno o más pares de grietas simétricas. Basados en este método, Chondros *et al.* (1998) propusieron un método más robusto empleando para ello la teoría de la Mecánica de la Fractura. Un procedimiento muy utilizado para determinar la respuesta de estructuras agrietadas consiste en dividir el elemento tantas veces como grietas existan las cuales se representan por medio de un resorte rotacional sin masa (Shifrin y Ruotolo, 1999). A la par de estas dos propuestas, se han también desarrollado procedimientos basados en Método de los Elemento Finito (MEF). Estos métodos tratan de calcular la matriz de rigideces de los elementos agrietados. En esta categoría se encuentra el procedimiento propuesto por Zheng y

---

1 Profesor, Facultad de Ingeniería, Universidad Veracruzana, Blvd. A. Ruiz Cortines no. 455, Fracc. Costa Verde, Boca del Río, Veracruz. Tel.: (229) 775-2000; [rosalgado@uv.mx](mailto:rosalgado@uv.mx) y [jsantamaria@uv.mx](mailto:jsantamaria@uv.mx)

2 Profesor, Instituto de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, D.F. Tel.: (55) 5623-3508; [GAyalaM@iingen.unam.mx](mailto:GAyalaM@iingen.unam.mx)

Kessissoglou (2004) el cual trata de determinar la matriz de rigideces del elemento agrietado a partir de los factores de intensidad de esfuerzo y de su matriz de flexibilidades. A pesar de que existen innumerables métodos para calcular la respuesta dinámica de elementos agrietados (Dimarogonas, 1996) su aplicación a estructuras complejas tales como puentes o edificios es todavía un tema pendiente de estudiar.

En este estudio fueron seleccionados tres métodos para la determinación de la respuesta dinámica de un puente de sección compuesta. Estos métodos fueron comparados para determinar su exactitud y facilidad de implementación. Los métodos seleccionados fueron: a) Método de Christides y Barr modificado basado en el principio variacional de Hu-Washizu, b) Método de Shifrin y Ruotolo basado en la introducción de resortes rotacionales sin masa para representar las grietas, y c) Método de Zheng y Kessissoglou basado en el MEF.

### DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS SELECCIONADOS

La evaluación de los métodos seleccionados se realizó, en una fase preliminar, por medio de vigas con grietas verticales siempre abiertas con profundidad uniforme a lo largo de toda la sección transversal. Para lo cual se definieron 3 grados de libertad por nudo (ver fig 1) considerando que las grietas no alterarían la masa inicial del elemento.

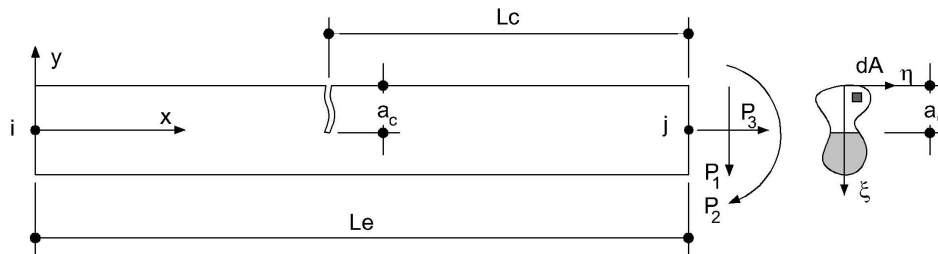


Figura 1 Variables consideradas para el elemento agrietado adoptado

### MÉTODO DE CHRISTIDES Y BARR MODIFICADO

Este Método, basado en la solución analítica de la viga Euler-Bernoulli, introduce el efecto causado por una grieta mediante una modificación en la flexibilidad local del elemento en la vecindad de la grieta. Este procedimiento fue posteriormente modificado por Salgado (2008) para determinar la flexibilidad en forma más sencilla para su implementación en un programa de computadora. En este método, no se consideraron posibles cambios en la posición del eje neutro del elemento causados por las grietas. El efecto local de las grietas sobre la rigidez a flexión del elemento,  $EI$ , (Christides y Barr, 1984) está dado por:

$$EI(x) = \frac{EI_o}{1 + C \exp(-2\alpha |x - x_j| / d)} \quad (1)$$

donde  $C = (I_o - I_{cj}) / I_{cj}$ ,  $I_o$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga sin daño,  $I_{cj}$  es el momento de inercia de la sección transversal en la localización de la  $j$ -ésima grieta,  $d$  es el peralte de la viga,  $E$  es el modulo de Young,  $\alpha$  es un coeficiente obtenido experimentalmente cuyo valor fue establecido en 2.267 al comparar las frecuencias obtenidas mediante este método con aquellas determinadas experimentalmente por Chondros *et al.* (1998) en vigas agrietadas.

