Divulgación

Representación del operador proyector por matrices inversas generalizadas. Primera parte

Mario Miguel Ojeda Ramírez,*
Jesús Hernández Suárez**
y
Fernando Velasco Luna***

Laboratorio de Investigación y Asesoría Estadística,
Facultad de Estadística e Informática,
Universidad Veracruzana,
Av. Xalapa esq. Av. Ávila Camacho s/n,
Xalapa, Veracruz.

* mojeda@uv.mx

* jeshernandez@uv.mx

** fvelasco@uv.mx

RECIBIDO: *diciembre de 2003*
ACEPTADO: *agosto de 2006*

RESUMEN

En esta primera parte se presenta la teoría del operador proyector definido en un subespacio de E^m, el cual es la suma lineal de subespacios de E^m. Además, se dan representaciones explícitas de los proyectores en términos de las matrices que generan los subespacios y de sus matrices inversas generalizadas. Dado que el operador proyector está definido sólo sobre un subespacio de E^m, se tratará también su extensión a todo el espacio E^m. En la segunda parte se presentarán aplicaciones de tal representación, y aplicaciones de la matriz inversa generalizada.

Contenido

1. Subespacio suma directa

En esta sección se introduce el concepto de subespacio suma directa de subespacios, así como algunos resultados de tal subespacio, los cuales se usan a lo largo del trabajo.

Denotaremos por E^m el espacio euclidiano m-dimensional, es decir, un espacio vectorial real de dimensión finita dotado con un producto interno.

Definición 1.1. Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios del espacio E^m. El subespacio suma lineal de $V_1, V_2, \ldots, V_k$ se define como

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = \{\alpha \,|\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \quad \text{donde} \quad \alpha_i \in V_i\}\,.$$

La siguiente definición generaliza el concepto de independencia lineal entre vectores a subespacios.

Definición 1.2. Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios del espacio E^m. Se dice que los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son *independientes* si

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0 \quad \text{donde} \quad \alpha_i \in V_i$$

implica que cada α_i es el vector 0.

Teorema 1.1. *Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios de E^m y sea $V_1+V_2+\cdots+V_k$ su suma lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son independientes;
b) Se cumple la relación

$$V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_k) = \{0\},$$

para todo j tal que $1 \leq j \leq k$.

Demostración: Supóngase que los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son independientes y sea

$$\alpha \in V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_k),$$

por lo que

$$\alpha = \alpha_j \quad \text{y} \quad \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_k.$$

Contenido

Entonces, tenemos

$$0 = \alpha - \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + (-\alpha_j) + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_k$$

y, como por hipótesis los subespacios son independientes, tenemos que cada vector α_i es el vector 0, entonces $\alpha = 0$. Esto implica que

$$V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_k) = \{0\}.$$

Ahora, supóngase que se cumple la relación

$$V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_k) = \{0\}$$

y se tiene

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_i \in V_i.$$

Sea p el mayor entero j tal que α_j es distinto del vector 0. Entonces

$$\alpha_p = (-\alpha_1) + \cdots + (-\alpha_{p-1}) + (-\alpha_{p+1}) + \cdots + (-\alpha_k),$$

que es un vector no nulo en

$$V_p \cap (V_1 + \cdots + V_{p-1} + V_{p+1} + \cdots + V_k) = 0,$$

lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto $\alpha_j = 0$ para todo j $(1 \leq j \leq k)$, y concluimos que los k subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son independientes. ∎

Como consecuencia del teorema 1.1 se tiene que si $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son subespacios independientes, entonces tales subespacios cumplen la relación $V_i \cap V_j = \{0\}$, si $i \neq j$.

La suma lineal de subespacios independientes recibe un nombre especial.

Definición 1.3. Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios de E^m. El subespacio suma lineal $V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ se denomina *suma directa* de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$, si se cumple cualesquiera de las dos condiciones del teorema 1.1. En este caso denotaremos el subespacio suma lineal por

$$V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_k.$$

Al tener el subespacio suma directa de subespacios cada vector de la suma directa tendrá descomposición única, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sean* $V_1, V_2, \ldots, V_k$ *subespacios de* E^m. *La suma lineal de estos subespacios es suma directa si y sólo si cualquier vector* $\beta \in V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ *tiene descomposición única en la forma*

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \quad \text{donde} \quad \alpha_i \in V_i.$$

Demostración: Supóngase que los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son independientes y que el vector β tiene además la descomposición

$$\beta = \alpha_1' + \cdots + \alpha_k' \quad \text{donde} \quad \alpha_i' \in V_i,$$

formemos la diferencia

$$0 = \beta - \beta = (\alpha_1 - \alpha_1') + \cdots + (\alpha_k - \alpha_k') \quad \text{donde} \quad (\alpha_i - \alpha_i') \in V_i.$$

Como los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son independientes se tiene que

$$(\alpha_1 - \alpha_1') = \cdots = (\alpha_k - \alpha_k') = 0,$$

entonces

$$\alpha_i = \alpha_i' \qquad \forall i \quad (i = 1, \ldots, k),$$

por lo que la descomposición del vector β es única.

Ahora, supóngase que cualquier vector β de $V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ tiene una única descomposición en la forma

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \quad \text{donde} \quad \alpha_i \in V_i.$$

Sea $\alpha_j \in V_j$, para $j = 1, \ldots, k$, y sea $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$. Puesto que $0 \in V_j$ para cada j y $0 = 0+0+\cdots+0$, se sigue que $\alpha_j = 0$ para todo j, implicando la independencia de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$. ■

Definición 1.4. Sean V_1 y V_2 subespacios de E^m, decimos que V_1 y V_2 son *ortogonales* si para cualquier par de vectores α y β tal que $\alpha \in V_1$ y $\beta \in V_2$ se tiene $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Denotaremos que V_1 y V_2 son ortogonales por $V_1 \perp V_2$.

En particular, dado cualquier subespacio V de E^m, podemos determinar todos los vectores ortogonales a V. Este conjunto de vectores recibe el siguiente nombre.

Definición 1.5. Sea V un subespacio de E^m. Se define el subespacio *complemento ortogonal* del subespacio V, como el subespacio de todos los vectores $\beta \in E^m$, tales que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, para todo $\alpha \in V$. Denotamos el complemento ortogonal de V, por $V^{\perp}$.

Contenido

Si $V_1, V_2, \ldots, V_k$ son subespacios de E^m, tales que $V_i \perp V_j$ si $i \neq j$, decimos que son mutuamente ortogonales.

Teorema 1.3. *Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios de E^m mutuamente ortogonales, entonces su suma lineal es directa.*

Demostración: Supóngase

$$\alpha \in V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_k).$$

Así $\alpha \in V_j$ y $\alpha \in (V_1 + \cdots + V_k)$, lo cual implica $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle + \cdots + \langle \alpha_j, \alpha_{j-1} \rangle + \langle \alpha_j, \alpha_{j+1} \rangle + \cdots + \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle$, pero por hipótesis los subespacios son ortogonales, es decir, $\langle \alpha_j, \alpha_p \rangle = 0$, para todo $p = 1, \ldots, k$ con $p \neq j$, así tenemos que $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$, de lo que se sigue que $\alpha = 0$, y así

$$V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_k) = \{0\}.$$

Por lo tanto finalmente tenemos el subespacio suma directa de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$. ■

2. Operador proyector y sus propiedades

Sean V_1 y V_2 subespacios independientes de E^m, tales que $V_1 \bigoplus V_2 = E^m$. Por la sección de suma directa, tenemos que cualquier elemento $\alpha \in E^m$, tiene descomposición única $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, donde $\alpha_1 \in V_1$ y $\alpha_2 \in V_2$. Denotemos por P el mapeo de E^m a V_1 dado por $P(\alpha) = \alpha_1$. P es un operador lineal sobre E^m.

Definición 2.1. Al operador P se le denomina el *operador proyector* sobre V_1 a lo largo de V_2.

