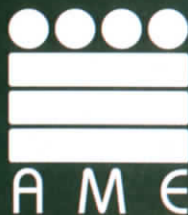
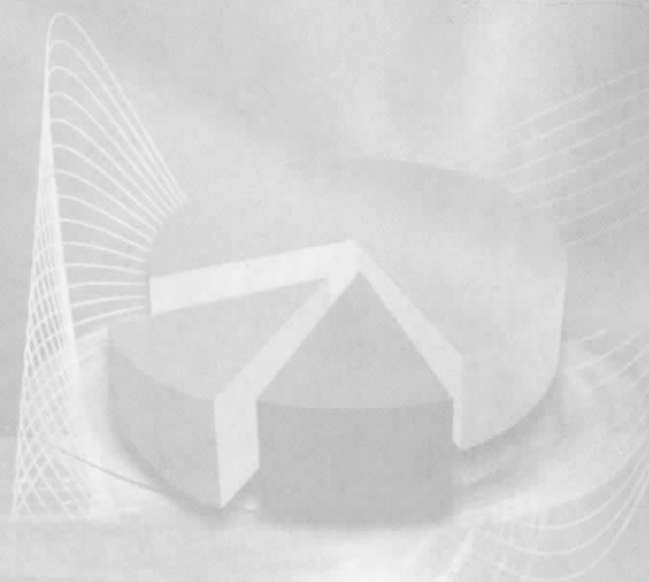


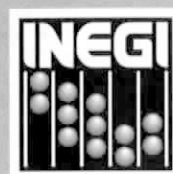
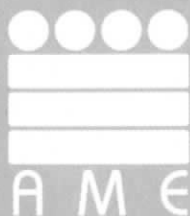


# Memoria del XXIV Foro Nacional de Estadística





# Memoria del XXIV Foro Nacional de Estadística



INSTITUTO NACIONAL  
DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA

310.4 Foro Nacional de Estadística (24° : 2009 : Texcoco, Estado de México).

Memoria del XXIV Foro Nacional de Estadística / Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Asociación Mexicana de Estadística. -- México : INEGI, c2010.

176 p. : il.

ISBN 978-607-494-106-7

“Colegio de Postgraduados. Texcoco, Estado de México del 12 al 16 de octubre del 2009”

1. Estadística - Alocuciones, Ensayos, Conferencias. I. Instituto Nacional de Estadística y Geografía. II. Asociación Mexicana de Estadística.

DR © 2010, **Instituto Nacional de Estadística y Geografía**  
Edificio Sede  
Av. Héroe de Nacozari Sur Núm. 2301  
Fracc. Jardines del Parque, CP 20276  
Aguascalientes, Ags.

[www.inegi.org.mx](http://www.inegi.org.mx)  
[atencion.usuarios@inegi.org.mx](mailto:atencion.usuarios@inegi.org.mx)

**Memoria  
del XXIV Foro  
Nacional de Estadística**

Impreso en México  
ISBN 978-607-494-106-7

Esta publicación consta de 1 779 ejemplares y se terminó de imprimir en septiembre de 2010 en los talleres gráficos del **Instituto Nacional de Estadística y Geografía**  
Av. Héroe de Nacozari Sur Núm. 2301, Puerta 11, Nivel Acceso  
Fracc. Jardines del Parque, CP 20276  
Aguascalientes, Ags.  
**México**

# Presentación

En estas memorias publicamos los resúmenes de algunas contribuciones libres presentadas durante el XXIV Foro Nacional de Estadística. La institución sede fue el Colegio de Postgraduados y el evento tuvo lugar en Texcoco, Estado de México, del 12 al 16 de octubre de 2009.

El volumen está integrado por tres secciones:

- I. Trabajos de investigación,
- II. Aplicaciones,
- III. Tesis de licenciatura y maestría.