De acuerdo a Salgado (2008), si los elementos son lo suficientemente pequeños, se puede considerar sin pérdida de exactitud, que la rigidez a flexión,  $EI$ , en la zona cercana a la grieta tiene una variación lineal. Como resultado, la matriz de rigideces del elemento  $[Ke]$  se puede expresar como:



$$[K_e]_i = \frac{EI_1}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ \text{simétrica} & & 12 & -6L_e \\ & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} + \frac{Em}{L_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 2L_e & -6 & 4L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ \text{simétrica} & & 6 & -4L_e \\ & & & 3L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde  $EI_1$  es la rigidez a flexión determinada con la ec 1 para el primer nodo del elemento;  $L_e$  es la longitud del elemento;  $i$  es el elemento a ser evaluado y  $m$  representa la diferencia entre la rigidez a flexión entre el primer y segundo nodo del elemento.

### MÉTODO DE SHIFRIN Y RUOTOLO

En este método, los parámetros modales se determinan usando resortes rotacionales sin masa para simular la presencia de las grietas. Este método conduce a un sistema de  $n+2$  ecuaciones lineales para una viga con  $n$  grietas, menor en orden, que otros métodos similares. En consecuencia se tiene un decremento considerable en el tiempo computacional requerido para encontrar los parámetros modales.

Este método determina los parámetros modales del elemento agrietado introduciendo, entre dos elementos, las condiciones necesarias para garantizar la continuidad de desplazamientos, momento flexionante y fuerza cortante. También se toma en cuenta la discontinuidad de la rotación en las zonas cercanas a las grietas. Esta condición es necesaria para garantizar el equilibrio entre la transmisión del momento flexionante y la rotación del resorte simulando la grieta. Tomando en cuenta estas hipótesis, la solución al problema es obtenida mediante las ecs. 3 y 4:

$$y_0(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + C \cosh(\lambda x) + D \sinh(\lambda x) + \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^n \Delta_j \int_0^x (\sinh(\lambda(x-s)) - \sin(\lambda(x-s))) |s - x_j| ds \quad (3)$$

$$\Delta_i = -Ac_i \lambda^2 \cos(\lambda x_i) - Bc_i \lambda^2 \sin(\lambda x_i) + Cc_i \lambda^2 \cosh(\lambda x_i) + Dc_i \lambda^2 \sinh(\lambda x_i) + \frac{c_i \lambda^3}{4} \sum_{j=1}^n \Delta_j M_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son coeficientes a determinar;  $n$  es el número de grietas;  $x$  es la distancia medida desde el extremo izquierdo de la viga,  $y$  es la amplitud de la viga medida desde la posición  $x$ ;  $y'$  y  $y''$  son la primera y segunda derivada de  $y$  respecto a la distancia  $x$ , en ese orden. Las otras variables se definen como:

$$\lambda^4 = \omega^2 \rho S / (EI) \quad (5)$$

$$y'_{j+1}(x_j) - y'_j(x_j) = \Delta_j = c_j y''_j(x_j) \quad (6)$$

$$M_{ij}(\lambda) = \int_0^{x_i} (\sinh(\lambda(x_i - s)) + \sin(\lambda(x_i - s))) |s - x_j| ds \quad (7)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia circular,  $S$  es el área de la sección transversal,  $\rho$  es la masa por densidad de volumen de la viga y  $s$  es una variable de transformación.