A continuación presentamos algunas propiedades del operador proyector.

Teorema 2.1. *Un operador P sobre E^m es un operador proyector sobre algún subespacio V_1 si, y solo si, es* idempotente*, es decir, si $PP = P$.*

Demostración: Sea P el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2. Si $\alpha_1 \in V_1$, la proyección de α_1 sobre V_1 a lo largo de V_2 es α_1. Para cualquier $\alpha \in E^m$, se tiene $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, donde $\alpha_1 \in V_1$ y $\alpha_2 \in V_2$. Tenemos $PP(\alpha) = P(\alpha_1) = \alpha_1 = P(\alpha)$, por lo que P es un operador idempotente.

Inversamente, sea P un operador idempotente. Definamos V_1 como el conjunto de todos los vectores $\alpha \in E^m$, tales que $\alpha = P(\alpha)$ y sea V_2 el

Contenido

conjunto de todos los vectores $\alpha \in E^m$ tales que $P(\alpha) = 0$; es decir,

$$V_1 = \{\alpha \in E^m \,|P(\alpha) = \alpha\}$$
$$V_2 = \{\alpha \in E^m \,|P(\alpha) = 0\}.$$

Ahora supóngase $\alpha \in V_1 \cap V_2$, entonces $\alpha = 0$, así $V_1 \cap V_2 = \{0\}$; además, para cualquier $\alpha \in E^m$, se tiene que $\alpha = P(\alpha) + (I - P)\alpha$. Definamos $\alpha_1 = P(\alpha)$ y $\alpha_2 = (I - P)\alpha$, entonces $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, y se tiene

$$P(\alpha_1) = PP(\alpha) = P(\alpha) = \alpha_1$$

por lo que $\alpha_1 \in V_1$, y

$$P(\alpha_2) = 0,$$

lo cual implica que $\alpha_2 \in V_2$. Así $V_1 + V_2 = E^m$. Así por el teorema 1.1 tenemos $V_1 \bigoplus V_2 = E^m$. Además, como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, esto implica que

$$P(\alpha) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) = \alpha_1 + 0 = \alpha_1. \tag{1}$$

Entonces, por la definición de operador proyector se tiene de (1) que P es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2. ■

Teorema 2.2. *Sean V_1 y V_2 dos subespacios independientes de E^m, tales que $V_1 \bigoplus V_2 = E^m$, y sea P un operador lineal sobre E^m. Tenemos que P es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2 si y sólo si P satisface*

$$P(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in V_1, \\ 0, & \text{si } \alpha \in V_2, \end{cases} \tag{2}$$

Demostración: Denotemos con $P_{1.2}$ el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2 y con $P_{2.1}$ el operador proyector sobre V_2 a lo largo de V_1. Sea cualquier $\alpha \in E^m$, así $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, donde $\alpha_1 \in V_1$ y $\alpha_2 \in V_2$. Ahora $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = P_{1.2}(\alpha_1) + P_{2.1}(\alpha_2)$, de lo cual obtenemos $P(\alpha) = P(P_{1.2}(\alpha_1)) + P(P_{2.1}(\alpha_2))$. Además, tenemos que $P_{1.2}(\alpha_1) \in V_1$ y $P_{2.1}(\alpha_2) \in V_2$; así, por la condición (2) tenemos

$$P(\alpha) = P_{1.2}(\alpha_1) = \alpha_1;$$

así $P(\alpha) = \alpha_1$, con lo que se tiene, por definición de operador proyector, que P es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2.

Inversamente, sea P el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2, y sean los vectores $\alpha_1 \in V_1$ y $\alpha_2 \in V_2$, así se tiene que $P(\alpha_1) = P(\alpha_1 + 0) = \alpha_1$

y $P(\alpha_2) = P(0 + \alpha_2) = 0$. Entonces P satisface

$$P(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in V_1, \\ 0, & \text{si } \alpha \in V_2, \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Denotaremos por I el operador identidad sobre el espacio vectorial E^m.

Notemos que si P es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2, entonces por el teorema 2.2 tenemos que $(I - P)$ es el operador proyector sobre V_2 a lo largo de V_1. Además, $P(I - P) = (I - P)P = 0$.

Ahora veremos la relación entre proyectores y subespacios.

Teorema 2.3. *Sean V_1 y V_2 subespacios del espacio E^m, con subespacios complementarios W_1 y W_2, respectivamente; es decir, $V_1 \bigoplus W_1 = E^m$ y $V_2 \bigoplus W_2 = E^m$. Sean P_1 y P_2 los proyectores sobre V_1 a lo largo de W_1 y sobre V_2 a lo largo de W_2, respectivamente, tales que $V_1 \subset V_2$, entonces*

$$P_1 P_2(\alpha) = P_2 P_1(\alpha) = P_1(\alpha).$$

Demostración: Sean $Q_1 = I - P_1$, el proyector sobre W_1 a lo largo de V_1, y $Q_2 = I - P_2$ el proyector sobre W_2 a lo largo de V_2. Sea cualquier vector $\alpha \in E^m$, como por hipótesis $V_1 \subset V_2$, tenemos $P_1(\alpha) \in V_2$, entonces

$$P_2 P_1 = P_1. \tag{3}$$

Ahora, por hipótesis también se cumple que $W_2 \subset W_1$, entonces de (3) tenemos $Q_1 Q_2 = Q_2$, lo cual implica

$$(I - P_1)(I - P_2) = I - P_2,$$

obteniéndose

$$-P_1 + P_1 P_2 = 0,$$

de lo cual tenemos

$$P_1 = P_1 P_2. \tag{4}$$

Así, de (3) y de (4), obtenemos

$$P_1 P_2 = (P_2 P_1) P_2 = P_2 (P_1 P_2) = P_2 P_1,$$

Así tenemos que $P_1 P_2 = P_2 P_1$. $\blacksquare$

Ahora presentaremos una clase especial de operador proyector.

Definición 2.2. Sea V un subespacio del espacio E^m, y sea $V^\perp$ su complemento ortogonal. Entonces el operador proyector sobre V a lo largo de $V^\perp$, se denomina *proyector ortogonal* sobre V.

3. G-inversa de una matriz

Un sistema de ecuaciones lineales algebraicas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y},$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ de rango $r \leq \text{mín}(m, n)$, se dice que es consistente sí y sólo sí $\mathbf{y} \in \Im(\mathbf{A})$. Si $m = n = r$, entonces existe una única solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, la cual está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, donde $\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$. Sin embargo, cuando $\mathbf{A}$ es rectangular o cuadrada singular, una representación simple de una solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, en términos de $\mathbf{A}$ es más complicada. Brevemente hablando, una matriz inversa generalizada de $\mathbf{A}$ es una matriz $\mathbf{A}^g$ tal que $\mathbf{A}^g\mathbf{y}$ es una solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ para cualquier $\mathbf{y}$ que hace al sistema consistente.

Definición 3.1. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de orden $m \times n$ de rango $r \leq \text{mín}(m, n)$. La matriz $\mathbf{A}^-$ es llamada una matriz *inversa generalizada* (*g-inversa*) de la matriz $\mathbf{A}$ si se cumple la siguiente condición

$$\mathbf{AA}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Teorema 3.1. *Toda matriz tiene una matriz g-inversa.*

Demostración: Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ de rango $r \leq \text{mín}(m, n)$, así tenemos la existencia de dos matrices inversibles $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ tales que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{TAS}. \tag{5}$$

Definamos por

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

y por

$$\mathbf{R}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ y $\mathbf{H}_3$ son matrices cualesquiera de orden adecuado, se tiene que la matriz $\mathbf{R}^-$ es una matriz g-inversa de la matriz $\mathbf{R}$. Ahora por (5) se tiene que $\mathbf{R} = \mathbf{TAS}$ y por ser las matrices $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ inversibles tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{RS}^{-1}$. Definiendo $\mathbf{A}^- = \mathbf{SR}^-\mathbf{T}$, se tiene que la matriz $\mathbf{A}^-$ es una

Contenido

matriz g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$, como se puede ver

$$\mathbf{AA^-A} = \mathbf{T^{-1}RS^{-1}SR^-TT^{-1}RS^{-1}} = \mathbf{T^{-1}RR^-RS^{-1}} = \mathbf{T^{-1}RS^{-1}} = \mathbf{A}.$$

■

En lo que resta de esta sección daremos algunos resultados sobre matrices g-inversas, los cuales ocuparemos en lo posterior.