Los trabajos fueron sometidos a un proceso de arbitraje coordinado por la mesa directiva de la Asociación Mexicana de Estadística. En este proceso, todos los artículos fueron revisados en su forma y contenido; siguiendo, en todo momento, criterios mínimos para evaluar la calidad en sus propuestas, resultados y aplicaciones, con énfasis en la originalidad para los trabajos de la Sección I.

Agradecemos profundamente a todos los autores por su entusiasmo y por la calidad de los trabajos presentados. Agradecemos, además, a todos aquellos colegas que nos apoyaron participando como árbitros, pues con su esfuerzo, contribuyen a la calidad académica de estas memorias. En nombre de la Asociación Mexicana de Estadística expresamos también nuestra gratitud al Colegio de Postgraduados por el apoyo en la realización de este Foro, y al Instituto Nacional de Estadística y Geografía por patrocinar la edición e impresión de esta obra.

**El Comité Editorial:**

Yolanda Margarita Fernández Ordoñez,  
Silvia Ruiz Velasco Acosta.



# Índice general

## Sección I. Trabajos de Investigación

<b>Algunas propiedades de los conjuntos convexos de Barnard y aplicaciones a pruebas de no-inferioridad . . . . .</b>	<b>5</b>
<i>Félix Almendra Arao</i>	
<b>La prueba de no inferioridad basada en la z-estadística asintótica ponderada</b>	<b>13</b>
<i>Félix Almendra Arao</i>	
<b>Estimadores ridge en regresión logística cuando hay separación en los datos y colinealidad . . . . .</b>	<b>19</b>
<i>Elia Barrera Rodriguez, Flaviano Godínez Jaimes, Francisco J. Ariza Hernández, Ramón Reyes Carreto</i>	
<b>Series de tiempo con múltiples puntos de cambio y observaciones censuradas</b>	<b>25</b>
<i>René Castro Montoya, Gabriel A. Rodríguez Yam, Sergio Pérez Elizalde</i>	
<b>Intervalos de confianza para el tamaño de una población de difícil detección en el muestreo por bola de nieve y probabilidades de nominación heterogéneas . . . . .</b>	<b>33</b>
<i>Martín H. Félix Medina, Aida N. Aceves Castro y Pedro E. Monjardin</i>	
<b>Curso de Estadística en b-learning basado en los estilos de aprendizaje de los discentes . . . . .</b>	<b>41</b>
<i>José Luis García Cué, José Antonio Santizo Rincón, Mercedes Jiménez Velázquez</i>	
<b>Puntos de cambio en modelos lineales mixtos . . . . .</b>	<b>53</b>
<i>Jésica Hernández Rojano</i>	

<b>Un estimador insesgado de la varianza del muestreo aleatorio simple usando un diseño mixto aleatorio sistemático . . . . .</b>	<b>61</b>
<i>Alberto Manuel Padilla Terán</i>	
<b>El uso de muestras condicionalmente independientes (look alike) en pruebas de bondad de ajuste en modelos lineales generalizados . . . . .</b>	<b>69</b>
<i>Silvia Ruiz Velasco Acosta, Lizbeth Naranjo Albarrán</i>	
<b>¿Es la prueba de Blackwelder de no-inferioridad para dos proporciones la mejor prueba disponible? . . . . .</b>	<b>75</b>
<i>David Sotres-Ramos, Cecilia Ramírez-Figueroa</i>	
<b>Caracterización del BLUP de la media poblacional en el modelo lineal general mixto . . . . .</b>	<b>83</b>
<i>Fernando Velasco Luna, Mario Miguel Ojeda Ramírez</i>	
<b>Construcción de un índice multivariado comparable en el tiempo . . . . .</b>	<b>91</b>
<i>José Vences Rivera, Marco Antonio Flores Nájera</i>	
<b>Una prueba por remuestreo para la distribución gamma . . . . .</b>	<b>103</b>
<i>José A. Villaseñor Alva, Elizabeth González Estrada</i>	
<b>Log-linear models of categorized variables under distributional assumptions</b>	<b>109</b>
<i>Alexander von Eye, Julian von Eye, Patrick Mair</i>	

