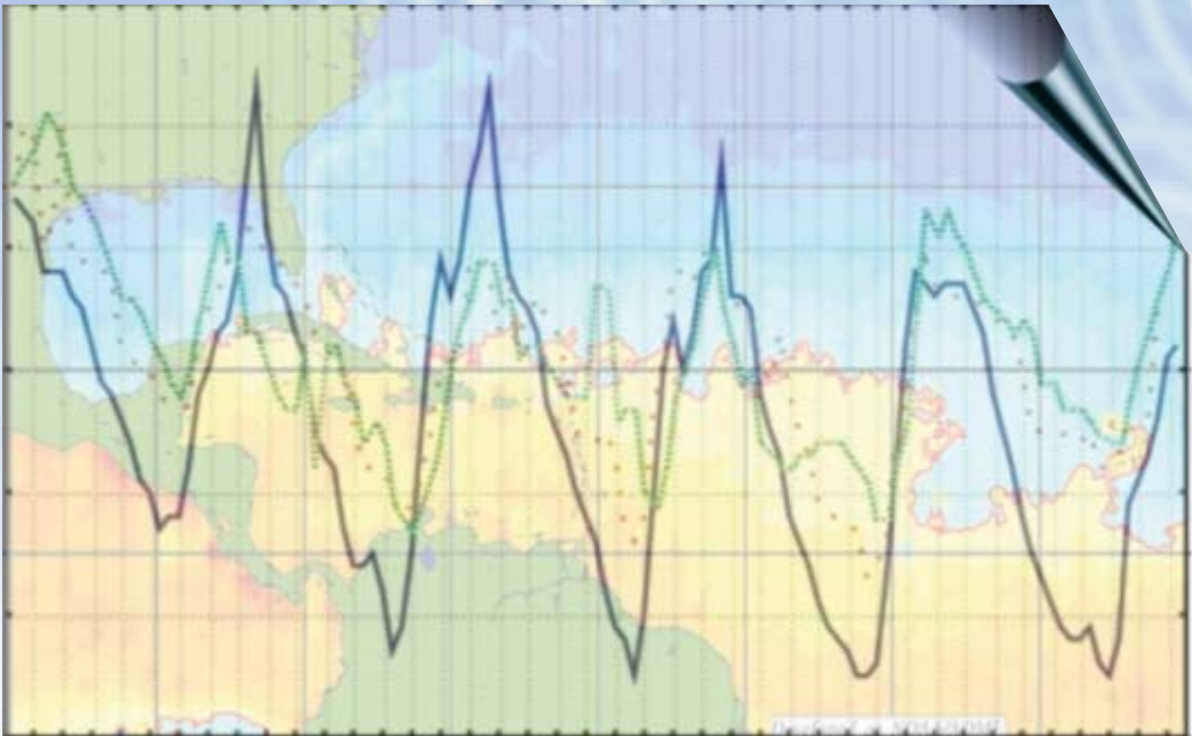




Aportaciones y aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística



Editores:

Francisco Tajonar Sanabria
Hugo Cruz Suárez
Hortensia Reyes Cervantes
José Zacarías Flores

CUERPO ACADEMICO



Aportaciones y Aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística

2010

CUERPO ACADÉMICO



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Dirección General de Fomento Editorial

2010

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Enrique Agüera Ibáñez

Rector

José Ramón Eguibar Cuenca

Secretario General

Lilia Cedillo Ramírez

Vicerectoría de Extensión y Difusión de la Cultura

Carlos Contreras Cruz

Director Editorial

Primera Edición, 2010

ISBN: 978-607-487-233-0

© Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Dirección de Fomento Editorial

2 Norte 1404, CP 72000,

Puebla, Pue.

Teléfono y Fax 01 222 2468559

Impreso y Hecho en México

Printed and made in Mexico

Editores:

Francisco S. Tajonar Sanabria
Hugo A. Cruz Suárez
Hortensia Reyes Cervantes
José D. Zacarías Flores
*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

Revisores:

H. Daniel Cruz Suárez
*División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco*
Francisco J. Ariza Hernández
*Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero*
Félix Almendra Arao
*Departamento de Ciencias Básicas
UPIITA del Instituto Politécnico Nacional*
Hortensia Reyes Cervantes
*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

PREFACIO

En los últimos años la matemática ha tenido un auge importante en la construcción y la modelación de problemas que surgen en las diferentes disciplinas de investigación, aplicación y enseñanza. Además, se ha tenido la necesidad de interactuar y de colaborar con otros investigadores y expertos que manejan los conceptos y herramientas apropiadas de la matemática dando como resultado un trabajo multidisciplinario.

En especial, en Probabilidad y Estadística es notable la necesidad de realizar trabajo conjunto entre científicos y expertos que manejan estas áreas. En este contexto, la importancia de formar una cultura general a través de distintos medios de comunicación, como el material didáctico, realización de eventos de difusión y foros de discusión, que permitan a estudiantes, profesionistas, investigadores y público en general, conocer, plantear y resolver problemas relacionados con la identificación de algunas características relevantes en problemas de Probabilidad y Estadística, para poder realizar una adecuada toma de decisiones.

En esta edición de “Aportaciones y Aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística 2010”, contiene las experiencias de investigadores de gran prestigio Nacional e Internacional, quienes son líderes en el desarrollo y /o aplicación de la Estadística y la Probabilidad.

La presente edición se pudo realizar a través de la invitación hecha por el Cuerpo Académico de Probabilidad de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, a investigadores y expertos en estas áreas.

La estructura del libro está conformada en dos partes: la primera contiene los trabajos de investigación relacionados con la Estadística y la segunda los relacionados con la Probabilidad.

Los trabajos sometidos fueron arbitrados por un Comité revisor conformado por investigadores de la Universidad Autónoma de Guerrero, de la Universidad Autónoma de Tabasco, del Instituto Politécnico Nacional y por miembros del Cuerpo Académico, los cuales fueron reproducidos siguiendo las recomendaciones hechas por los árbitros. Se debe señalar que los trabajos forman parte intelectual de cada uno de los autores. Agradecemos la participación de los revisores que permitieron tener una mejor estructura de los artículos para la edición de este libro.

Finalmente, agradecemos al director de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Dr. Cupatitzio Ramírez Romero, por su colaboración y su apoyo para la publicación de este libro.