El siguiente resultado nos da la relación existente entre solución de sistemas de ecuaciones consistentes del tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ y de las matrices g-inversas de la matriz $\mathbf{A}$.

Lema 3.1. *Si el sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ *es consistente, entonces* $\mathbf{A}^-$ *es una g-inversa de* $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $\mathbf{A^-y}$ *es una solución de* $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$*.*

Demostración: Supóngase que $\mathbf{A}^-$ es una matriz g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$. Por hipótesis el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ es un sistema consistente, así existe $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, ahora tenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{A^-y}) = \mathbf{AA^-}(\mathbf{y}) = \mathbf{AA^-}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{AA^-A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} = \mathbf{y},$$

así $\mathbf{A^-y}$ es una solución del sistema consistente $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.

Denotemos por $\mathbf{a}_i$ al i-ésimo vector columna de la matriz $\mathbf{A}$, tenemos que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}_i$ es un sistema consistente, así por hipótesis se tiene que $\mathbf{A^-a}_i$ es una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}_i$, es decir, $\mathbf{AA^-a}_i = \mathbf{a}_i$, lo anterior se cumple para todos los vectores columna de la matriz $\mathbf{A}$, así tenemos

$$\mathbf{AA^-A} = \mathbf{A}.$$

■

Observación 3.1. La matriz $\mathbf{A}^-$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$ si y sólo si $\mathbf{yA}^-$ es una solución del sistema $\mathbf{xA} = \mathbf{y}$ para cualquier $\mathbf{y}$, la cual hace al sistema consistente.

Por el lema anterior una forma de encontrar expresiones para las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales consistentes $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, es encontrando una matriz $g-$inversa de la matriz $\mathbf{A}$.

En la teoría general de matrices g-inversas el objetivo principal es el de encontrar expresiones para las soluciones de sistemas de ecuaciones consistentes. En este trabajo otro objetivo de utilizar la matriz $\mathbf{A}^-$, g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$, será la representación del operador proyector sobre el subespacio generado por los vectores columna de $\mathbf{A}$.

Denotaremos por $S_f(\mathbf{A})$ al subespacio generado por los vectores fila de la matriz $\mathbf{A}$, por $S(\mathbf{A})$ al subespacio generado por los vectores columna de la matriz $\mathbf{A}$ y por $R(\mathbf{A})$ a la dimensión de este espacio.

Observación 3.2. El subespacio $S_f(\mathbf{A})$ y el subespacio $S(\mathbf{A})$ tienen la misma dimensión.

Definición 3.2. Sea $\mathbf{A}$ una matriz, ésta se denomina idempotente si se cumple que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$.

Lema 3.2. *Si $\mathbf{A}^-$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$, entonces*

a) $\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{A}^-$ *es una matriz idempotente y*
b) $R(\mathbf{H}) = R(\mathbf{A})$.

Demostración: *a*) Por hipótesis $\mathbf{A}^-$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$; entonces tenemos

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{A}\mathbf{A}^-)\mathbf{A}\mathbf{A}^- = \mathbf{A}\mathbf{A}^- = \mathbf{H}.$$

b) De (a) tenemos que $\mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Así

$$R(\mathbf{A}) \geq R(\mathbf{A}\mathbf{A}^-) = R(\mathbf{H}) \geq R(\mathbf{H}\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}).$$

Así $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{H})$. ■

Lema 3.3. *Si $\mathbf{A}$ es una matriz idempotente, entonces $R(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$.*

Demostración: Supongamos que $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ de rango $r \leq \text{mín}(m, n)$, así tenemos la existencia de dos matrices inversibles $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}.$$

Particionemos las matrices $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ de la siguiente manera

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}_1 \cdots \mathbf{T}_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_2 \end{pmatrix};$$

así tenemos que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{T}_1 \cdots \mathbf{T}_2)\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1\mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

así, tenemos que $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{T}_1\mathbf{S}_1)$. Además por ser la matriz $\mathbf{A}$ idempotente, y por ser las matrices $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ inversibles tenemos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

lo cual implica que $\operatorname{tr}(\mathbf{I}_r) = \operatorname{tr}(\mathbf{S}_1\mathbf{T}_1)$, así tenemos que $R(\mathbf{A}) = r = \operatorname{tr}(\mathbf{I}_r) = \operatorname{tr}(\mathbf{S}_1\mathbf{T}_1) = \operatorname{tr}(\mathbf{T}_1\mathbf{S}_1) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$. ■

Lema 3.4. *Sean* $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$ *matrices tal que el producto* $\mathbf{BC}$ *está definido. Entonces*

a) *Si* $R(\mathbf{BC}) = R(\mathbf{B})$, *entonces* $\mathbf{C}(\mathbf{BC})^-$ *es una matriz* g*-inversa de la matriz* $\mathbf{B}$.
b) *Si* $R(\mathbf{BC}) = R(\mathbf{C})$, *entonces* $(\mathbf{BC})^-\mathbf{B}$ *es una matriz* g*-inversa de la matriz* $\mathbf{C}$.

Demostración:a) Como $S(\mathbf{BC}) \subset S(\mathbf{B})$, y por hipótesis $R(\mathbf{BC}) = R(\mathbf{B})$, entonces se tiene $S(\mathbf{B}) \subset S(\mathbf{BC})$; así existe una matriz $\mathbf{D}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{BCD}$. Tenemos que el sistema $\mathbf{B} = \mathbf{BCD}$ es un sistema consistente, así, por el lema 3.1 tenemos que si $(\mathbf{BC})^-$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{BC}$, la matriz $(\mathbf{BC})^-\mathbf{B}$ es una solución al sistema $\mathbf{B} = \mathbf{BCD}$; así, eligiendo la matriz $\mathbf{D} = (\mathbf{BC})^-\mathbf{B}$, tenemos que

$$\mathbf{B} = \mathbf{BCD} = \mathbf{BC}(\mathbf{BC})^-\mathbf{B};$$

así, la matriz $\mathbf{C}(\mathbf{BC})^-$ es una matriz g-inversa de la matriz $\mathbf{B}$.
b) Como $S_f(\mathbf{BC}) \subset S_f(\mathbf{C})$ y por hipótesis $R(\mathbf{BC}) = R(\mathbf{C})$, entonces tenemos $S_f(\mathbf{C}) \subset S_f(\mathbf{BC})$; así, existe una matriz $\mathbf{D}$ tal que $\mathbf{C} = \mathbf{DBC}$; pero eligiendo $\mathbf{D} = \mathbf{C}(\mathbf{BC})^-$ tenemos que

$$\mathbf{C} = \mathbf{DBC} = \mathbf{C}(\mathbf{BC})^-\mathbf{BC},$$

entonces la matriz $(\mathbf{BC})^-\mathbf{B}$ es una matriz g-inversa de la matriz $\mathbf{C}$. ■

Lema 3.5. *Sean* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{C}$ *matrices tal que el producto* $\mathbf{CAB}$ *está definido. Si* $R(\mathbf{CAB}) = R(\mathbf{C})$, *entonces la matriz* $\mathbf{AB}(\mathbf{CAB})^-$ *es una* g*-inversa de la matriz* $\mathbf{C}$, *es decir,*

$$\mathbf{CAB}(\mathbf{CAB})^-\mathbf{C} = \mathbf{C}, \tag{6}$$

Asímismo si $R(\mathbf{CAB}) = R(\mathbf{B})$, *entonces la matriz* $(\mathbf{CAB})^-\mathbf{CA}$ *es una*

g-inversa de la matriz $\mathbf{B}$*, es decir,*

$$\mathbf{B}(\mathbf{CAB})^{-}\mathbf{CAB} = \mathbf{B}, \tag{7}$$

Demostración: Por hipótesis tenemos $R(\mathbf{CAB}) = R(\mathbf{C})$, entonces tomando $R(\mathbf{C}(\mathbf{AB})) = R(\mathbf{C})$, del lema 3.4 tenemos que la matriz $\mathbf{AB}(\mathbf{CAB})^{-}$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{C}$. Similarmente de $R((\mathbf{CA})\mathbf{B}) = R(\mathbf{B})$, tenemos que la matriz $(\mathbf{CAB})^{-}\mathbf{CA}$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{B}$. ■

Anteriormente se dio un resultado que relaciona la g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$ con soluciones particulares del sistema de ecuaciones consistente $\mathbf{xA} = \mathbf{y}$. Ahora daremos un resultado para la solución general de sistemas de ecuaciones consistentes del tipo $\mathbf{xA} = \mathbf{y}$.