## Sección II. Aplicaciones

<b>Efecto de marcas de cemento en la resistencia del concreto . . . . .</b>	<b>119</b>
<i>Alfredo Cuevas Sandoval, Flaviano Godínez Jaimes, Esteban Rogelio Guinto Herrera, Roberto Arroyo Matus</i>	
<b>Análisis de patrones espaciales de hongos ectomicorrízicos en el parque nacional Malintzi . . . . .</b>	<b>125</b>
<i>Linares Fleites, G. , Marín Castro, M.A., Ticante Roldán, J.A. y Silva Díaz, B</i>	

---

<b>Análisis de conglomerados en el estudio de siete razas de maíz . . . . .</b>	<b>131</b>
<i>Emilio Padrón Corral, Armando Muñoz Urbina, José Luís de la Riva Canizales, Manuel Antonio Torres Gomar, Ignacio Méndez Ramírez</i>	
<b>Efecto de la presencia de datos faltantes en la estimación de componentes de varianza de la interacción genotipo x ambiente . . . . .</b>	<b>137</b>
<i>Víctor Prieto Hernández, Juan Burqueño</i>	
<b>Modelación de los factores ambientales en niveles altos de ozono . . . . .</b>	<b>143</b>
<i>Sara Rodríguez R., Hortensia Reyes C., Gladys Linares F., Humberto Vaquera H.</i>	
<b>Estimación de vida útil mediante análisis de datos censurados y pruebas de vida acelerada. . . . .</b>	<b>151</b>
<i>Fidel Ulín-Montejo, Rosa Ma. Salinas-Hernández y Gustavo A. González Aguilar</i>	

### **Sección III. Tesis de licenciatura y maestría**

<b>A parametric measure of dispersion derived from the generalized mean . .</b>	<b>161</b>
<i>Víctor M. Guerrero, Claudia Solís-Lemus</i>	
<b>Análisis bayesiano del modelo INAR(1) . . . . .</b>	<b>169</b>
<i>Lizbeth Naranjo Albarrán, Eduardo Gutiérrez Peña</i>	









# Caracterización del BLUP de la media poblacional en el modelo lineal general mixto

Fernando Velasco Luna<sup>a</sup>, Mario Miguel Ojeda Ramírez<sup>b</sup>  
*Facultad de Estadística e Informática. Universidad Veracruzana*

## 1. Introducción

La teoría de espacios vectoriales de dimensión finita proporciona un marco para trabajar en forma didáctica los procesos de inferencia en el modelo lineal general (MLG). Conceptos como subespacio columna y operador proyector, juegan un papel de suma importancia en la estadística teórica, en particular en el estudio de la estimación y predicción en el MLG. La caracterización de estimadores en el MLG por medio del operador proyector permite comprender sus propiedades y plantear generalizaciones de la inferencia. Por otro lado, la teoría de muestreo para poblaciones finitas se encarga de la selección de muestras, de las que se observan y miden características de cada una de las unidades muestreadas; usando estas observaciones la teoría estadística, en este contexto, desarrolla mecanismos para conducir inferencias acerca de ciertas características de la población, como por ejemplo la media poblacional  $\bar{Y} = T/N$  [?]. Uno de los enfoques de inferencia en la teoría de muestreo de poblaciones finitas para estudiar los procesos de inferencia en el muestreo bietápico es el basado en el Modelo Lineal General Mixto (MLGM). En este enfoque se considera el modelo  $\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j\mathbf{u}_j + \mathbf{e}_j$ , en la  $j$ -ésima unidad de nivel 2, la cual cuenta con  $N_j$  unidades; sea  $\mathbf{s}_j$  la muestra de  $n_j$  unidades en la  $j$ -ésima área pequeña, la cual cuenta con  $N_j$  unidades en la población,  $\mathbf{r}_j$  denotando las unidades en la  $j$ -ésima área que no están en  $\mathbf{s}_j$  y  $r_j = N_j - n_j$  el número de unidades no muestreadas. Una vez que la muestra  $\mathbf{s}_j$  ha sido obtenida se tiene la descomposición del modelo para la parte observada, que está dado por:

$$\mathbf{Y}_{j\mathbf{s}} = \mathbf{X}_{j\mathbf{s}}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_{j\mathbf{s}}\mathbf{u}_j + \mathbf{e}_{j\mathbf{s}} \quad (1)$$