*Atentamente
Comité Editorial*

ÍNDICE

Estadística

José del Carmen Jiménez Hernández, María Asunción González Sierra, Williams Gómez López Análisis de la Demanda de Energía Eléctrica	1
Flaviano Godínez Jaimes, Francisco Ariza-Hernández, Ramón Reyes Carreto Abraham, Ramón Herrero Estimación bayesiana en el modelo de supervivencia exponencial loglineal con problemas de colinealidad y censura	17
María Consuelo Escamilla Núñez, Marlene Cortez Lugo, Leticia Hernández Cadena, Albino Barraza Villarreal, Isabelle Romieu Identificación de fuentes de partículas finas en dos localidades de la ciudad de México	29
Miguel Ángel, López Díaz, Román Aguirre Pérez, Pablo Méndez Villalobos Estimación Bayesiana de tasas de mortalidad en regiones pequeñas con dependencia espacial	43
Sara Rodríguez Rodríguez, Hortensia Reyes Cervantes, Gladys Linares Fleites, Humberto Vaquera Huerta, Paulino Pérez Rodríguez Elección de covariables meteorológicas que influyen en las concentraciones de ozono	60
Marcos González Flores, Marco A. González Coronel, Albino Moreno Rodríguez, Salvador Rosas Castilla, Hugo López Ávila Aplicación de los estadísticos T_2 y F en la caracterización de dispersiones sólidas de metronidazol-polietilenglicol 6000 para mejorar la velocidad de dispersión del fármaco	70
Félix Almendra Arao Acerca del desempeño de la prueba clásica asintótica de no inferioridad para dos proporciones	88
Carmen Viada González, Patricia Lorenzo Luaces, Martha Fors López, et. al. Meta-análisis para evaluar la seguridad del anticuerpo monoclonal humanizado CIMAher (nimotuzumab) en pacientes con cáncer avanzado de cabeza y cuello	104
Olga V. Serrano Sánchez, Carlota Guzmán Gómez Las oportunidades de ingreso a la licenciatura de la UNAM: Un análisis de regresión Logística multivariado	117
Sylvia Beatriz Guillermo Peón Construcción de un Índice de Competitividad Municipal mediante la utilización de análisis factorial	131
Gladys Linares Fleites, Lourdes Sandoval Solís, Abner Quiroz Clemente, Guadalupe Romero Vázquez Tabla única versus tabla múltiple: una aplicación en estudios de satisfacción de usuarios en bibliotecas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla	144
Fernando Velasco Luna, Mario Miguel Ojeda Ramírez Caracterización del BLUP del efecto mixto $X\beta + Zu$	153

Probabilidad

Víctor Hugo Vázquez Guevara Modelos $ARX_d(p; q)$ y el problema del seguimiento de trayectorias	173
María del Rocío Ilhuicatzí Roldán, Hugo Cruz Suárez Procesos de Decisión de Markov con Incertidumbre en el Horizonte	191
Carlos Palomino Jiménez, Francisco S. Tajonar Sanabria, Oscar Palmeros Rojas Valuación de una Opción supershare con una barrera de tipo knock-out	201
José Omar López Lira, Sara Mejía Pérez Modelos para la Valoración de una opción de compra Europea	211

Caracterización del $BLUP$ del efecto mixto

$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$

Fernando, Velasco-Luna
Mario Miguel, Ojeda-Ramírez
Facultad de Estadística e Informática,
Universidad Veracruzana,
Av. Xalapa Esq. Avila Camacho s/n,
Xalapa, Veracruz. Código Postal 91020, México,
fvelasco@uv.mx, mojeda@uv.mx

Resumen. El modelo lineal general mixto ($MLGM$) engloba una clase amplia de modelos que permiten la modelación en una gran variedad de situaciones con datos de estructura jerárquica. La teoría del álgebra lineal relacionada con la teoría de estimación y prueba de hipótesis en el modelo lineal general (MLG) no satisface totalmente los requerimientos de la teoría de predicción en el $MLGM$. En el criterio de mínimos cuadrados para definir el mejor ajuste, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios del vector de coeficientes en el MLG se puede expresar en términos del operador proyector ortogonal; así mismo el estimador de mínimos cuadrados generalizados se puede expresar en términos del operador proyector oblicuo. En este trabajo se considera la caracterización del Mejor Predictor Lineal Insesgado ($BLUP$) de un efecto mixto, en el contexto del $MLGM$, en términos del operador proyector ortogonal y del operador proyector oblicuo definidos sobre los espacios generados por las matrices de diseño. Se presenta la condición que debe cumplir una matriz de diseño del modelo bajo la cual el $BLUP$ de un efecto mixto se puede expresar en términos de los operadores. Se consideran casos particulares del $MLGM$ con dos componentes de la varianza.

Abstract. The general linear mixed model ($GLMM$) encompasses a wide class of models useful for a large variety of data with hierarchical structure. However, the linear algebra related to the theory of estimation and testing for the general linear model (GLM) does not satisfy the requirements of the prediction theory of the $GLMM$. For the least squares criterion of goodness of fit, the ordinary least squares estimator in the GLM can be expressed in terms of an orthogonal projection operator; while the generalized least squares estimator can be expressed in terms of an oblique projection operator. In this work we characterize the Best Linear Unbiased Predictor ($BLUP$) of a mixed effect in the context of the $GLMM$ in terms of the orthogonal projection operator and the oblique projection operator defined on spaces spanned by the design matrices. It is presented the condition that a design matrix has to satisfy so that the $BLUP$ of the mixed effect can be expressed in terms of the operators. We consider the unbalanced case and particular cases of the $GLMM$ with two variance components.

Palabras claves: Componentes de la varianza, mejor predictor lineal insesgado, modelo lineal jerárquico.

1. Introducción

Los modelos lineales jerárquicos forman una clase general que permiten la modelación en una gran variedad de situaciones con datos que presentan una estructura jerárquica. Estos modelos tienen una gran variedad de aplicaciones, tales como: investigación educativa (efectividad de escuela, logro escolar), biología (curvas de crecimiento, estudios genéticos), investigación social (análisis de encuestas, estudios de mercado), psicología (análisis de conducta), medicina (ajuste de datos de medidas repetidas y estudios de centros hospitalarios), entre otras. Los modelos lineales jerárquicos tienen una larga historia, pero han recibido especial atención en los últimos años y sus áreas de aplicación se han multiplicado considerablemente (Longford, 1995; Goldstein, 1995; Raudenbush y Bryk, 2002). Recientes desarrollos en cómputo han permitido que se incremente el uso de estos modelos, que son también conocidos como modelos multinivel (Goldstein, 1995), modelos de coeficientes aleatorios (Longford, 1995), modelos de componentes de la varianza y covarianza (Searle *et al.*, 2006), o como modelos de efectos mixtos (Laird y Ware, 1982). Un tratamiento y abundantes referencias acerca de estos modelos se puede encontrar en (Goldstein, 1995; Longford, 1995; Raudenbush y Bryk, 2002). En la actualidad existe software para analizar datos con estructura jerárquica: MLwiN, (Rasbash *et al.*, 2009), S-PLUS (Pinheiro y Bates, 2000), SAS (Littell, *et al.*, 2006), Stata (Rabe and Srondal, 2008).