Lema 3.6. *Sea* $\mathbf{A}^{-}$ *una matriz g-inversa de la matriz* $\mathbf{A}$ *de orden $m \times n$. Además sean V y W construidos de la siguiente manera*

$$V = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{xA} = \mathbf{0}\}$$

y

$$W = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} = \mathbf{z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{-})\}.$$

Entonces se cumple que $\dim(W) = \dim(V)$*.*

Demostración: Tenemos que $\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{-}$ es una matriz idempotente, así por el lema 3.3 se tiene $R(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{-}) = \operatorname{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{-})$. Además por la construcción de W tenemos

$$\begin{aligned}\dim(W) &= \dim(S_f(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{-}))\\ &= \dim(S(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{-}))\\ &= R(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^{-})\\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{I}) - \operatorname{tr}(\mathbf{AA}^{-})\\ &= m - R(\mathbf{AA}^{-}).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\dim(V) = \dim(E^m) - \dim(S_f(\mathbf{A})) = \dim(E^m) - \dim(S(\mathbf{A})) = m - R(\mathbf{A}).$$

Además, por el lema 3.2 tenemos que $R(\mathbf{AA}^{-}) = R(\mathbf{A})$. De lo anterior se concluye que $\dim(W) = \dim(V)$. ■

Contenido

Teorema 3.2. *Sea* $\mathbf{A}^-$ *una matriz* g*-inversa de la matriz* $\mathbf{A}$*. Entonces la solución general del sistema de ecuaciones lineales consistente* $\mathbf{xA} = \mathbf{b}$ *está dada por*

$$\mathbf{x} = \mathbf{bA}^- + \mathbf{z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^-).$$

Demostración: Por hipótesis la matriz $\mathbf{A}^-$ es una matriz g-inversa de $\mathbf{A}$; así, $\mathbf{AA}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Sea el sistema $\mathbf{xA} = \mathbf{b}$ consistente; así, $\mathbf{xA} = \mathbf{b}$ implica

$$(\mathbf{bA}^-)\mathbf{A} = (\mathbf{xAA}^-)\mathbf{A} = \mathbf{x}(\mathbf{AA}^-\mathbf{A}) = \mathbf{xA} = \mathbf{b},$$

lo cual implica que $(\mathbf{bA}^-)\mathbf{A} = \mathbf{b}$, así tenemos que una solución al sistema consistente $\mathbf{xA} = \mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{bA}^-$. Ahora la solución general al sistema homogéneo $\mathbf{xA} = \mathbf{0}$ está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^-)$ donde $\mathbf{z}$ es un vector arbitrario. Esto lo podemos ver de la siguiente manera: sean los conjuntos

$$V = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{xA} = \mathbf{0}\},$$

y

$$W = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} = \mathbf{z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^-)\},$$

tenemos que $\mathbf{x} = \mathbf{z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^-)\mathbf{A} = \mathbf{0}$, lo cual implica que W es un subespacio de V, y además del lema 3.6, tenemos $\dim(W) = \dim(V)$, así $W = V$, de lo anterior tenemos que la solución al sistema homogéneo $\mathbf{xA} = \mathbf{0}$ está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^-)$. Por otra parte, sabemos que la solución general de un sistema de ecuaciones no homogéneo está dada por la suma de una solución particular del sistema no homogéneo y la solución general del sistema homogéneo. Así la solución general al sistema $\mathbf{xA} = \mathbf{b}$ está dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{bA}^- + \mathbf{z}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^-). \qquad \blacksquare$$

4. Extensión de proyectores

En secciones anteriores se trató el operador proyector definido en todo el espacio euclidiano E^m, el cual era formado por la suma directa de dos subespacios de E^m. En esta sección se trabajará primeramente en un subespacio de E^m; tal subespacio será la suma directa de subespacios de E^m. Se darán las propiedades de los proyectores definidos en dicho subespacio. El objetivo principal de esta sección es extender los proyectores definidos en un subespacio de E^m, a todo el espacio E^m.

Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios independientes de E^m y denotemos el subespacio suma directa de $V_1, V_2, \ldots, V_k$ por V_0; es decir,

$$V_0 = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_k,$$

Contenido

el cual no será necesariamente todo el espacio E^m.

Denotemos por $V_{(i)}$ al subespacio suma lineal de todos los subespacios excluyendo al subespacio V_i; es decir,

$$V_{(i)} = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_{i-1} \bigoplus V_{i+1} \bigoplus \cdots \bigoplus V_k.$$

4.1. Proyectores Definidos en V_0

Por resultados presentados en el capítulo de suma directa se tiene que cualquier vector $\alpha \in V_0$ tiene una única descomposición

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \quad \text{donde} \quad \alpha_i \in V_i.$$

Definición 4.1. Sea $\alpha \in V_0$, el mapeo de α a α_j determina un operador $P_{j.(j)}$ sobre V_0, el cual es llamado el *operador proyector* sobre V_j a lo largo de $V_{(j)}$ $(j = i, \ldots, k)$.

Al tener los k subespacios independientes $V_1, \ldots, V_k$, formamos el subespacio suma directa V_0, así obtenemos k operadores $P_{1.(1)}, P_{2.(2)}, \ldots, P_{k.(k)}$ sobre V_0. A continuación daremos las propiedades de estos k operadores.

Lema 4.1. *El operador proyector $P_{i.(i)}$ definido en el subespacio V_0, tiene las siguientes propiedades*

a) $P_{i.(i)}$ es lineal en V_0;
b) $P_{i.(i)}$ es idempotente en V_0;
c) $\sum_{i=1}^{k} P_{i.(i)}$ es la identidad en V_0;
d) $P_{i.(i)}P_{j.(j)} = 0$ si $i \neq j$ en V_0.