---

<sup>a</sup>fvelasco@uv.mx

<sup>b</sup>mojeda@uv.mx

y el modelo para la parte no observada, que está dado por:

$$\mathbf{Y}_{jr} = \mathbf{X}_{jr}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_{jr}u_j + \mathbf{e}_{jr}. \quad (2)$$

La media de la población finita en la  $j$ -ésima unidad de nivel 2  $\bar{Y}_j = N_j^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} Y_{ij}$  se puede descomponer en la media obtenida de la muestra  $\bar{Y}_{js}$  más la media de las unidades no muestreadas  $\bar{Y}_{jr}$ . Para la parte no muestreada se debe de tener una estimación de la media poblacional  $\mu_j$  de la  $j$ -ésima unidad de nivel 2, la cual es un efecto mixto. Por la teoría de Henderson (1975) [?] un predictor del efecto mixto  $\mu_j$  está dado por medio de  $\bar{\mathbf{X}}_{jr} \hat{\boldsymbol{\beta}} + \bar{\mathbf{Z}}_{jr} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{Z}_{js}^t \mathbf{V}_{jss}^{-1} \left( \mathbf{Y}_{js} - \mathbf{X}_{js} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)$  donde  $\bar{\mathbf{X}}_{jr}$  y  $\bar{\mathbf{Z}}_{jr}$  son los vectores de medias para las  $r_j$  unidades no muestreadas en la  $j$ -ésima unidad de nivel 2. Aunque en la literatura se conocen suficientes resultados acerca de la teoría del álgebra lineal relacionada con la teoría de estimación y prueba de hipótesis en el modelo lineal general (MLG), no existen resultados que caracterizen al mejor predictor lineal insesgado (*BLUP*) de la media poblacional  $\mu_j$  de la  $j$ -ésima unidad de nivel 2 en términos de las matrices de proyección. En este trabajo se presenta la caracterización del *BLUP* de la media poblacional  $\mu_j$  en términos de los operadores proyector, ortogonal  $\mathbf{P}_Z = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^t\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^t$  y oblicuo  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}$ , definidos sobre los subespacios generados por las matrices de diseño.

## 2. Marco teórico

Se considera el modelo dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}, \\ \mathbf{u} &\sim N(\mathbf{0}, \sigma_u^2 \mathbf{I}_J), \quad \mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_n), \\ \text{Cov}(\mathbf{e}, \mathbf{u}^t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Z}$  son matrices de orden  $n \times p$  y  $n \times J$  respectivamente y  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ . En este caso la matriz de varianzas y covarianzas de  $\mathbf{Y}$  está dada por  $\mathbf{V} = \text{Var}(\mathbf{Y}) = \sigma_u^2 \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n$ .

Henderson (1975) obtiene el mejor estimador lineal insesgado (*BLUE*) de  $\boldsymbol{\beta}$  y el *BLUP* de  $\mathbf{u}$ , que están dados por  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}$  y  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{Z}^t\mathbf{V}^{-1} \left( \mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)$ , respectivamente. Además del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{k}^t\boldsymbol{\beta} + \mathbf{m}^t\mathbf{u}$  que está dado por:

$$\mathbf{k}^t \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{m}^t \hat{\mathbf{u}}. \quad (4)$$

### 3. Caracterización del BLUP del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$

En esta sección se presenta la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  en términos de los operadores  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ .

**Teorema 3.1.** *Bajo el modelo (3), si se cumple la condición  $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$ , entonces el BLUP del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  se expresa en términos de los operadores, proyector oblicuo  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$  sobre  $S(\mathbf{X})$  y proyector ortogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$  sobre  $S(\mathbf{Z})$  por:*

$$[\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}]\mathbf{Y}, \quad (5)$$

donde  $\mathbf{B} = \bigoplus_{j=1}^J (b_j\mathbf{I}_{n_j})$  y  $b_j = n_j\sigma_{u_0}^2 / (n_j\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$ .

*Demostración.* Si se cumple la condición  $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$ , entonces la matriz  $\mathbf{V}$  se expresa en términos de los operadores proyector  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}$  y  $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}$  por  $\mathbf{V} = \bigoplus_{j=1}^J [(n_j\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}]$ , y la inversa  $\mathbf{V}^{-1}$  se expresa por  $\mathbf{V}^{-1} = \bigoplus_{j=1}^J \left[ \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2} \right]$ , de lo cual y de (4) se tiene:

$$\begin{aligned} BLUP(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}) &= \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \sigma_{u_0}^2\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \left( \bigoplus_{j=1}^J \left[ \frac{n_j\sigma_{u_0}^2\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)} \right] \right) (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} \left( \bigoplus_{j=1}^J \left[ \frac{n_j\sigma_{u_0}^2\mathbf{I}_{n_j}}{(n_j\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)} \right] \right) (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}), \end{aligned}$$

definiendo  $b_j = n_j\sigma_{u_0}^2 / (n_j\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$  y  $\mathbf{B} = \bigoplus_{j=1}^J (b_j\mathbf{I}_{n_j})$  se obtiene (5).

**Corolario 3.1.** *Bajo el modelo (3), si se cumple  $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$ , entonces el BLUP del efecto aleatorio  $\mathbf{Z}\mathbf{u}$  se expresa en términos de los operadores proyector, oblicuo  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$  sobre  $S(\mathbf{X})$  y ortogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$  sobre  $S(\mathbf{Z})$ , por medio de  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y}$ , donde  $\mathbf{B} = \bigoplus_{j=1}^J (b_j\mathbf{I}_{n_j})$  y  $b_j = n_j\sigma_{u_0}^2 / (n_j\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$ .*

**Observación.** Dada una matriz  $\mathbf{Z}_j$  de orden  $n_j \times q$ , la condición  $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$  se cumple si  $\mathbf{Z}_j^t\mathbf{Z}_j = n_j\mathbf{I}_q$ , lo cual ocurre si las columnas de la matriz  $\mathbf{Z}_j$  son ortogonales y además se cumple la condición  $\sum_{i=1}^{n_j} z_{ij}^2 = n_j$ .

## 4. Caracterización del *BLUP* de la media poblacional

$\mu_j$

En esta sección se presenta la caracterización del *BLUP* de la media poblacional  $\mu_j$  de la  $j$ -ésima unidad de nivel 2 en términos de los operadores  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}\mathbf{V}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ , y de una transformación lineal definida sobre el subespacio  $S(\mathbf{X}_j)$  generado por la matriz de diseño  $\mathbf{X}_j$ .

Una vez que la muestra  $\mathbf{s}$  ha sido obtenida el vector  $\mathbf{Y}$ , las matrices  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{V}$ , los operadores  $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}\mathbf{V}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ , la estimación del parámetro  $\boldsymbol{\beta}$  y la predicción del efecto aleatorio  $u_j$  se denotarán por medio de  $\mathbf{Y}_{\mathbf{s}}$ ,  $\mathbf{X}_{\mathbf{s}}$ ,  $\mathbf{V}_{\mathbf{s}}$ ,  $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}_{\mathbf{s}}\mathbf{V}_{\mathbf{s}}}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\mathbf{s}}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{s}}$  y  $\hat{u}_{j\mathbf{s}}$  respectivamente.

**Teorema 4.1.**  $\mathbf{T}_{j\mathbf{s}}$  dada por  $\mathbf{T}_{j\mathbf{s}} = \mathbf{X}_j (\mathbf{X}_{\mathbf{s}}^t \mathbf{V}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{X}_{\mathbf{s}})^{-1} \mathbf{X}_{\mathbf{s}}^t \mathbf{V}_{\mathbf{s}}^{-1}$  define una transformación lineal de  $\mathbb{R}^s$  a  $\mathbb{R}^j$ .