La teoría de espacios vectoriales de dimensión finita proporciona un marco para trabajar conceptos de inferencia en el modelo lineal general. Conceptos como subespacio columna, operador proyector ortogonal u oblicuo, matriz inversa generalizada, entre otros, juegan un papel de suma importancia en el estudio del modelo lineal general. El teorema de Gauss-Markov se puede formular en lenguaje de espacio vectorial. La caracterización de estimadores de coeficientes de regresión β y de la varianza σ^2 en el modelo lineal general por medio del operador proyector, ortogonal $\mathbf{P}_X = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ u oblicuo $\mathbf{P}_{XV} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}$, permite una mejor comprensión de las propiedades, ya que está basada en los principios del operador proyector y del subespacio generado por las columnas de las matrices involucradas. Los proyectores asociados con un estimador en particular en el modelo lineal general juegan un papel importante en la caracterización de las propiedades estadísticas del estimador. En el criterio de mínimos cuadrados para definir el mejor ajuste, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios del vector de coeficientes en el modelo lineal general se puede expresar en términos del operador proyector ortogonal \mathbf{P}_X sobre el espacio $S(\mathbf{X})$; así mismo el estimador de mínimos cuadrados generalizados se puede expresar en términos del operador proyector oblicuo \mathbf{P}_{XV} . Para una revisión de la aplicación del operador proyector en modelos lineales ver Christensen (2002). Kala y Pordzik, 2006 presentan propiedades de operadores lineales y su relación con el Mejor Estimador Lineal Insesgado (*BLUE*). Peng *et al.*, 2005 presentan algunas propiedades del operador oblicuo. Para un estudio del operador oblicuo y de sus propiedades ver Takane y Yanai (1999).

Aunqu en la literatura se conocen suficientes resultados acerca de la teoría del

álgebra lineal relacionada con la teoría de estimación y prueba de hipótesis en el modelo lineal general (*MLG*), en particular en la caracterización de los parámetros en términos del operador proyector ortogonal u oblicuo, no existen resultados que caracterizen al *BLUP* de efectos mixtos en el contexto del *MLGM* en términos de operadores.

En este trabajo primero se presenta la condición que debe cumplir una matriz de diseño para que la matriz de varianzas y covarianzas \mathbf{V} de la variable respuesta, así como su inversa \mathbf{V}^{-1} , y el *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ se expresen en términos de los operadores proyector definidos sobre los subespacios generados por las matrices de diseño del modelo bajo estudio. Así mismo se obtiene la caracterización del *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ en términos de los operadores. Además se presentan modelos que cumplen la condición enunciada en la matriz de diseño y por lo cual se les pueden aplicar los resultados obtenidos.

2. Operador proyector en el *MLG*

En esta sección se presenta la teoría relacionada con el operador proyector y la manera en la cual los estimadores de los parámetros que intervienen en el *MLG* se caracterizan por medio de éste. En el apartado 2.1 se presenta la teoría relacionada con el operador proyector, así como sus propiedades. En el apartado 2.2 se presentan algunas de las aplicaciones del operador proyector, ortogonal u oblicuo en la caracterización de los estimadores de los parámetros $\boldsymbol{\beta}$ y σ^2 en el *MLG*.

2.1. Teoría de proyectores

Sean V_1 y W_1 subespacios de \mathbb{R}^n , tales que su suma directa es \mathbb{R}^n , es decir, $V_1 \oplus W_1 = \mathbb{R}^n$. Cualquier elemento $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, tiene descomposición única $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, donde $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1$ y $\boldsymbol{\alpha}_2 \in W_1$. Denotemos por \mathbf{P} el mapeo de \mathbb{R}^n a V_1 dado por $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}_1$. \mathbf{P} es un operador lineal sobre \mathbb{R}^n .

Definición 2.1 *Al operador \mathbf{P} se le denomina el **operador proyector** sobre V_1 a lo largo de W_1 .*

A continuación presentamos algunas propiedades del operador proyector.

Teorema 2.2 *Un operador \mathbf{P} sobre \mathbb{R}^n es un operador proyector sobre algún subespacio V_1 si, y solo si, es idempotente, es decir, si $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}$.*

Demostración. Sea \mathbf{P} el operador proyector sobre V_1 a lo largo de W_1 . Si $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1$, la proyección de $\boldsymbol{\alpha}_1$ sobre V_1 a lo largo de W_1 es $\boldsymbol{\alpha}_1$. Para cualquier $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, donde $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1$ y $\boldsymbol{\alpha}_2 \in W_1$. Tenemos

$$\mathbf{P}\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (1)$$

por lo que \mathbf{P} es un operador idempotente. Inversamente, sea \mathbf{P} un operador idempotente. Definamos V_1 como el conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, tales que $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ y sea W_1 el conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$; es decir,

$$V_1 = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}\} \quad (2)$$

y

$$W_1 = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{0}\}. \quad (3)$$

Ahora supóngase $\alpha \in V_1 \cap W_1$, entonces $\alpha = \mathbf{0}$, así $V_1 \cap W_1 = \{\mathbf{0}\}$, además para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\alpha = \mathbf{P}(\alpha) + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\alpha$. Definamos $\alpha_1 = \mathbf{P}(\alpha)$ y $\alpha_2 = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\alpha$, entonces $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, y se tiene

$$\mathbf{P}\alpha_1 = \mathbf{P}\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P}(\alpha) = \alpha_1$$

por lo que $\alpha_1 \in V_1$, y

$$\mathbf{P}(\alpha_2) = \mathbf{0},$$

lo cual implica que $\alpha_2 \in W_1$. Así $V_1 + W_1 = \mathbb{R}^n$. Así se tiene $V_1 \oplus W_1 = \mathbb{R}^n$. Además como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, ésto implica que

$$\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P}(\alpha_1) + \mathbf{P}(\alpha_2) = \alpha_1 + \mathbf{0} = \alpha_1. \quad (4)$$

Entonces por la definición 2.1 de operador proyector se tiene de (4) que \mathbf{P} es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de W_1 ■

Teorema 2.3 Sean V_1 y W_1 dos subespacios de \mathbb{R}^n , tales que $V_1 \oplus W_1 = \mathbb{R}^n$, y sea \mathbf{P} un operador lineal sobre \mathbb{R}^n . Tenemos que \mathbf{P} es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de W_1 , si, y solo si, \mathbf{P} satisface

$$\mathbf{P}(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \in V_1 \\ \mathbf{0} & \text{si } \alpha \in W_1. \end{cases} \quad (5)$$

Demostración. Supóngase se cumple (5) y denotemos con $\mathbf{P}_{V,W}$ al operador proyector sobre V_1 a lo largo de W_1 y con $\mathbf{P}_{W,V}$ al operador proyector sobre W_1 a lo largo de V_1 . Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, donde $\alpha_1 \in V_1$ y $\alpha_2 \in W_1$. Ahora $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \mathbf{P}_{V,W}\alpha_1 + \mathbf{P}_{W,V}\alpha_2$, de lo cual obtenemos

$$\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P}\mathbf{P}_{V,W}(\alpha_1) + \mathbf{P}\mathbf{P}_{W,V}(\alpha_2).$$

Además tenemos que $\mathbf{P}_{V,W}(\alpha_1) \in V_1$ y $\mathbf{P}_{W,V}(\alpha_2) \in W_1$, así por la condición (5) tenemos

$$\mathbf{P}\alpha = \mathbf{P}_{V,W}(\alpha_1) = \alpha_1,$$

así $\mathbf{P}(\alpha) = \alpha_1$, con lo que se tiene por definición de operador proyector, que \mathbf{P} es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de W_1 . Inversamente, sea \mathbf{P} el operador proyector sobre V_1 a lo largo de W_1 , y sean los vectores $\alpha_1 \in V_1$ y $\alpha_2 \in W_1$, así se tiene que

$$\mathbf{P}(\alpha_1) = \mathbf{P}(\alpha_1 + \mathbf{0}) = \alpha_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(\alpha_2) = \mathbf{P}(\mathbf{0} + \alpha_2) = \mathbf{0}.$$

Entonces \mathbf{P} satisface

$$\mathbf{P}(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \in V_1 \\ \mathbf{0} & \text{si } \alpha \in W_1 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Notación 2.4 Se denotará por \mathbf{I} el operador identidad sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^n .