La solución del sistema lineal de  $n+4$  ecuaciones formado por la ec 4 para  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $\Delta_j$  necesita, para su solución, de la introducción de 4 ecuaciones adicionales, las cuales se obtienen de las condiciones de frontera (apoyos) de la viga analizada, esto es, ec 3 para  $y_0(x=0, L)$  y su segunda derivada  $y_0''(x=0, L)$  para una viga simplemente apoyada; y  $y_0(x=0, L)$  y su primera derivada  $y_0'(x=0, L)$  en el caso de una viga doblemente empotrada. Finalmente, las frecuencias de vibración de la viga agrietada se determinan de las raíces del

polinomio ( $\lambda_{1, \dots, \text{modos}}$ ) resultante del determinante del sistema lineal de ecuaciones  $U$  (cuatro ecuaciones resultantes de la ec 3 más  $n$  ecuaciones de la ec 4) igualado a cero, es decir:

$$\det([U(\lambda)]) = 0 \quad (8)$$

### MÉTODO DE ZHENG Y KESSISSOGLU

Zheng y Kessissoglou fueron de los primeros en considerar el efecto causado en la rigidez de la viga agrietada la distancia entre la localización de la grieta y el nudo extremo derecho del elemento. Esta distancia no se consideró en métodos anteriores basados en el MEF lo cual condujo a resultados menos precisos. Para tomar en cuenta este problema adicionaron una matriz de flexibilidades total  $C_{ovl}$  a la matriz de flexibilidades tradicional  $C_{int}$  como indicado en la ec 9:

$$C_{tot} = C_{int} + C_{ovl} = \begin{bmatrix} \frac{L_e}{EA} + c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{21} & \frac{L_e^3}{3EI} + c_{22} & \frac{L_e^2}{2EI} + c_{23} \\ -c_{31} & \frac{L_e^2}{2EI} + c_{32} & \frac{L_e}{EI} + c_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

los elementos de la matriz de flexibilidades total  $c_{ij}$  se determinan de:

$$c_{ij} = \int_{A_c} \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial P_j} dA; \quad G = \frac{I}{E} [(K_{I1} + K_{I2} + K_{I3})^2 + K_{II2}^2]; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

donde  $K_{I1}$ ,  $K_{I2}$ ,  $K_{I3}$  y  $K_{II2}$  son los Factores de Intensidad de Esfuerzo (FIE) de la sección transversal uniforme de la viga para los modos fundamentales de fractura I y II,  $A_c$  es el área de la sección transversal en la localización de la grieta, y  $P_i$  y  $P_j$  son las fuerzas en el nodo derecho del extremo agrietado, tal y como se muestra en la fig 1.

Uno de los inconvenientes que presentaba este método, radicaba en la obtención de los FIE para diferentes secciones transversales comunes en estructuras civiles. Tales FIE pueden determinarse sin la necesidad de experimentación o programas avanzados del MEF mediante el método propuesto por Ricci y Viola (2006). Una vez determinados los FIE, la matriz de rigideces del elemento agrietado  $K_c$  se obtiene como sigue:

$$K_c = LC_{tot}^{-1}L^T \quad L^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L_e & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde el superíndice  $T$  indica la transpuesta de la matriz.

Finalmente las frecuencias de vibración de la viga se determinan usando cualquier procedimiento para la obtención de eigenvalores los cuales requieren la determinación de la matriz de masa la cual se obtiene directamente del modelo numérico. Para calcular las correspondientes formas modales, Zheng y Kessissoglou propusieron funciones de interpolación que cumplieran con las condiciones de frontera en la localización de las grietas.

### CONDICIONES ADOPTADAS PARA LA EVALUACIÓN DE LOS MÉTODOS

Las vigas consideradas para la evaluación de los métodos analizados tienen una sección rectangular con dimensiones tales que su primera frecuencia de vibración se encuentre entre los 2 y los 10 Hz. En este rango caen la mayoría de los puentes con claros menores a los 100 m. Se consideraron vigas de 10 m de claro con