**Teorema 4.2.** Bajo el modelo (3) si se cumple la condición  $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{j\mathbf{s}}} = \mathbf{Z}_{j\mathbf{s}} \mathbf{Z}_{j\mathbf{s}}^t$ , entonces el *BLUP* del efecto mixto  $\bar{X}_j^t \boldsymbol{\beta} + u_j$  se expresa en términos de los operadores proyector  $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}_{\mathbf{s}}\mathbf{V}_{\mathbf{s}}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\mathbf{s}}}$ , y de la transformación lineal  $\mathbf{T}_{j\mathbf{s}}$  por:

$$\left[ \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t}{N_j} \mathbf{T}_{j\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*j\mathbf{s}t}}{n_{j\mathbf{s}}} (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\mathbf{s}}} \mathbf{B}_{\mathbf{s}} \mathbf{Q}_{\mathbf{X}_{\mathbf{s}}\mathbf{V}_{\mathbf{s}}}) \right] \mathbf{Y}_{\mathbf{s}}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{B}_{\mathbf{s}} = \bigoplus_{j=1}^J (b_j \mathbf{I}_{n_j})$  y  $b_j = n_j \sigma_{u_0}^2 / (n_j \sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$ .

*Demostración.* Del corolario 3.1, el *BLUP* de  $\mathbf{Z}\mathbf{u}$  se expresa en términos de los operadores proyector, oblicuo  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_{\mathbf{s}}\mathbf{V}_{\mathbf{s}}}$  sobre  $S(\mathbf{X}_{\mathbf{s}})$  y ortogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\mathbf{s}}}$  sobre  $S(\mathbf{Z}_{\mathbf{s}})$ , por:

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\mathbf{s}}} \mathbf{B}_{\mathbf{s}} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}_{\mathbf{s}}\mathbf{V}_{\mathbf{s}}})) \mathbf{Y}_{\mathbf{s}}, \quad (7)$$

donde  $\mathbf{B}_{\mathbf{s}} = \bigoplus_{j=1}^J (b_j \mathbf{I}_{n_j})$  y  $b_j = n_j \sigma_{u_0}^2 / (n_j \sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$ . La relación entre el *BLUP* del vector  $\mathbf{Z}\mathbf{u}$  y el *BLUP* de  $u_j$  está dada por:

$$BLUP(u_j) = \frac{\mathbf{1}_n^{*j^t}}{n_j} BLUP(\mathbf{Z}\mathbf{u}), \quad (8)$$

donde  $\mathbf{1}_n^{*j^t}$  es un vector en  $\mathbb{R}^n$  de 0's con un 1 en las posiciones correspondientes a las unidades de nivel 1 que pertenecen a la  $j$ -ésima unidad de nivel 2. Así de (7) y (8) el *BLUP* del efecto aleatorio  $u_j$  se expresa en términos de los operadores proyector  $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}_{\mathbf{s}}\mathbf{V}_{\mathbf{s}}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\mathbf{s}}}$ , por:

$$\frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*j\mathbf{s}t}}{n_{j\mathbf{s}}} (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{\mathbf{s}}} \mathbf{B}_{\mathbf{s}} \mathbf{Q}_{\mathbf{X}_{\mathbf{s}}\mathbf{V}_{\mathbf{s}}}) \mathbf{Y}_{\mathbf{s}}. \quad (9)$$