Observación 2.5 Si \mathbf{P} es el operador proyector sobre V_1 a lo largo de W_1 , entonces por el teorema 2.3, tenemos que $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ es el operador proyector sobre W_1 a lo largo de V_1 . Además $\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

Definición 2.6 Sea V un subespacio del espacio \mathbb{R}^n , y sea V^\perp su complemento ortogonal. Entonces el operador proyector sobre V a lo largo de V^\perp , se denomina **proyector ortogonal** sobre V .

Notación 2.7 Sea \mathbf{X} una matriz de orden $n \times m$, se denotará por $S(\mathbf{X})$ al espacio generado por los vectores columna de la matriz \mathbf{X} .

Teorema 2.8 \mathbf{P} es el operador proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{X})$ si y sólo si

- a) $\mathbf{P}(\alpha) = \alpha$ para cualquier $\alpha \in S(\mathbf{X})$ y
- b) $\mathbf{P}(\beta) = \mathbf{0}$ para cualquier $\beta \in S(\mathbf{X})^\perp$

Demostración. Se tiene que $S(\mathbf{X}) \oplus S(\mathbf{X})^\perp = \mathbb{R}^n$, así por la definición 2.6 de proyector ortogonal y por el teorema 2.3, se cumple el resultado ■

Definición 2.9 Dada una matriz \mathbf{A} , una matriz inversa generalizada de la matriz \mathbf{A} es cualquier matriz \mathbf{G} la cual satisface $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$.

Notación 2.10 Se denotará por \mathbf{A}^- una inversa generalizada de la matriz \mathbf{A} .

Teorema 2.11 Si \mathbf{G} es una matriz inversa generalizada de $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$, entonces \mathbf{GX}^t es una matriz inversa generalizada de \mathbf{X} , es decir, se cumple $\mathbf{XGX}^t\mathbf{X} = \mathbf{X}$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$, éste tiene descomposición única $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, donde $\alpha_1 \in S(\mathbf{X})$ y $\alpha_2 \in S(\mathbf{X})^\perp$. Así $\alpha_1 = \mathbf{X}\gamma_1$ para algún γ_1 . Entonces

$$\begin{aligned} \alpha^t \mathbf{XGX}^t \mathbf{X} &= \alpha_1^t \mathbf{XGX}^t \mathbf{X} \\ &= \gamma_1^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X}) \mathbf{G} (\mathbf{X}^t \mathbf{X}) \\ &= \gamma_1^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X}) \\ &= \alpha_1^t \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Así se cumple $\mathbf{XGX}^t\mathbf{X} = \mathbf{X}$ ■

Teorema 2.12 Sea $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^-$ una inversa generalizada de la matriz $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})$, entonces $\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^- \mathbf{X}^t$ es el operador proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{X})$.

Demostración. Si $\alpha \in S(\mathbf{X})$ entonces $\alpha = \mathbf{X}\gamma$ y por el teorema 2.11, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^- \mathbf{X}^t(\alpha) &= \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^- \mathbf{X}^t\mathbf{X}\gamma \\ &= \mathbf{X}\gamma = \alpha. \end{aligned}$$

Ahora si $\beta \in S(\mathbf{X})^\perp$ se tiene que $\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^- \mathbf{X}^t(\beta) = \mathbf{0}$. Así se cumple que

- a) $\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^- \mathbf{X}^t(\alpha) = \alpha$ para cualquier $\alpha \in S(\mathbf{X})$ y
- b) $\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^- \mathbf{X}^t(\beta) = \mathbf{0}$ para cualquier $\beta \in S(\mathbf{X})^\perp$

y por el teorema 2.8, se tiene el resultado ■

Sea \mathbf{V} una matrix definida positiva. Así existe una matriz no singular \mathbf{R} para la cual se cumple $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{R}^t$. Es de interés el operador proyector ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}$ sobre $S(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})$, el cual, por el teorema 2.12, está dado por medio de

$$(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}) [(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})]^{-1} (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t.$$

Teorema 2.13 *Sea \mathbf{V} una matrix definida positiva, entonces*

$$\mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}$$

es un operador proyector sobre $S(\mathbf{X})$.

Demostración. Denotaremos por $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ al operador $\mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}$. En primer lugar veamos que efectivamente es un operador proyector. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}^2 &= \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \right] \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \right] \\ &= \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}) (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \right] \\ &= \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}, \end{aligned}$$

se tiene que se cumple la idempotencia, así por el teorema 2.2, $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ es un operador proyector. Ahora veamos que es un proyector sobre $S(\mathbf{X})$. Se tiene que el operador proyector ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}$ sobre $S(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})$, cumple la relación

$$(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}) [(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})]^{-1} (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}) = (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}),$$

lo cual puede ser escrito como:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X},$$

de lo que se obtiene

$$\mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X}. \quad (6)$$

Si $\alpha \in S(\mathbf{X})$ entonces $\alpha = \mathbf{X}\gamma$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}(\alpha) &= \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \alpha \\ &= \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} \gamma \\ &= \mathbf{X} \gamma = \alpha. \end{aligned}$$

Así se cumple $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}(\alpha) = \alpha$ para $\alpha \in S(\mathbf{X})$ ■

2.2. Aplicaciones del operador proyector en el *MLG*

En esta sección se presentan las principales aplicaciones del operador proyector en el *MLG*. Tanto en la estimación del parámetro β , como en la estimación de la varianza σ^2 .

2.2.1. Estimación por mínimos cuadrados

Considérese el modelo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}, \quad E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad Cov(\mathbf{e}) = \sigma^2\mathbf{I}, \quad (7)$$

donde $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{X} es una matrix de constantes de orden $n \times p$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ es un vector de parámetros desconocidos, y $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de errores aleatorios no observables.

El interés es la estimación del valor esperado de la variable respuesta, $E(\mathbf{Y})$. Se tiene que $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, pero $\boldsymbol{\beta}$ es desconocido, lo que se sabe es que $E(\mathbf{Y}) \in S(\mathbf{X})$. Para la estimación de $E(\mathbf{Y})$ se toma el vector perteneciente a $S(\mathbf{X})$ que este más cercano a \mathbf{Y} . La distancia está dada en términos de $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^t (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$.