dos diferentes condiciones de frontera, simplemente apoyadas y doblemente empotradas. Las vigas se analizaron bajo dos tipos de materiales, acero y concreto con módulos de Young de  $2.5 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup> y  $2.1 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup>, respectivamente. La fracción de amortiguamiento crítico para todas las vigas fue del 2 %. Se evaluaron dos diferentes casos de daño. En el primero se simuló la aparición de una grieta al centro del claro de la viga, con una profundidad de  $\frac{1}{4}$  del peralte total para secciones de concreto y otras con  $\frac{1}{2}$  del peralte total para secciones de acero. En el segundo caso, se simuló la aparición de cuatro grietas adicionales colocadas equidistantemente a una distancia de 0.5 m desde el centro del claro. Todas las grietas tenían una profundidad de  $\frac{1}{7}$  del peralte total para secciones de concreto y  $\frac{2}{7}$  del peralte total para secciones de acero. Las propiedades geométricas de las vigas, la localización de las grietas a lo largo de su longitud y sus condiciones de frontera se muestran en la fig 2.

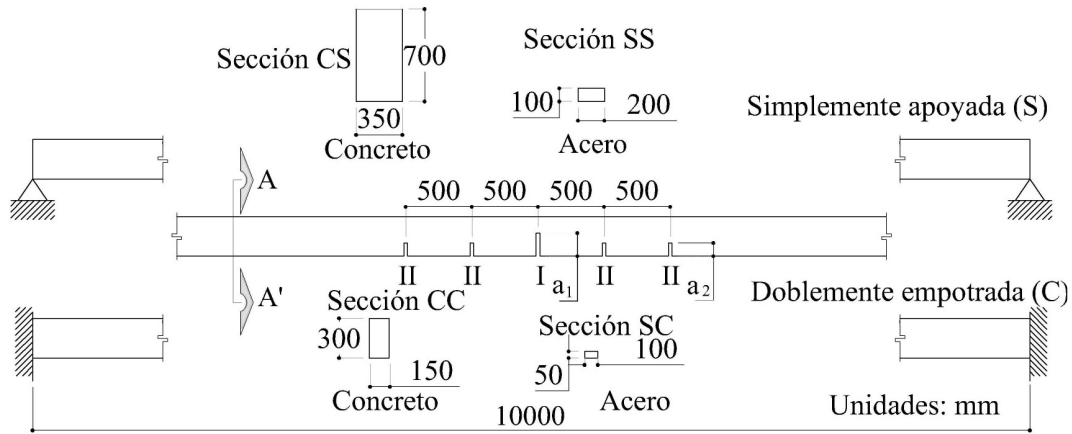


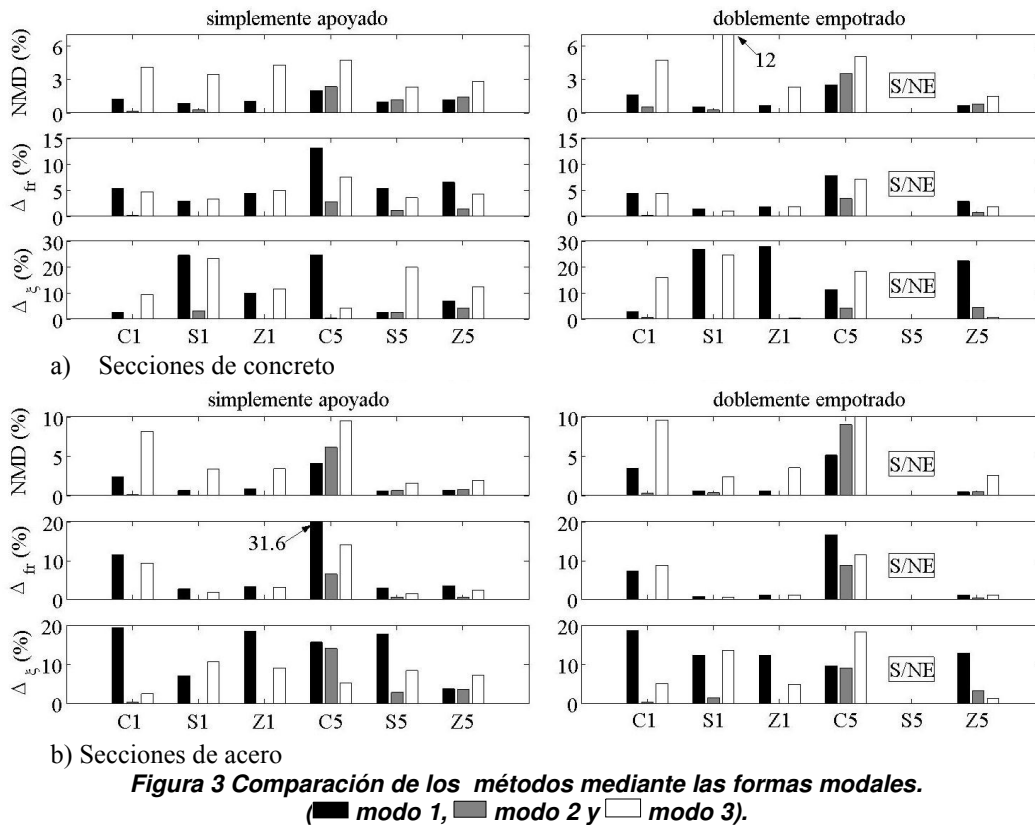
Figura 2 Variables consideradas para el elemento agrietado adoptado