$\overline{X}_j^t \boldsymbol{\beta} + u_j$  es un efecto mixto, así su *BLUP* está dado por  $\overline{X}_j^t \hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \hat{u}_{js}$ , y de (9)

$$\begin{aligned} BLUP \left( \overline{X}_j^t \boldsymbol{\beta} + u_j \right) &= \overline{X}_j^t \hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \hat{u}_{js} = \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t \mathbf{X}_j}{N_j} \hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \hat{u}_{js} \\ &= \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t \mathbf{X}_j}{N_j} (\mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^t \mathbf{V}_s^{-1} \mathbf{Y}_s + \hat{u}_{js} \\ &= \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t}{N_j} \mathbf{T}_{js} \mathbf{Y}_s + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*jst}}{n_{js}} (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s} \mathbf{B}_s \mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s \mathbf{V}_s}) \mathbf{Y}_s. \end{aligned}$$

La media poblacional  $\mu_j$  se define como  $E(\overline{Y}_j | u_j)$ , que bajo el modelo (2) con  $\mathbf{Z}_j = \mathbf{1}_{n_j}$  está dada por  $\overline{X}_j^t \boldsymbol{\beta} + u_j$ . Cuando  $n_j/N_j$  es insignificante  $\mu_j$  toma la forma  $\overline{X}_j^t \boldsymbol{\beta} + u_j$ .

**Teorema 4.3.** *Bajo el modelo (3) si se cumple la condición  $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_{js}} = \mathbf{Z}_{js} \mathbf{Z}_{js}^t$ , y si  $n_j/N_j$  es insignificante, entonces el *BLUP* de  $\mu_j$  se expresa en términos de los operadores proyector  $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s \mathbf{V}_s}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s}$ , y de la transformación lineal  $\mathbf{T}_{js}$  por:*

$$\left[ \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t}{N_j} \mathbf{T}_{js} + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*jst}}{n_{js}} (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s} \mathbf{B}_s \mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s \mathbf{V}_s}) \right] \mathbf{Y}_s, \quad (10)$$

donde  $\mathbf{B}_s = \bigoplus_{j=1}^J (b_j \mathbf{I}_{n_j})$  y  $b_j = n_j \sigma_{u_0}^2 / (n_j \sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$ .

*Demostración.* Como  $\mu_j$  es el efecto mixto  $\overline{X}_j^t \boldsymbol{\beta} + u_j$ , su *BLUP* está dado por  $\overline{X}_j^t \hat{\boldsymbol{\beta}}_s + \hat{u}_{js}$  y del teorema 4.2, el *BLUP* de  $\mu_j$  se expresa en términos de  $\mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s \mathbf{V}_s}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s}$  y  $\mathbf{T}_{js}$ , por:

$$\left[ \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t}{N_j} \mathbf{T}_{js} + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*jst}}{n_{js}} (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s} \mathbf{B}_s \mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s \mathbf{V}_s}) \right] \mathbf{Y}_s,$$

## 5. Caracterización en el modelo sólo intercepto

Se presenta la caracterización del *BLUP* de la media poblacional  $\mu_j$ , considerando el caso balanceado, es decir  $n_j = d \forall j = 1, \dots, k$ , bajo el modelo sólo intercepto sin variables explicatorias, dado por:

$$Y_{ij} = \mu + u_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, k. \quad (11)$$

donde  $\mu$  es un parámetro fijo;  $u_j$  es el efecto aleatorio;  $u_j$  y  $e_{ij}$  son independientes, con  $u_j \sim N(0, \sigma_{u_0}^2)$  y  $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ . El modelo para la  $j$ -ésima unidad de nivel 2 tiene la forma  $\mathbf{Y}_j = \mathbf{1}_d \mu + \mathbf{1}_d u_j + \mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ .



**Teorema 5.1.** *Bajo el modelo sólo intercepto sin variables explicatorias (11), considerando el caso balanceado y si  $n_j/N_j$  es insignificante, entonces el BLUP de la media poblacional  $\mu_j$  está dado por:*

$$\bar{Y}_s + \frac{c(k-1)}{k} [\bar{Y}_{js} - \bar{Y}_{(-j)s}] \quad (12)$$

donde  $\bar{Y}_s$ ,  $\bar{Y}_{js}$  y  $\bar{Y}_{(-j)s}$  denotan la media muestral, la media muestral de la  $j$ -ésima unidad de nivel 2, y la media muestral de las unidades de nivel 1 que no pertenecen a la  $j$ -ésima unidad de nivel 2, respectivamente.