Definición 2.14 Una estimación $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ se denomina una estimación por mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$, si $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es el vector perteneciente a $S(\mathbf{X})$ que esta más cercano a \mathbf{Y} . En otras palabras, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es una estimación mínimos cuadrados si

$$\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^t \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right) = \min_{\boldsymbol{\beta}} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right)^t \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \right). \quad (8)$$

Teorema 2.15 Sea $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ el operador proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{X})$, entonces

$$\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^t \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right) = \left(\mathbf{Y} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \right)^t \left(\mathbf{Y} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \right) + \left(\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^t \left(\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right).$$

Demostración. Lo anterior se demuestra en base a las propiedades del operador proyector ortogonal, $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}})\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}})\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ■

Teorema 2.16 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es un estimador por mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$ si y sólo si se cumple $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ es el operador proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{X})$, es decir si y sólo si $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}^t\mathbf{Y}$.

Demostración. Por el teorema 2.15, se cumple la relación

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^t \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right) &= \left(\mathbf{Y} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \right)^t \left(\mathbf{Y} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \right) \\ &+ \left(\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^t \left(\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right). \end{aligned}$$

Ambos términos de la derecha son no negativos, y el primer término no depende de $\boldsymbol{\beta}$. $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^t (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ es minimizado cuando se minimiza

$$\left(\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^t \left(\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \right).$$

la cual es mínima si y sólo si $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, lo cual prueba el teorema ■

Teorema 2.17 $\boldsymbol{\beta}^*$ dado por medio de $\boldsymbol{\beta}^* = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}^t\mathbf{Y}$ es un estimador mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$.

Demostración. Por el teorema 2.16, se tiene que β^* es un estimador por mínimos cuadrados de β sí y sólo sí $\mathbf{X}\beta^* = \mathbf{P}_\mathbf{X}\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{P}_\mathbf{X}$ es el operador proyector ortogonal sobre $S(\mathbf{X})$. En este caso se tiene

$$\mathbf{X}\beta^* = \mathbf{X} \left[(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-} \mathbf{X}^t\mathbf{Y} \right] = \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-} \mathbf{X}^t \right] \mathbf{Y} = \mathbf{P}_\mathbf{X}\mathbf{Y}.$$

Por lo que $\beta^* = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-} \mathbf{X}^t\mathbf{Y}$ es un estimador mínimos cuadrados de β ■
Otro parámetro de interés en el modelo lineal general es la varianza σ^2 .

Teorema 2.18 *Sea el modelo*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e}, \quad E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad Cov(\mathbf{e}) = \sigma^2\mathbf{I}, \quad (9)$$

Denotese por $r(\mathbf{X})$ el rango de la matriz \mathbf{X} . Entonces

$$\frac{\mathbf{Y}^t(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{Y}}{n - r(\mathbf{X})} \quad (10)$$

es un estimador insesgado de σ^2 , respecto al modelo (7).

Demostración. Para la función cuadrática $\mathbf{Y}^t\mathbf{B}\mathbf{Y}$ se cumple la siguiente relación

$$E[\mathbf{Y}^t\mathbf{B}\mathbf{Y}] = tr(\mathbf{B}[Cov(\mathbf{Y})]) + [E(\mathbf{Y})]^t\mathbf{B}[E(\mathbf{Y})].$$

En el caso de interés se tiene $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X}$, $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta$ y $Cov(\mathbf{Y}) = \sigma^2$, así se tiene

$$E[\mathbf{Y}^t(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{Y}] = tr(\sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})) + \beta^t\mathbf{X}^t(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{X}\beta.$$

Además se cumple

$$tr(\sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})) = \sigma^2[tr(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})] = \sigma^2(n - r(\mathbf{X}))$$

y

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

así $\beta^t\mathbf{X}^t(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{X}\beta = \mathbf{0}$. De lo anterior

$$E[\mathbf{Y}^t(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{Y}] = \sigma^2(n - r(\mathbf{X})).$$

Así

$$E \left[\frac{\mathbf{Y}^t(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{Y}}{n - r(\mathbf{X})} \right] = \sigma^2 \quad \blacksquare$$

$\mathbf{Y}^t(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{Y}$ se denomina la suma de cuadrados para el error (*SCE*). Al rango de $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{X})$ se le denomina los grados de libertad para el error (*gl*). De lo anterior se tiene que una estimación insesgada de σ^2 está dada por la razón de la suma de cuadrados para el error dividida entre los grados de libertad para el error.

2.2.2. Mínimos cuadrados generalizados

Ahora considérese el modelo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}, \quad E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad Cov(\mathbf{e}) = \sigma^2\mathbf{V}, \quad (11)$$

donde \mathbf{V} es alguna matriz definida positiva. Así existe una matriz no singular \mathbf{R} para la cual se cumple $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{R}^t$. Del modelo (11), se obtiene el modelo

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}, \quad E(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad Cov(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}) = \sigma^2\mathbf{I} \quad (12)$$

Para el modelo (12) las estimaciones de mínimos cuadrados minimizan

$$(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (13)$$

Esta distancia es una generalización de la distancia $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^t (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$, por lo que los estimadores del parámetro $\boldsymbol{\beta}$ que minimizan tal distancia se conocen como estimadores por **mínimos cuadrados generalizados**.

Teorema 2.19 *Bajo el modelo (12), $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es un estimador de mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$ si y sólo si*

$$\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}. \quad (14)$$

En términos del operador proyector $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ del teorema 2.16, el teorema 2.19, se expresa como: Bajo el modelo (12), $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ es un estimador por mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$ si y sólo si $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y}$ donde

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \quad (15)$$

es un proyector sobre $S(\mathbf{X})$.

En la sección correspondiente a mínimos cuadrados y estimación de σ^2 se vió que una estimación insesgada de σ^2 está dada por la razón de *SCE* dividida entre los grados de libertad. Lo anterior bajo el modelo propuesto. Bajo el modelo (7) la *SCE* estaba dada en términos del operador proyector ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ sobre $S(\mathbf{X})$ por medio de $\mathbf{Y}^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}}) \mathbf{Y}$.