La respuesta dinámica de las vigas agrietadas se determina empleando el algoritmo propuesto por Wilson, (2002). Las frecuencias de muestreo y los tiempos de adquisición fueron establecidos a fin de determinar con exactitud, las 3 primeras frecuencias de vibración. Las vigas analizadas fueron divididas en 20 elementos. La fuerza excitadora se consideró actuando en dirección vertical (sentido de la gravedad), dentro de una magnitud predefinida y cambiando de posición aleatoriamente a cada paso de la frecuencia de muestreo. Con este procedimiento se trata de simular el caso de vibraciones ambientales durante la adquisición de la respuesta dinámica en el cual la fuerza excitadora no fue considerada durante el proceso de identificación modal. Por lo tanto, los parámetros modales fueron obtenidos a partir de la historia de aceleraciones. Para este fin, se aplicó el Método Mejorado de Descomposición en el Dominio de las Frecuencias (MDDF) (Brincker, *et al.*, 2001) a la historia de aceleraciones de las vigas agrietadas a fin de determinar los parámetros modales tal cual se determinaría en una forma experimental. En total, se realizaron 72 simulaciones dinámicas e identificaciones modales como combinación de todos los casos.

## COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES EN VIGAS AGRIETADAS

En esta fase del estudio, se realizó una comparación de los parámetros modales de vigas agrietadas (frecuencias de vibración, formas modales y amortiguamiento), obtenidos a partir de su respuesta dinámica, con aquellas obtenidas en las vigas sin daño. Los parámetros modales obtenidos mediante el método MDDF se compararon con los correspondientes parámetros modales sin daño. La primera frecuencia de vibración de las vigas de concreto fueron cercanas a 10 Hz, simulando estructuras de puente rígidas, mientras que para vigas de acero este valor fue cercano al 2.5 Hz, representando valores típicos de puentes flexibles. La comparación se llevo a cabo usando la relación entre la condición con y sin daño para las frecuencias de vibración y los porcentajes de amortiguamiento. La comparación de formas modales se realizó utilizando el método de diferencias modales normalizadas (DMN) (Gentile y Gallino, 2008). El método de DMN es más sensible a pequeñas diferencias entre la comparación de dos vectores que el Criterio de Aseguramiento modal

(MAC, por sus siglas en Inglés) (Gentile y Gallino, 2008), para comparar formas modales con el propósito de detectar daño. En la fig 3 se muestra la comparación de los resultados previamente mencionados utilizando los parámetros antes descritos.



En la fig 3  $\Delta_{fr}$ , es la diferencia entre las tres primeras frecuencias de vibración de la viga con y sin daño,  $\Delta_{\xi}$  es la diferencia entre los amortiguamientos de la viga con y sin daño; C, S y Z se refieren a los métodos de Christides, Shifrin y Zheng, respectivamente, donde sus subíndices indican el número de grietas; S/NE indica que no se encontró solución con este método.