*Demostración.* Definiendo  $c = d\sigma_{u0}^2 / (d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)$ , por (10) del teorema 4.3, el BLUP de  $\mu_j$  está dado por  $\left[ \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t}{N_j} \mathbf{T}_{js} + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*jst}}{d} (c\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_s} \mathbf{Q}_{\mathbf{X}_s} \mathbf{V}_s) \right] \mathbf{Y}_s$ . Además se cumple para el modelo sólo intercepto (11): a)  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \frac{\mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t}{kd}$ , b)  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$  y c)  $\mathbf{T}_{js} = \frac{\mathbf{1}_{N_j} \mathbf{1}_{kd}^t}{kd}$ , así:

$$\begin{aligned} BLUP(\mu_j) &= \left[ \frac{\mathbf{1}_{N_j}^t}{N_j} \frac{\mathbf{1}_{N_j} \mathbf{1}_{kd}^t}{kd} + \frac{\mathbf{1}_{n_s}^{*jst}}{d} \left[ \frac{c}{kd} (k(\oplus \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t) - \mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t) \right] \right] \mathbf{Y}_s \\ &= \left[ \frac{N_j}{N_j} \frac{\mathbf{1}_{kd}^t}{kd} + \frac{c}{kdd} \left[ \mathbf{1}_{n_s}^{*jst} (k(\oplus \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t) - \mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t) \right] \right] \mathbf{Y}_s \\ &= \frac{\mathbf{1}_{kd}^t}{kd} \mathbf{Y}_s + \frac{c}{kdd} \left[ d (k \mathbf{1}_{n_s}^{*jst} - \mathbf{1}_{kd}^t) \right] \mathbf{Y}_s \\ &= \bar{Y}_s + \frac{c}{kd} [(k-1) d \bar{Y}_{js} - (kd-d) \bar{Y}_{(-j)s}] \\ &= \bar{Y}_s + \frac{c(k-1)}{k} [\bar{Y}_{js} - \bar{Y}_{(-j)s}]. \end{aligned}$$

## 6. Conclusiones

En este trabajo se expresó el BLUP de la media poblacional  $\mu_j$  como la suma ponderada de un elemento en  $S(\mathbf{X}_j)$  y un elemento en el espacio  $S(\mathbf{Z}_s)$ . Lo anterior al aplicarlo al modelo sólo intercepto sin variables explicatorias, considerando el caso balanceado, permitió expresar el BLUP de la media poblacional  $\mu_j$  como la suma de la media muestral, y un múltiplo de la diferencia entre las medias muestrales  $\bar{Y}_{js}$  y  $\bar{Y}_{(-j)s}$ , que denotan la media muestral de las unidades de nivel 1 en la  $j$ -ésima unidad de nivel 2 y la media muestral de las unidades de nivel 1 que no pertenecen a la  $j$ -ésima unidad de nivel 2, respectivamente. Se espera que esta caracterización en términos de los proyectores permita una mejor comprensión de las propiedades del BLUP de  $\mu_j$  tal como sucede en la caracterización del estimador de

parámetros  $\beta$  en el MLG. Al considerar situaciones en las cuales la matriz de diseño  $\mathbf{Z}$  involucre a las columnas de la matriz de diseño  $\mathbf{X}$ , por ejemplo en el modelo de coeficientes aleatorios, se debe cumplir necesariamente que  $\mathbf{X}^t\mathbf{X} = d\mathbf{I}$  para que los resultados presentados se puedan aplicar.

## Referencias

- Henderson, C.R. 1975. Best Linear Unbiased Estimation and Prediction Under a Selection Model. *Biometrics* 31:423-447.
- Valliant, R., Dorfman A. H. y Royall R. M. 2000. *Finite Population Sampling and Inference: A Prediction Approach*. New York: John Wiley.