En este caso el modelo de interés es el modelo (12) por lo cual se tiene que la *SCE* está dada en términos del operador proyector ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}$ sobre $S(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})$. El operador proyector ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}$ sobre $S(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})$ está dado por medio de

$$(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}) [(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})]^{-1} (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t.$$

Así la *SCE* está dada por $(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y})^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{R}}) (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y})$.

$$SCE = (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y})^t \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} [(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})]^{-1} (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t \right] (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}).$$

Teorema 2.20 *Bajo el modelo (12), la *SCE* se puede expresar como*

$$\mathbf{Y}^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}) \mathbf{Y}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
SCE &= (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y})^t \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} [(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})]^{-1} (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X})^t \right] (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}) \\
&= \mathbf{Y}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} \\
&= \mathbf{Y}^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}) \mathbf{Y} \blacksquare
\end{aligned}$$

\mathbf{R} es una matriz no singular, así se cumple $r(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}) = r(\mathbf{X})$ y los gl para el error bajo el modelo (12) están dados por medio de $n - r(\mathbf{X})$. De lo anterior se tiene que bajo el modelo (12) una estimación insesgada para σ^2 está dada por

$$\frac{\mathbf{Y}^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}) \mathbf{Y}}{n - r(\mathbf{X})}. \quad (16)$$

3. Teoría de la predicción en el *MLGM*

Sea *MLGM* el cual está dado por medio de:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e},$$

$$E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad Var(\mathbf{e}) = \mathbf{R}, \quad (17)$$

$$E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad Var(\mathbf{u}) = \mathbf{G} \quad y \quad Cov(\mathbf{e}, \mathbf{u}^t) = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{X} es una matriz conocida de orden $n \times p$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, \mathbf{Z} es una matriz conocida de orden $n \times q$, y \mathbf{e} y \mathbf{u} están distribuidos independientemente con media cero y matriz de varianza y covarianza \mathbf{G} y \mathbf{R} respectivamente, tales matrices dependen de parámetros desconocidos llamados los componentes de la varianza, los cuales serán denotados por σ .

El *MLGM* se dividen en dos partes; la parte fija y la parte aleatoria. La parte fija está compuesta por los coeficientes de regresión, los cuales forman el parámetro $\boldsymbol{\beta}$, mientras que la parte aleatoria está compuesta por los efectos aleatorios \mathbf{u} .

Respecto a la estimación de los efectos fijos, de los supuestos del *MLGM* dado por la ecuación (17) se tiene

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad y \quad \mathbf{V} = Var(\mathbf{Y}) = \mathbf{ZGZ}^t + \mathbf{R}.$$

Bajo el supuesto de que las varianzas son conocidas se puede obtener el estimador de mínimos cuadrados generalizados del parámetro $\boldsymbol{\beta}$ el cual está dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}.$$

Uno de los objetivos en el análisis del *MLGM* es la estimación de los coeficientes de la parte fija y la estimación (predicción) de los efectos aleatorios. Los estimadores para efectos aleatorios son conocidos como predictores. La predicción de efectos aleatorios tiene una larga historia la cual data desde los primeros trabajos de Henderson sobre genética animal (Henderson 1984).

Henderson *et al.* (1959), desarrollaron un conjunto de ecuaciones que simultáneamente proporcionan el *BLUE* de $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ y el *BLUP* de \mathbf{u} . Estas ecuaciones son derivadas

por la maximización de la densidad conjunta de \mathbf{Y} y \mathbf{u} , la cual está dada para, $Var(\mathbf{e}) = \mathbf{R}$ y $Var(\mathbf{u}) = \mathbf{G}$, por medio de:

$$f(\mathbf{Y}, \mathbf{u}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u})^t \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}\mathbf{u}) + \mathbf{u}^t \mathbf{G}^{-1}\mathbf{u}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{N+q}{2}} |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}}}.$$

Igualando a cero las derivadas parciales de $f(\mathbf{Y}, \mathbf{u})$ con respecto a los elementos de $\boldsymbol{\beta}$ y de \mathbf{u} , se obtienen las ecuaciones

$$\mathbf{X}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{u} = \mathbf{X}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{Z}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{Z}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1}) \mathbf{u} = \mathbf{Z}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}.$$

Las cuales se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} & \mathbf{X}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} & \mathbf{Z}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y} \end{bmatrix}.$$

Éstas se denominan Ecuaciones del Modelo Mixto.

Para obtener estimaciones de $\boldsymbol{\beta}$ y \mathbf{u} , el método estándar es resolver las ecuaciones del modelo mixto (Henderson 1984). Las estimaciones pueden ser escritas como:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y},$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G} \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Además de la estimación del parámetro $\boldsymbol{\beta}$ y de la predicción de \mathbf{u} , es necesaria la estimación de combinaciones lineales de éstos, es decir, funciones de la forma $\mathbf{k}^t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{m}^t \mathbf{u}$, para vectores específicos de constantes \mathbf{k} y \mathbf{m} , estas funciones se denominan efectos mixtos ya que son combinaciones de efectos fijos y efectos aleatorios. Henderson (1975) obtiene el *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{k}^t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{m}^t \mathbf{u}$ bajo el *MLGM*, el *BLUP* de este efecto mixto está dado por medio de:

$$\mathbf{k}^t \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{m}^t \hat{\mathbf{u}}. \quad (18)$$

4. Caracterización del *BLUP* del efecto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$

Se presenta la caracterización del *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ en términos de los operadores proyector definidos sobre los subespacios generados por las matrices de diseño \mathbf{X} y \mathbf{Z} . En el apartado 4.1 se presenta la caracterización considerando el caso balanceado y en el apartado 4.2 el caso desbalanceado.

Se considera el modelo dado por:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e},$$

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_u^2 \mathbf{I}_q), \quad \mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_n), \quad (19)$$

$$Cov(\mathbf{e}, \mathbf{u}^t) = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{X} es una matriz conocida de orden $n \times p$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ es un vector de efectos fijos, \mathbf{Z} es una matriz conocida de orden $n \times q$, y \mathbf{u} es un vector de efectos aleatorios. En este caso la matriz de varianzas y covarianzas de \mathbf{Y} está dada por

$$\mathbf{V} = \text{Var}(\mathbf{Y}) = \sigma_u^2 \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n.$$

De la sección 3 el *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{k}^t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{m}^t \mathbf{u}$ bajo el *MLGM* está dado por:

$$\mathbf{k}^t \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{m}^t \hat{\mathbf{u}}. \quad (20)$$

4.1. Caso balanceado

El siguiente resultado presenta la condición que debe de cumplir la matriz de diseño \mathbf{Z} para que la matriz de varianzas y covarianzas \mathbf{V} se exprese en terminos del operador proyector ortogonal \mathbf{P}_Z y de su complemento ortogonal \mathbf{Q}_Z .

Teorema 4.1 *Bajo el modelo (19), si se cumple $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_Z$, $d \in \mathbb{R}$, entonces la matriz de varianzas y covarianzas de \mathbf{Y} se expresa en términos del operador proyector ortogonal \mathbf{P}_Z y de su complemento ortogonal \mathbf{Q}_Z por:*

$$\mathbf{V} = (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_Z + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_Z.$$

Demostración. Bajo el modelo (19), si se cumple $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_Z$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \sigma_u^2 \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n \\ &= d\sigma_u^2 \mathbf{P}_Z + \sigma_e^2 (\mathbf{P}_Z + \mathbf{Q}_Z) \\ &= d\sigma_u^2 \mathbf{P}_Z + \sigma_e^2 \mathbf{P}_Z + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_Z \\ &= (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_Z + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_Z \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente resultado presenta la caracterización de la matriz inversa \mathbf{V}^{-1} de la matriz de varianzas y covarianzas en terminos del operador proyector ortogonal \mathbf{P}_Z y de su complemento ortogonal \mathbf{Q}_Z .