De la fig 3 es posible resaltar que el modo más sensible al daño es el tercero. En el caso de comparación de frecuencias, el segundo modo fue el menos sensible al daño. Este modo tiene un punto de inflexión en la localización del daño lo cual conduce a cambios pequeños en los parámetros comparados. En la comparación de amortiguamientos, el primer modo da las mayores diferencias. Considerando los métodos evaluados, el método de Christides y Barr modificado fue el más sensible al daño, en especial cuando se simulaban 5 grietas simultáneamente. Este método es el más simple de aplicación, pero también es el menos preciso. En efecto, su exactitud está influenciada por el número de elementos considerados. Al evaluar el método de Shifrin, la respuesta dinámica cuando se tienen 5 grietas simultáneamente en una viga doblemente empotrada no pudo obtenerse. El cálculo de las raíces con la ec 8 se vuelve más complejo cuando el número de grados de libertad y grietas se incrementa. Además, la solución analítica para otras condiciones de frontera y secciones transversales debe ser obtenida con anterioridad. Los resultados obtenidos con el método de Zheng tienen un comportamiento similar de aquellos obtenidos con el método de Shifrin, con la diferencia que la solución para determinar la respuesta dinámica de la viga fue determinada en todos los casos evaluados con el método de Zheng. Asimismo, el método de Zheng tiene la ventaja de su fácil implementación en un programa de computadora para el análisis de estructuras más complejas.

## IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE SIMULACIÓN DINÁMICA EN PUENTES AGRIETADOS

En esta sección se llevó a cabo la simulación dinámica de un puente vehicular de sección compuesta (vigas de acero y losa de concreto). El daño se simuló en las vigas I de acero mediante grietas verticales. Las grietas se localizaron cerca de los apoyos y al centro del claro. Estas grietas representan daño por fatiga causado por tráfico pesado. La respuesta dinámica del puente agrietado se determina usando el procedimiento propuesto por Zheng y Kessissoglou (2004).

### CARACTERÍSTICAS DEL PUENTE

El puente adoptado se encuentra simplemente apoyado en 4 vigas de acero. La losa es de concreto reforzado de 200 mm de espesor con una resistencia a la compresión de 40 MPa. Este puente fue diseñado conforme a los estándares del código de puentes de las normas AASHTO (2005). La geometría del puente descrito se muestra en la fig 4.