Demostración: *a*) Sean $\beta_1, \beta_2 \in V_0$, lo cual implica que $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 \in V_0$, así α se puede descomponer como, $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, donde $\alpha_i \in V_i$. Por la definición de $P_{i.(i)}$, se tiene $P_{i.(i)}(\alpha) = \alpha_i, \quad \alpha_i \in V_i$, lo cual implica

$$P_{i.(i)}(a_1\beta_1 + a_2\beta_2) = \alpha_i. \tag{8}$$

Ahora como $\beta_1, \beta_2 \in V_0$

$$\beta_1 = \alpha_1^{'} + \cdots + \alpha_k^{'}, \quad \text{donde} \quad \alpha_i^{'} \in V_i$$
$$\beta_2 = \alpha_1^{''} + \cdots + \alpha_k^{''}, \quad \text{donde} \quad \alpha_i^{''} \in V_i$$

así que
$$P_{i.(i)}(\beta_1) = \alpha_i^{'} \quad \text{y} \quad P_{i.(i)}(\beta_2) = \alpha_i^{''}.$$
Ahora
$$a_1\beta_1 = a_1\alpha_1^{'} + \cdots + a_1\alpha_k^{'}, \tag{9}$$
entonces
$$P_{i.(i)}(a_1\beta_1) = a_1\alpha_i^{'} = a_1 P_{i.(i)}(\beta_1),$$
similarmente,
$$a_2\beta_2 = a_2\alpha_1^{''} + \cdots + a_2\alpha_k^{''}, \tag{10}$$
entonces
$$P_{i.(i)}(a_2\beta_2) = a_2\alpha_i^{''} = a_2 P_{i.(i)}(\beta_2).$$
Así de (9) y (10), obtenemos
$$\begin{aligned}\alpha &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 = a_1\alpha_1^{'} + \cdots + a_1\alpha_k^{'} + a_2\alpha_1^{''} + \cdots + a_2\alpha_k^{''}\\ &= a_1P_{1.(1)}(\beta_1) + \cdots + a_1P_{k.(k)}(\beta_1) + a_2P_{1.(1)}(\beta_2) + \cdots + a_2P_{k.(k)}(\beta_2)\\ &= (a_1P_{1.(1)}(\beta_1) + a_2P_{1.(1)}(\beta_2)) + \cdots + (a_1P_{k.(k)}(\beta_1) + a_2P_{k.(k)}(\beta_2))\end{aligned}$$
con $(a_1P_{i.(i)}\beta_1 + a_2P_{i.(i)}\beta_2) \in V_i$. Ahora como $\alpha \in V_0$, éste tiene descomposición única, así tenemos
$$\alpha_i = a_1P_{i.(i)}(\beta_1) + a_2P_{i.(i)}(\beta_2),$$
pero de (8) se tiene que $\alpha_i = P_{i.(i)}(a_1\beta_1 + a_2\beta_2)$, lo cual implica,
$$P_{i.(i)}(a_1\beta_1 + a_2\beta_2) = a_1P_{i.(i)}(\beta_1) + a_2P_{i.(i)}(\beta_2).$$
Así el operador proyector es un operador lineal.
b) Por la definición de operador proyector $P_{i.(i)}$, se cumple que para todo $\beta_i \in V_i$ se tiene $P_{i.(i)}(\beta_i) = \beta_i$, así tenemos para cualquier $\beta \in V_0$,
$$P_{i.(i)}(P_{i.(i)}(\beta)) = P_{i.(i)}(\beta_i) = \beta_i = P_{i.(i)}(\beta).$$
Por lo tanto
$$P_{i.(i)}^2 = P_{i.(i)}.$$
c) Sea $\beta \in V_0$ entonces $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_k$, donde $\beta_i \in V_i$. Ahora
$$\sum_{i=1}^{k} P_{i.(i)}(\beta) = P_{1.(1)}(\beta) + \cdots + P_{k.(k)}(\beta) = \beta_1 + \cdots + \beta_k = \beta.$$

Así concluimos que $\sum_{i=1}^{k} P_{i.(i)}$ es la identidad en V_0.
d) Por la definición de $P_{i.(i)}$ y de $P_{j.(j)}$ se tiene que para cualquier $\beta \in V_0$ se cumple

$$P_{i.(i)}(P_{j.(j)}(\beta)) = P_{i.(i)}(\beta_j) = P_{i.(i)}(\mathbf{0} + \cdots + \beta_j + \cdots + \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Entonces

$$P_{i.(i)} P_{j.(j)} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$ ■

Teorema 4.1. *El operador P definido en V_0, es el operador proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)}$ si y sólo si P satisface*

$$P(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in V_i, \\ 0, & \text{si } \alpha \in V_{(i)}. \end{cases} \tag{11}$$

Demostración: Sean $\alpha \in V_i$ y $\beta \in V_{(i)}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 + \cdots + 0 + \alpha + 0 + \cdots + 0 \\ \beta &= \beta_1 + \cdots + \beta_{i-1} + 0 + \beta_{i+1} + \cdots + \beta_k \end{aligned}$$

por hipótesis P es el operador proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)}$; así, se cumple

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= P(0 + \cdots + 0 + \alpha + 0 + \cdots + 0) = \alpha, \\ P(\beta) &= P(\beta_1 + \cdots + \beta_{i-1} + 0 + \beta_{i+1} + \cdots + \beta_k) = 0. \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in V_i, \\ 0, & \text{si } \alpha \in V_{(i)}. \end{cases}$$

Sean $P_{1.(1)}, \ldots, P_{k.(k)}$ los proyectores sobre V_i a lo largo de $V_{(i)}$, respectivamente. Como $V_0 = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_k$, entonces cualquier $\alpha \in V_0$ tiene descomposición única $\alpha = \alpha_1 \cdots + \alpha_k$. Pero $\alpha_i = P_{i.(i)}(\alpha_i)$, así $\alpha = P_{1.(1)}(\alpha_1) + \cdots + P_{k.(k)}(\alpha_k)$. De lo anterior tenemos

$$P(\alpha) = P(P_{1.(1)}(\alpha_1)) + \cdots + P(P_{k.(k)}(\alpha_k)), \tag{12}$$

además por hipótesis

$$P(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in V_i, \\ 0, & \text{si } \alpha \in V_{(i)}, \end{cases}$$

y tenemos que (12) se convierte en

$$P(\alpha) = P_{i.(i)}(\alpha_i) = \alpha_i, \qquad \forall \alpha$$

Luego por definición tenemos que P es el operador proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)}$. ■

4.2. Extensión al espacio E^m

En la sección anterior se trataron proyectores definidos en un subespacio V_0 del espacio E^m, el subespacio V_0 era la suma directa de k subespacios de E^m; ahora extenderemos estos proyectores a todo el espacio E^m; es decir, obtendremos el operador proyector $P_{i.(i)*}$ el cual es la extensión del operador proyector $P_{i.(i)}$ a E^m a través del subespacio complementario algebraico de V_0.

Sean $V_1, V_2, \ldots, V_k$ subespacios independientes de E^m y V_0 su subespacio suma directa, sea V_{k+1} el subespacio complementario algebraico de V_0. Denotemos por $V_{(j)*}$ al subespacio suma lineal de los subespacios $V_{(j)}$ y V_{k+1}; es decir,

$$V_{(j)*} = V_{(j)} \bigoplus V_{k+1}.$$

Teorema 4.2. *Sea $P_{i.(i)}$ el operador proyector sobre el subespacio V_i a lo largo del subespacio $V_{(i)}$. Además sea V_{k+1} el subespacio complementario algebraico del subespacio V_0. Denotemos por P el proyector sobre V_0 a lo largo de V_{k+1} y por $P_{i.(i)*}$ el operador proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)*}$. Entonces*

$$P_{i.(i)*} = P_{i.(i)}P, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Demostración: Como consecuencia del teorema 2.3, tenemos que $P_{i.(i)}P$ es un operador proyector. Ahora sea $\alpha \in V_i$, así $P(\alpha) = \alpha$ y tenemos

$$P_{i.(i)}P(\alpha) = P_{i.(i)}(\alpha) = \alpha. \tag{13}$$

Ahora, sea $\alpha \in V_{(i)*}$ lo cual implica $\alpha = \alpha_{(i)} + \alpha_{k+1}$, así tenemos

$$P_{i.(i)}P(\alpha) = P_{i.(i)}(P\alpha_{(i)} + P\alpha_{k+1}) = P_{i.(i)}P\alpha_{(i)} = P_{i.(i)}\alpha_{(i)} = 0, \tag{14}$$

Contenido

así de (13) y (14) tenemos

$$P_{i.(i)}P(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in V_i, \\ 0, & \text{si } \alpha \in V_{(i)*}, \end{cases}$$

por lo tanto $P_{i.(i)}P$ es el operador proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)*}$. ■

5. Representación de proyectores

A continuación daremos algunos resultados los cuales relacionan la teoría del subespacio suma directa de subespacios, con la teoría del operador proyector sobre dichos subespacios y con las g-inversas de las matrices que generan estos subespacios.