Teorema 4.2 *Bajo el modelo (19), si se cumple $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_Z$, $d \in \mathbb{R}$, entonces la inversa \mathbf{V}^{-1} de la matriz de varianzas y covarianzas de \mathbf{Y} se expresa en términos del operador proyector ortogonal \mathbf{P}_Z y de su complemento ortogonal \mathbf{Q}_Z por:*

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{\mathbf{P}_Z}{(d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_Z}{\sigma_e^2}.$$

Demostración. Por el teorema 4.1, bajo el modelo (19), si se cumple $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_Z$, entonces

$$\mathbf{V} = (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_Z + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_Z.$$

Así la inversa \mathbf{V}^{-1} se expresa por medio de:

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{\mathbf{P}_Z}{(d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_Z}{\sigma_e^2} \blacksquare$$

El siguiente resultado presenta la caracterización de la matriz \mathbf{V} en términos de los proyectores mencionados.

Teorema 4.3 *Bajo el modelo (19), si se cumple $\mathbf{ZZ}^t = d\mathbf{P}_Z$, $d \in \mathbb{R}$, entonces el BLUP del efecto mixto $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ se expresa en términos de los operadores $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ y \mathbf{P}_Z por:*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + c\mathbf{P}_Z(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})\mathbf{Y},$$

donde $c = d\sigma_u^2 / (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$.

Demostración. Por (20), el BLUP del efecto mixto $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ está dado por medio de $\mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{u}}$. Por el teorema 2.19, el estimador de mínimos cuadrados generalizado $\hat{\beta}$ está caracterizado por el operador proyector oblicuo $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ por medio de $\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y}$, además $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{GZ}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y}$. Por el teorema 4.2, bajo el modelo (19), si se cumple $\mathbf{ZZ}^t = d\mathbf{P}_Z$, entonces

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{\mathbf{P}_Z}{(d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_Z}{\sigma_e^2}.$$

Así

$$\begin{aligned} BLUP(\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}) &= \mathbf{X}\hat{\beta} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \mathbf{ZGZ}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \sigma_u^2\mathbf{ZZ}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \sigma_u^2\mathbf{ZZ}^t \left[\frac{\mathbf{P}_Z}{(d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_Z}{\sigma_e^2} \right] \mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + d\sigma_u^2\mathbf{P}_Z \left[\frac{\mathbf{P}_Z}{(d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_Z}{\sigma_e^2} \right] \mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \frac{d\sigma_u^2}{(d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)}\mathbf{P}_Z\mathbf{Q}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + c\mathbf{P}_Z(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})\mathbf{Y}, \end{aligned}$$

donde $c = d\sigma_u^2 / (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$. Además se tiene que el BLUP del efecto mixto $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ es la suma de un elemento en $S(\mathbf{X})$ y un elemento de $S(\mathbf{Z})$, por lo que

$$BLUP(\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}) \in S(\mathbf{X}) + S(\mathbf{Z}) \quad \blacksquare \quad (21)$$

Corolario 4.4 *Bajo el modelo (19), si se cumple $\mathbf{ZZ}^t = d\mathbf{P}_Z$, $d \in \mathbb{R}$, entonces el BLUP del efecto aleatorio $\mathbf{Z}\mathbf{u}$ se expresa en términos de $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ y \mathbf{P}_Z por:*

$$c\mathbf{P}_Z(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})\mathbf{Y},$$

donde $c = d\sigma_u^2 / (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$.

4.2. Caso desbalanceado

En el siguiente resultado se presenta la condición que debe de cumplir la matriz de diseño \mathbf{Z}_j para que la matriz \mathbf{V} se exprese en terminos de los operadores $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}$ y $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}$,

Teorema 4.5 *Bajo el modelo (19), si se cumple $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$, $n_j \in \mathbb{R}$, entonces la matriz de varianzas y covarianzas \mathbf{V} de \mathbf{Y} se expresa en términos de los operadores proyector $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}$ y $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}$ por $\mathbf{V} = \bigoplus_{j=1}^J [(n_j\sigma_u^2 + \sigma_e^2)\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}]$.*

Demostración. Bajo el modelo (19), si se cumple $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \sigma_u^2 (\oplus_{j=1}^J \mathbf{Z}_j) (\oplus_{j=1}^J \mathbf{Z}_j)^t + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n \\
&= \sigma_u^2 (\oplus_{j=1}^J \mathbf{Z}_j) (\oplus_{j=1}^J \mathbf{Z}_j^t) + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n \\
&= \sigma_u^2 (\oplus_{j=1}^J \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t) + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n \\
&= \sigma_u^2 (\oplus_{j=1}^J n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}) + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n \\
&= \oplus_{j=1}^J [n_j \sigma_u^2 \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2 \mathbf{I}_{n_j} + \sigma_e^2 \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} - \sigma_e^2 \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}] \\
&= \oplus_{j=1}^J [(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2 \mathbf{I}_{n_j} - \sigma_e^2 \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}] \\
&= \oplus_{j=1}^J [(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}] \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 4.6 Bajo el modelo (19), si se cumple $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t$, $n_j \in \mathbb{R}$, entonces la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas \mathbf{V} de \mathbf{Y} se expresa en términos de los operadores proyector $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}$ y $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}$ por:

$$\mathbf{V}^{-1} = \oplus_{j=1}^J \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2} \right].$$

Demostración. Por el teorema 4.5, la matriz de varianzas y covarianzas de \mathbf{Y} se expresa por $\mathbf{V} = \oplus_{j=1}^J [(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}]$. Así

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{-1} &= \left\{ \oplus_{j=1}^J [(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \oplus_{j=1}^J [(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}]^{-1} \right\} \\
&= \oplus_{j=1}^J \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2} \right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 4.7 Bajo el modelo (19), si se cumple $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t$, $n_j \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sigma_u^2 \mathbf{Z} \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} = \oplus_{j=1}^J \left[\frac{n_j \sigma_u^2 \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} \right].$$

Demostración. Por el teorema 4.6, si se cumple $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t$, entonces la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas de \mathbf{Y} se expresa en términos de los operadores proyector $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}$ y $\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}$ por

$$\mathbf{V}^{-1} = \oplus_{j=1}^J \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2} \right].$$

Así

$$\begin{aligned}
\sigma_u^2 \mathbf{Z} \mathbf{Z}^t \mathbf{V}^{-1} &= \sigma_u^2 \mathbf{Z} \mathbf{Z}^t \left\{ \oplus_{j=1}^J \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&= \sigma_u^2 \left\{ \oplus_{j=1}^J \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t \right\} \left\{ \oplus_{j=1}^J \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&= \sigma_u^2 \left\{ \oplus_{j=1}^J n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} \right\} \left\{ \oplus_{j=1}^J \left[\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}_j}}{\sigma_e^2} \right] \right\} \\
&= \oplus_{j=1}^J \left[\frac{n_j \sigma_u^2 \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j \sigma_u^2 + \sigma_e^2)} \right] \blacksquare
\end{aligned}$$

En el siguiente resultado se presenta la caracterización del *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ en términos de los operadores proyector definidos sobre los subespacios $S(\mathbf{X})$ y $S(\mathbf{Z})$, considerando el caso desbalanceado.