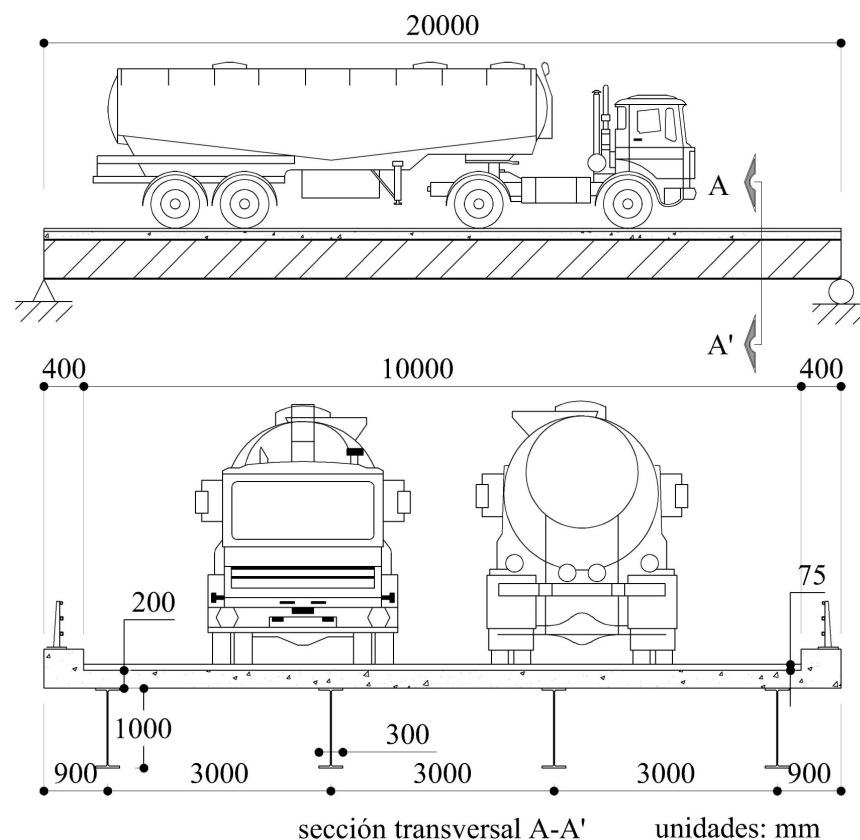
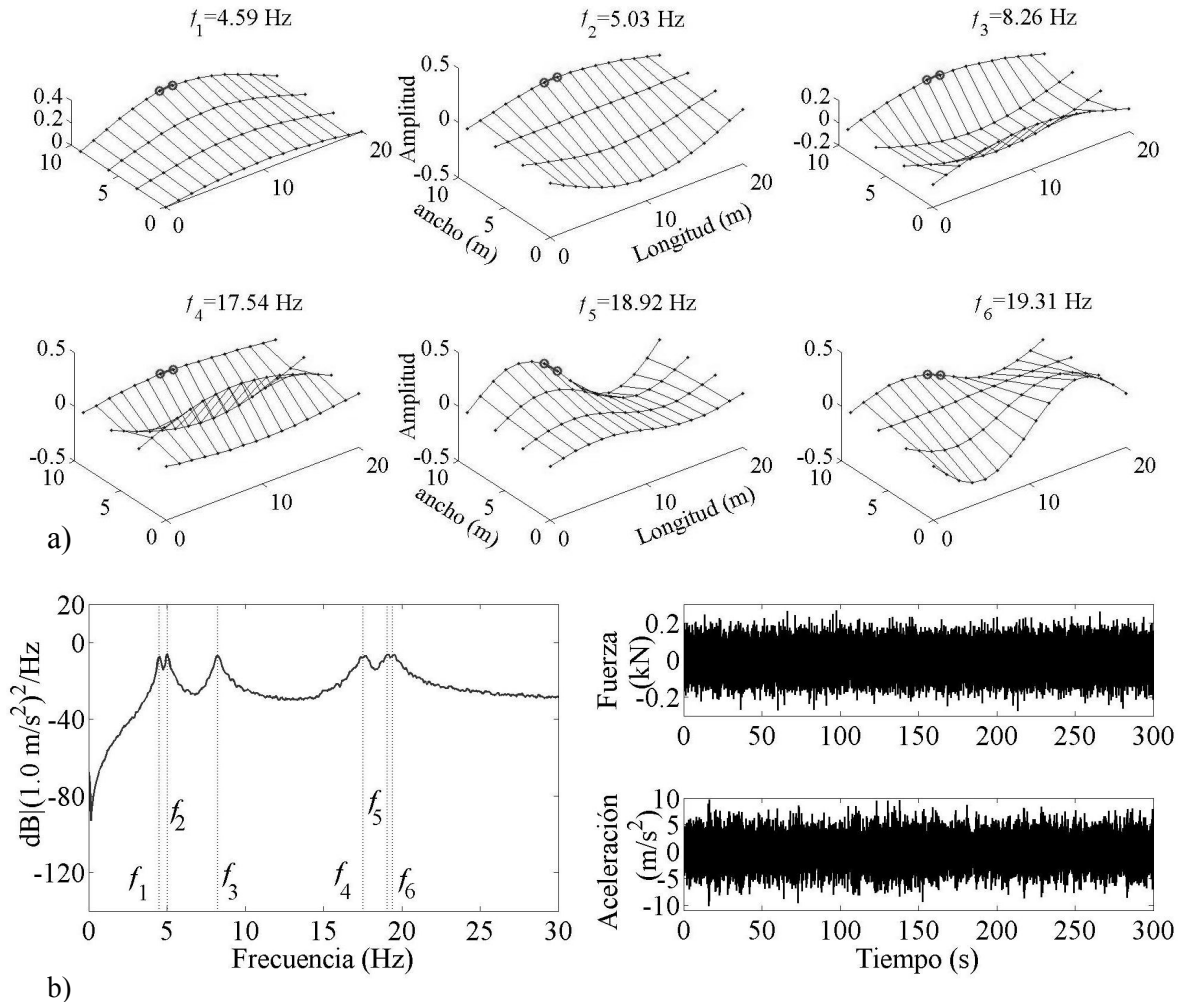


Figura 4. Geometría del puente adoptado como ejemplo.