Denotaremos por V_i al subespacio generado por los vectores columna de la matriz $\mathbf{A}_i$; es decir,

$$V_i = S(\mathbf{A}_i).$$

Definición 5.1. Sean $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ dos matrices, se dirá que son *matrices disjuntas* cuando los subespacios generados por los vectores columna de $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, respectivamente, sean subespacios independientes.

Definición 5.2. Sea $\mathbf{A}_2$ una matriz disjunta con la matriz $\mathbf{A}_1$. Entonces la matriz $\mathbf{A}_{1.2}^-$ es llamada una $\mathbf{A}_2$-*g-inversa-restringida* de la matriz $\mathbf{A}_1$ si $\mathbf{A}_{1.2}^-$ es una g-inversa de $\mathbf{A}_1$ y además,

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_{1.2}^-\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}.$$

Observación 5.1. En lo subsecuente cuando se diga que la matriz $\mathbf{B} \in S(\mathbf{A})$, significará que los vectores columna de la matriz $\mathbf{B}$ pertenecen al espacio $S(\mathbf{A})$.

Sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, cualesquiera vectores de E^m, el producto interno escalar entre α y β esta dado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i$$

Lema 5.1 *Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ son k matrices disjuntas de orden $m \times r_i$ ($i = 1, \ldots, k$), y $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$ matrices de orden $r_i \times m$ ($i = 1, \ldots, k$), entonces*

$$\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{A}_k\mathbf{X}_k = \mathbf{0} \quad \text{implica que} \quad \mathbf{A}_i\mathbf{X}_i = \mathbf{0} \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Demostración: Supóngase que $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i\mathbf{X}_i = \mathbf{0}$; por independencia de los subespacios V_i se tiene $\mathbf{A}_i\mathbf{X}_i = \mathbf{0}$ para todo i $(i = 1, \ldots, k)$. ■

Tenemos que cualquier matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ define una transformación lineal del espacio E^n en el espacio E^m, en lo sucesivo denotaremos también por $\mathbf{A}$ a la transformación lineal que define la matriz $\mathbf{A}$. Denotaremos por $\ker(\mathbf{A})$ al espacio nulo de $\mathbf{A}$.

Sea una matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ y $\mathbf{A}^-$ una g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$, la matriz producto $\mathbf{AA}^-$ de orden $m \times m$ define un operador lineal sobre el espacio E^m. El producto de tales matrices es algo más que un operador lineal, como se ve en el siguiente resultado.

Lema 5.2. *Sea $\mathbf{A}$ una matriz arbitraria; para cualquier matriz $\mathbf{A}^-$, g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$, la matriz producto $\mathbf{AA}^-$ es un proyector sobre $S(A)$ a lo largo del espacio nulo de $\mathbf{AA}^-$.*

Demostración: Tenemos por el lema 3.2 que la matriz $\mathbf{AA}^-$ es idempotente, por lo que $\mathbf{AA}^-$ es un proyector. Además se cumple que $S(\mathbf{A}) \bigoplus \ker(\mathbf{AA}^-)$. Sea $\mathbf{B} \in S(\mathbf{A})$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$; así

$$\mathbf{AA}^-\mathbf{B} = \mathbf{AA}^-\mathbf{AC} = \mathbf{AC} = \mathbf{B}$$

Sea, por otro lado, $\mathbf{B} \in \ker(\mathbf{AA}^-)$, entonces $\mathbf{AA}^-\mathbf{B} = \mathbf{0}$; con lo que tenemos que

$$\mathbf{AA}^-\mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{B}, & \text{si } \mathbf{B} \in S(\mathbf{A}), \\ \mathbf{0}, & \text{si } \mathbf{B} \in \ker(\mathbf{AA}^-). \end{cases}$$

Así $\mathbf{AA}^-$ es proyector sobre $S(\mathbf{A})$ a lo largo del $\ker(\mathbf{AA}^-)$. ■

Lema 5.3. *Si $\mathbf{A}$ es una matriz arbitraria, entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^-)$ es un proyector sobre el espacio nulo de $\mathbf{AA}^-$ a lo largo de $S(\mathbf{A})$.*

Lema 5.4. *Sean $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ matrices disjuntas, sea P_1 el proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{A}_1)$ y $Q_1 = I - P_1$ el proyector ortogonal sobre el complemento ortogonal a $S(\mathbf{A}_1)$. Entonces se cumple*

$$S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{A}_2) = S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_2)$$

Demostración: Como $Q_1 = I - P_1$ es el operador proyector ortogonal sobre el complemento ortogonal a $S(\mathbf{A}_1)$, si $\alpha \in S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{A}_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + (P_1\alpha_2 + Q_1\alpha_2) \\ &= (\alpha_1 + P_1\alpha_2) + Q_1\alpha_2; \end{aligned}$$

luego $\alpha = [(\alpha_1 + P_1\alpha_2) + Q_1\alpha_2] \in S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_2)$. Ahora sea $\alpha \in S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_2)$, esto implica la descomposición de α como

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + Q_1\alpha_2 = \alpha_1 + (\alpha_2 - P_1\alpha_2)\\ &= (\alpha_1 - P_1\alpha_2) + \alpha_2;\end{aligned}$$

luego $\alpha = [(\alpha_1 - P_1\alpha_2) + \alpha_2] \in S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{A}_2)$. ■

Lema 5.5. *Sean $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ matrices disjuntas y P_1 el proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{A}_1)$. Entonces se tiene que los subespacios $S(\mathbf{A}_1)$ y $S(Q_1\mathbf{A}_2)$ son ortogonales.*

Demostración: Sean $\alpha_1 \in S(\mathbf{A}_1)$ y $\alpha_2 \in S(Q_1\mathbf{A}_2)$. Tenemos que $S(Q_1\mathbf{A}_2)$ es un subespacio de $S(\mathbf{A}_1)^{\perp}$, así que $\alpha_2 \in S(\mathbf{A}_1)^{\perp}$ por lo cual tenemos que $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle = 0$; lo cual implica que los subespacios $S(\mathbf{A}_1)$ y $S(Q_1\mathbf{A}_2)$ son ortogonales. ■

Lema 5.6. *Sean $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ matrices disjuntas y Q_1 el proyector ortogonal sobre el complemento ortogonal de $S(\mathbf{A}_1)$. Entonces se cumple*

$$R(\mathbf{A}_2^t Q_1\mathbf{A}_2) = R(\mathbf{A}_2) = R(Q_1\mathbf{A}_2).$$

Demostración: Tenemos por hipótesis que P_1 es proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{A}_1)$; así, por el lema 5.4 tenemos

$$S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{A}_2) = S(\mathbf{A}_1) + S(Q_1\mathbf{A}_2),$$

y así se cumple,

$$\dim[S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{A}_2)] = \dim[S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_2)].$$

Además, como las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ son disjuntas se tiene que los subespacios $S(\mathbf{A}_1)$ y $S(\mathbf{A}_2)$ son independientes, así tenemos

$$\dim[S(\mathbf{A}_1) + S(\mathbf{A}_2)] = \dim[S(\mathbf{A}_1)] + \dim[S(\mathbf{A}_2)];$$

además por el lema 5.5, los subespacios $S(\mathbf{A}_1)$ y $S(\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_2)$ son ortogonales, así tenemos que

$$\dim[S(\mathbf{A}_1) + S(Q_1\mathbf{A}_2)] = \dim[S(\mathbf{A}_1)] + \dim[S(Q_1\mathbf{A}_2)],$$

Contenido

lo cual implica $R(\mathbf{A}_2) = R(Q_1\mathbf{A}_2)$. Así

$$\begin{aligned} R(\mathbf{A}_2^t Q_1 \mathbf{A}_2) &= R(\mathbf{A}_2^t Q_1 Q_1 \mathbf{A}_2) = R(\mathbf{A}_2^t Q_1^t Q_1 \mathbf{A}_2) \\ &= R((Q_1\mathbf{A}_2)^t (Q_1\mathbf{A}_2)) = R((Q_1\mathbf{A}_2)(Q_1\mathbf{A}_2)) \\ &= R(Q_1\mathbf{A}_2) = R(\mathbf{A}_2). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lema 5.7. *Sean $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ matrices disjuntas y Q_1 proyector ortogonal sobre el complemento ortogonal de $S(\mathbf{A}_1)$. Entonces las matrices*

$$(Q_1\mathbf{A}_2)^- Q_1 \quad \text{y} \quad (\mathbf{A}_2^t Q_1 \mathbf{A}_2)^- \mathbf{A}_2^t Q_1$$

son g-inversas de la matriz $\mathbf{A}_2$.

Demostración: Tenemos por hipótesis que P_1 es el proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{A}_1)$; así, por el lema 5.6 tenemos $R(Q_1\mathbf{A}_2) = R(\mathbf{A}_2)$, y por el lema 3.4 se tiene que $(Q_1\mathbf{A}_2)^- Q_1$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{A}_2$. De igual manera tenemos que se cumple $R(\mathbf{A}_2^t Q_1 \mathbf{A}_2) = R(\mathbf{A}_2)$; así, por el lema 3.5 se tiene que la matriz $(\mathbf{A}_2^t Q_1 \mathbf{A}_2)^- \mathbf{A}_2^t Q_1$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{A}_2$. $\blacksquare$

Observación 5.2. Sean $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ k matrices de orden $m \times r_i$ ($i = 1, \ldots, k$) y formemos la matriz $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_k)$, entonces por construcción, $\mathbf{A}$ será una matriz $m \times r$, donde $r = r_1 + \cdots + r_k$, la matriz $\mathbf{A}$ tendrá una matriz g-inversa de orden $r \times m$, sea $\mathbf{Y}$ tal matriz g-inversa de $\mathbf{A}$ y particionemos la matriz $\mathbf{Y}$ de la siguiente manera

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k \end{pmatrix},$$

donde cada una de las matrices $\mathbf{Y}_i$ ($i = 1, \ldots, k$ es de orden $r_i \times m$.

Teorema 5.1. *Sea la matriz $\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{Y}$ está dada como en la observación anterior, una matriz g-inversa de la matriz $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}_k)$; es decir, $\mathbf{AYA} = \mathbf{A}$. Entonces si las matrices $\mathbf{A}_i$ son disjuntas tenemos*

$$\mathbf{A}_i \mathbf{Y}_i \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_i \mathbf{Y}_i \mathbf{A}_j = \mathbf{0} \qquad i \neq j. \tag{15}$$

Demostración: Tenemos que por la definición de la matriz $\mathbf{Y}$, se cumple

$\mathbf{A}\mathbf{Y}bfA = \mathbf{A}$, lo cual implica

$$\mathbf{A}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{A}_j + \cdots + \mathbf{A}_j\mathbf{Y}_j\mathbf{A}_j + \cdots + \mathbf{A}_k\mathbf{Y}_k\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j,$$

así tenemos

$$\mathbf{A}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{A}_j + \cdots + (\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_j\mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j) + \cdots + \mathbf{A}_k\mathbf{Y}_k\mathbf{A}_j = \mathbf{0},$$

lo cual implica

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{Y}_1\mathbf{A}_j) + \cdots + \mathbf{A}_j(\mathbf{Y}_j\mathbf{A}_j - \mathbf{I}) + \cdots + \mathbf{A}_k(\mathbf{Y}_k\mathbf{A}_j) = \mathbf{0}.$$

Ahora por ser las matrices disjuntas y por el lema 5.1, tenemos que

$$(\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_j\mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{0} \qquad i \neq j,$$

con lo que

$$\mathbf{A}_j\mathbf{Y}_j\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{0} \qquad \text{si} \quad i \neq j. \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado nos da una manera de obtener los proyectores sobre subespacios en términos de las matrices que los generan y de sus respectivas g-inversas.

Corolario 5.1. *Sean $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ k matrices disjuntas y $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_k$ matrices definidas como en el teorema 5.1. Entonces una elección de $P_{i.(i)}$, el proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)}$ está dada por*

$$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Demostración: Se tiene que $\mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i$ es efectivamente un proyector, ya que satisface la condición de idempotencia; es decir,

$$(\mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i)^2 = \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i\mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i.$$

Por el teorema 5.1 se cumple

$$P_{i.(i)}\mathbf{A}_i = \begin{cases} \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i, & \text{si } \mathbf{A}_i \in V_i, \\ \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i\mathbf{A}_j = \mathbf{0}, & \text{si } \mathbf{A}_j \in V_{(i)}. \end{cases}$$

Así, por el teorema 4.1, $P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{Y}_i$ es el proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)}$. $\blacksquare$

Contenido

En lo que resta de este capítulo daremos la forma en la cual podemos representar un operador proyector sobre el subespacio V_i a lo largo de $V_{(i)}$, tales que $V_i \bigoplus V_{(i)} = V_0$, donde V_0 es un subespacio de E^m; dichas representaciones las daremos en términos de las matrices $\mathbf{A}_i$ que generan estos subespacios; así, como por medio de sus g-inversas.

Primeramente trabajaremos con dos matrices disjuntas $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, las cuales generan los subespacios V_1 y V_2 respectivamente, tales que se tiene $V_0 = V_1 \bigoplus V_2$, y daremos la representación del operador proyector $P_{1.2}$ sobre V_1 a lo largo de V_2, en términos de las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ y de las g-inversas de dichas matrices.

Teorema 5.2. *Sean $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ dos matrices disjuntas con sus correspondientes subespacios V_1 y V_2; sean P_1 y P_2 los proyectores ortogonales sobre V_1 y V_2, respectivamente. Entonces $P_{1.2}$, el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2, tiene las siguientes representaciones.*

a)
$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1(\mathbf{QA}_1)^-\mathbf{Q} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{QA}_1(\mathbf{QA}_1)^-)\mathbf{Q}, \tag{16}$$

donde $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^-$ para cualquier matriz g-inversa de $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{Z}$ es arbitraria.

b)
$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_{1.2}^- + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}_{1.2}^- - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_{2.1}^-), \tag{17}$$

donde $\mathbf{A}_{i.j}^-$ es la $\mathbf{A}_j$-g-inversa restringida de $\mathbf{A}_i$ y $\mathbf{Z}$ es arbitraria.

c)
$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^-\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - (\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^-\mathbf{A}_1^t)\mathbf{Q}_2, \tag{18}$$

donde $Q_2 = I - P_2$, es el proyector ortogonal sobre el complemento ortogonal de V_2.

Demostración: *a*) Tenemos por hipótesis que $P_{1.2}$, es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2, así $P_{1.2}$ satisface

$$P_{1.2}\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1 \tag{19}$$

y

$$P_{1.2}\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}. \tag{20}$$

Definamos $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^-$. Tenemos que (20) implica $P_{1.2} = \mathbf{KQ}$ para algún $\mathbf{K}$.