### SIMULACIÓN DINÁMICA

Después de la obtención de los parámetros dinámicos la respuesta dinámica del puente agrietado se calculó utilizando el algoritmo recursivo propuesto por Wilson (2002). La fuerza excitadora presenta una variación aleatoria en posición y magnitud a lo largo de los nudos del modelo estructural. Esta fuerza trata de representar vibraciones ambientales. La respuesta dinámica fue adquirida con una frecuencia de muestreo de 150 Hz con un tiempo total de 300 s. Un ejemplo de las primeras 6 frecuencias naturales y una función típica del espectro de potencia con la historia de las aceleraciones y fuerzas obtenida al centro del claro de la viga I externa del puente se muestra en la fig 5.



**Figura 5. a) Formas modales y b) Procedimiento para el análisis modal del caso donde la grieta está a 8.5 m del apoyo izquierdo; ●—● elemento dañado.**

## CONCLUSIONES

En este artículo se comprueba que es posible la simulación dinámica de puentes agrietados. Los métodos utilizados fueron propuestos para estructuras simples, tales como vigas de secciones transversales rectangulares o circulares. Los métodos antes mencionados fueron adaptados y generalizados para su aplicación en estructuras de puentes. El método propuesto de Zheng y Kessissoglou, si bien no es el más preciso, si el más simple de implementar en un programa de computadora, lo cual puede facilitar su implementación en otro tipo de tipologías de puentes. El método implementado en este artículo tiene una importancia trascendental cuando se quiere evaluar un método de detección de daño en este tipo de estructuras. La falta de datos experimentales puede en este caso suplirse mediante simulaciones dinámicas bien fundamentadas.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Veracruzana y al Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México las facilidades prestadas para la realización de este proyecto de investigación conjunta.





## REFERENCIAS

- AASHTO, (2005), **“American Association of State Highway and Transportation Officials, LRFD Bridge Design Specifications”**, 3ª edición, Washington, D.C.
- Brincker, R., Ventura, C.E. y Andersen, P. (2001), **“Damping estimation by frequency domain decomposition”**, Proc. 19th Int. Modal Analysis Conference (IMAC), Kissimmee, FL.
- Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. y Yao, J. (1998), **“A Continuous Cracked Beam Vibration Theory”**, J. Sound and Vibration, vol. 215(1), pp. 17-34.
- Christides, S. y Barr, A.D.S. (1984), **“One-Dimensional Theory of Cracked Euler Bernoulli Beams”**, Int. J. Mech. Sci., vol. 26(11/12), pp. 639-648.
- Dimarogonas, A.D. (1996), **“Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review”**, Eng. Fracture Mech., vol. 55(5), pp. 831-857,
- Gentile, C. y Gallino, N. (2008), **“Ambient Vibration Testing and Structural Evaluation of an Historic Suspension Footbridge”**, Advances in Engineering Software, vol. 39(4), pp. 356-366.
- Ricci, P. y Viola, E. (2006), **“Stress Intensity Factors for Cracked T-Sections and Dynamic Behaviour of T-beams”**, Eng. Fracture Mech., vol. 73, pp.91-111.
- Salgado, R. (2008), **“Vibration-based damage detection methods in bridges, Evaluation and application”**, Tesis de doctorado, Universidad de Minho, pp 320.
- Shifrin, E.I. y Ruotolo R. (1999), **“Natural Frequencies of a Beam with an Arbitrary Number of Cracks”**, J. Sound and Vibration, vol. 222(3), pp. 409-423.
- Sinha, J.K., Friswell, M.I. y Edwards, S. (2002), **“Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data”**, J. Sound and Vibration, vol. 251(1), pp. 13-38.
- Wilson, E.L. (2002), **“Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures”**, 3ª edición, Computers and Structures, Inc., Berkeley, CA.
- Zheng, D.Y. y Kessissoglou, N.J. (2004), **“Free Vibration Analysis of a Cracked Beam by Finite Element Method”**, J. Sound and Vibration, vol. 273, pp. 457-475.