Ahora sustituyendo en (19), obtenemos el sistema consistente $\mathbf{KQA}_1 = \mathbf{A}_1$. Sea la matriz $(\mathbf{QA}_1)^-$ una g-inversa de la matriz $\mathbf{QA}_1$; así, del teorema 3.2 el sistema $\mathbf{KQA}_1 = \mathbf{A}_1$ tiene la solución general

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_1(\mathbf{QA}_1)^- + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{QA}_1(\mathbf{QA}_1)^-).$$

Entonces el operador proyector $P_{1.2} = \mathbf{KQ}$ toma la forma

$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1(\mathbf{QA}_1)^{-}\mathbf{Q} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{QA}_1(\mathbf{QA}_1)^{-})\mathbf{Q}.$$

b) Eligiendo a la matriz $\mathbf{A}_{2.1}^{-}$, $\mathbf{A}_1$-g-inversa restringida de la matriz $\mathbf{A}_2$, en vez de la g-inversa $\mathbf{A}_2^{-}$ en $\mathbf{Q}$, obtenemos $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_{2.1}^{-}$ y a la matriz $\mathbf{A}_{1.2}^{-}$,$\mathbf{A}_2$-g-inversa restringida de la matriz $\mathbf{A}_1$, en vez de la g-inversa $\mathbf{A}_1^{-}$, tenemos que (16),

$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1(\mathbf{QA}_1)^{-}\mathbf{Q} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{QA}_1(\mathbf{QA}_1)^{-})\mathbf{Q},$$

se convierte en

$$\begin{aligned} P_{1.2} &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^{-}\mathbf{Q} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^{-})\mathbf{Q} \\ &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_{1.2}^{-}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_{2.1}^{-}) + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}_{1.2}^{-})(\mathbf{I} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_{2.1}^{-}) \\ &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_{1.2}^{-} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}_{1.2}^{-} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_{2.1}^{-}) \end{aligned}$$

c) Tomando a la matriz g-inversa $(\mathbf{A}_2^t\mathbf{A}_2)^{-}\mathbf{A}_2^t$, en vez de $\mathbf{A}_2^{-}$, obtenemos el proyector ortogonal sobre V_2, P_2, y así el proyector $Q_2 = I - P_2$; ahora por el lema 5.7 tenemos que tanto $(\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{Q}_2$, como $(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2$ son matrices g-inversas de la matriz $\mathbf{A}_1$; así en vez de la matriz g-inversa $(\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{Q}_2$ podemos tomar a la matriz $(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2$, y así (16),

$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1(\mathbf{QA}_1)^{-}\mathbf{Q} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - (\mathbf{QA}_1)(\mathbf{QA}_1)^{-})\mathbf{Q}$$

toma la forma

$$\begin{aligned} P_{1.2} &= \mathbf{A}_1(\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - (\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)(\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-})\mathbf{Q}_2, \\ &= \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Z}(\mathbf{Q}_2 - (\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)(\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{Q}_2), \\ &= \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Z}(\mathbf{Q}_2 - (\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2). \end{aligned}$$

Con esto obtenemos la representación

$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - (\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_1^t\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1)^{-}\mathbf{A}_1^t)\mathbf{Q}_2. \qquad \blacksquare$$

El siguiente corolario presenta una generalización del teorema 5.2 a k matrices disjuntas.

Teorema 5.3. *Sean $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$, matrices disjuntas generando los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_k$, respectivamente. Entonces el operador proyector sobre*

V_i a lo largo de $V_{(i)}$, tiene las siguientes representaciones:

a) $$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0; \tag{21}$$

b) $$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0 \tag{22}$$

donde $P_{(i)}$ es el proyector ortogonal sobre $V_{(i)}$, $Q_{(i)} = I - P_{(i)}$ y P_0 es el proyector ortogonal sobre el subespacio $V_0 = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_k$ y $\mathbf{Z}$ arbitrario.

Demostración: *a*) Por el teorema 5.2 para dos matrices disjuntas $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, tomando $V_0 = V_1 \bigoplus V_2$, la representación del operador proyector sobre V_1 a lo largo de V_2, $P_{1.2}$, está dada por

$$P_{1.2} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}^-_{1.2} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}^-_{1.2} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}^-_{2.1}). \tag{23}$$

El subespacio $V_0 = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_k$ se puede expresar por medio de $V_0 = V_i \bigoplus V_{(i)}$ así de (23) tenemos:

$$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} - \mathbf{A}_{(i)}\mathbf{A}^-_{(i).i}). \tag{24}$$

Definamos $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_i \cdots \mathbf{A}_{(i)})$ y $\mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^-_{i.(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^-_{(i).i} \end{pmatrix}$. Se tiene $\mathbf{A}\mathbf{A}^- = \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} + \mathbf{A}_{(i)}\mathbf{A}^-_{(i).i}$, así (24) toma la forma

$$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^-).$$

Además, $\mathbf{A}^-$ es una g-inversa de la matriz $\mathbf{A}$, por lo que $\mathbf{A}\mathbf{A}^-$ es un proyector sobre V_0; ahora eligiendo a la g-inversa $(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^-\mathbf{A}^t$ en vez de la g-inversa $\mathbf{A}^-$ obtenemos

$$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^-\mathbf{A}^t),$$

pero $\mathbf{A}(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^-\mathbf{A}^t$ es el proyector ortogonal P_0 sobre V_0. Así se concluye que $P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0$.

b) Tenemos del inciso (a) que una representación del operador proyector $P_{i.(i)}$ está dada por $P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}^-_{i.(i)} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0$, con lo que, tomando a

$(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}$ como una g-inversa de $\mathbf{A}_i$, obtenemos

$$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0. \qquad \blacksquare$$

Las expresiones para los proyectores obtenidas en el teorema 5.3 son válidas cuando estamos en algún subespacio de E^m. Ahora, por resultados anteriores, daremos la representación de los proyectores en el espacio total E^m a través del subespacio complemento ortogonal del subespacio V_0.

Teorema 5.4. *Sean V_i y $P_{i.(i)}$ como en el teorema 5.3, y sea $V_0^\perp$ el complemento ortogonal de V_0. Entonces $P_{i.(i)*}$, la extensión de $P_{i.(i)}$ a E^m a través de $V_0^\perp$, tiene las siguientes representaciones.*

a)
$$P_{i.(i)^*} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i.(i)}^-\mathbf{P}_0$$

b)
$$P_{i.(i)^*} = \mathbf{A}_i(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}$$

donde P_0 es el proyector ortogonal sobre V_0.

Demostración: Por el teorema 4.2, el operador proyector $P_{i.(i)^*}$ está dado por $P_{i.(i)}P_0$, donde $P_{i.(i)}$ está dado como en el teorema 5.3 y P_0 es el proyector ortogonal sobre V_0; de lo anterior se tienen los siguientes resultados:
a) Tenemos que $P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i.(i)}^- + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0$, así obtenemos

$$\begin{aligned} P_{i.(i)^*} &= (\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i.(i)}^- + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0)\mathbf{P}_0 \\ &= \mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i.(i)}^-\mathbf{P}_0. \end{aligned}$$

b) Se tiene, por (22), que una representación de $P_{i.(i)}$ está dada por

$$P_{i.(i)} = \mathbf{A}_i(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0.$$

De lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} P_{i.(i)^*} &= (\mathbf{A}_i(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)} + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0)\mathbf{P}_0 \\ &= \mathbf{A}_i(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{P}_0 + \mathbf{Z}\mathbf{Q}_0\mathbf{P}_0. \end{aligned} \tag{25}$$

Los proyectores ortogonales $P_{(i)}$ y P_0, cumplen $P_{(i)}P_0 = P_0P_{(i)}$ por el teo-

Contenido

rema 2.3, lo cual implica $Q_{(i)}P_0 = P_0Q_{(i)}$, así se tiene

$$\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{P}_0 = (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^t = (\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{P}_0\mathbf{A}_i)^t = (\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^t = \mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}.$$

Por lo tanto, de (25), obtenemos el resultado:

$$P_{i.(i)^*} = \mathbf{A}_i(\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}\mathbf{A}_i)^-\mathbf{A}_i^t\mathbf{Q}_{(i)}. \qquad \blacksquare$$

6. Agradecimientos

Los autores agradecen la valiosa ayuda del réferi por sus correcciones y comentarios, los cuales fueron fundamentales para la publicación de este artículo.

6. Referencias

[1] Noble, Ben y James W. Daniel, *Álgebra lineal aplicada*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1989.

[2] Halmos, P.R., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, segunda edición, Princeton, Nueva Jersey, Van Nostrand, 1958.

[3] Hoffman, K. y K. Kunze, *Álgebra lineal*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1973.

[4] Rao, O.R. y S. K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, Nueva York, John Wiley, 1971.

Contenido