Teorema 4.8 *Bajo el modelo (19), si se cumple $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$, $n_j \in \mathbb{R}$, entonces el *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ se expresa en términos del operador proyector oblicuo $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ sobre $S(\mathbf{X})$ y del operador proyector ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ sobre $S(\mathbf{Z})$, por medio de:*

$$[\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{BQ}_{\mathbf{XV}}] \mathbf{Y},$$

donde $\mathbf{B} = \oplus_{j=1}^J (b_j\mathbf{I}_{n_j})$ y $b_j = n_j\sigma_u^2 / (n_j\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$.

Demostración. Por el lema 4.7, si se cumple $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$, entonces

$$\sigma_u^2\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t\mathbf{V}^{-1} = \oplus_{j=1}^J \left[\frac{n_j\sigma_u^2\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} \right].$$

De lo cual se tiene

$$\begin{aligned} BLUP(\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}) &= \hat{\mathbf{X}}\hat{\beta} + \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}^t\mathbf{V}^{-1} \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\beta} \right) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \sigma_u^2\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t\mathbf{V}^{-1} \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\beta} \right) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \left(\oplus_{j=1}^J \left[\frac{n_j\sigma_u^2\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j}}{(n_j\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} \right] \right) \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\beta} \right) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} \left(\oplus_{j=1}^J \left[\frac{n_j\sigma_u^2}{(n_j\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} \right] \right) \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\beta} \right) \\ &= [\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} + \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{BQ}_{\mathbf{XV}}] \mathbf{Y}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{B} = \oplus_{j=1}^J (b_j\mathbf{I}_{n_j})$ y $b_j = n_j\sigma_u^2 / (n_j\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$. Además el *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ es la suma de un elemento en $S(\mathbf{X})$ y un elemento de $S(\mathbf{Z})$, por lo que

$$BLUP(\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}) \in S(\mathbf{X}) + S(\mathbf{Z}) \quad \blacksquare \quad (22)$$

Corolario 4.9 *Bajo el modelo (19), si $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$, $n_j \in \mathbb{R}$, entonces el *BLUP* del efecto aleatorio $\mathbf{Z}\mathbf{u}$ se expresa términos del operador proyector oblicuo $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ sobre $S(\mathbf{X})$ y del operador proyector ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ sobre $S(\mathbf{Z})$, por medio de:*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}\mathbf{BQ}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y},$$

donde $\mathbf{B} = \oplus_{j=1}^J (b_j\mathbf{I}_{n_j})$ y $b_j = n_j\sigma_u^2 / (n_j\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$.

5. Modelos

En esta sección se presentan dos modelos, casos particulares del *MLGM*, los cuales satisfacen la condición $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ o la condición $n_j\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j\mathbf{Z}_j^t$. Para los dos modelos se presenta el caso balanceado y el caso desbalanceado.

5.1. Caso balanceado

Casos particulares del modelo (19), que cumplen la condición $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ son:

(i) Modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias. Este es el caso más simple de un modelo lineal jerárquico; el modelo para la i -ésima unidad de nivel 1 en la j -ésima unidad de nivel 2 está dado por:

$$Y_{ij} = \mu + u_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, k, \quad (23)$$

donde μ es un parámetro fijo; u_j es el efecto aleatorio; u_j y e_{ij} son independientes, con $u_j \sim N(0, \sigma_{u0}^2)$ y $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$. El modelo para la j -ésima unidad de nivel 2 tiene la forma:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{1}_d \mu + \mathbf{1}_d u_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (24)$$

tomando $\boldsymbol{\beta} = \mu$, $\mathbf{X} = \mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_d$, $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d$ y $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)^t$, el modelo (24) es de la forma $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t &= (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)^t = (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)(\mathbf{I}_k^t \otimes \mathbf{1}_d^t) \\ &= (\mathbf{I}_k \mathbf{I}_k^t \otimes \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t) = (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t). \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} &= \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^t\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^t \\ &= (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d) \left[(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)^t (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d) \right]^{-1} (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)^t \\ &= (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d) \left[(\mathbf{I}_k^t \otimes \mathbf{1}_d^t) (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d) \right]^{-1} (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)^t \\ &= (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d) \left[(\mathbf{I}_k^t \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d^t \mathbf{1}_d) \right]^{-1} (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)^t \\ &= (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d) [(\mathbf{I}_k \otimes 1/d)] (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)^t = (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d/d) (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d)^t \\ &= \mathbf{I}_k \otimes \frac{\mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t}{d} = \frac{1}{d} (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t) \\ &= \frac{1}{d} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t. \end{aligned}$$

(ii) Modelo intercepto aleatorio con variables explicatorias. Considérese el modelo:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_{1ij} + \beta_2 X_{2ij} + u_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, k, \quad (25)$$

donde β_0 , β_1 , y β_2 son parámetros fijos; u_j es el efecto aleatorio; u_j y e_{ij} son independientes, con $u_j \sim N(0, \sigma_{u0}^2)$ y $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$. El modelo para la j -ésima unidad de nivel 2 tiene la forma:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{1}_d \beta_0 + \mathbf{X}_{1j} \beta_1 + \mathbf{X}_{2j} \beta_2 + \mathbf{1}_d u_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (26)$$

tomando $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^t$, $\mathbf{X}_j = (\mathbf{1}_d : \mathbf{X}_{1j} : \mathbf{X}_{2j})$, y $\mathbf{Z}_j = \mathbf{1}_d$, el modelo (26) toma la forma:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j u_j + \mathbf{e}_j. \quad (27)$$

Además, definiendo a \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 como las matrices de las variables explicatorias de nivel 1, $\mathbf{X} = (\mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_d : \mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)$, $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d$ y $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)^t$, el modelo (27) es de la forma $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$. En este caso también se cumple la condición $d\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t$.

5.2. Caso desbalanceado

Casos particulares del *MLGM* (19), para los cuales se cumple la condición $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t$, son:

(iii) Modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias. El modelo para la i -ésima unidad de nivel 1 en la j -ésima unidad de nivel 2 está dado por:

$$Y_{ij} = \mu + u_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (28)$$

donde μ es un parámetro fijo; u_j es el efecto aleatorio; u_j y e_{ij} son independientes, con $u_j \sim N(0, \sigma_{u0}^2)$ y $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$. El modelo para la j -ésima unidad de nivel 2 tiene la forma:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{1}_{n_j} \mu + \mathbf{1}_{n_j} u_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (29)$$

tomando $\boldsymbol{\beta} = \mu$, $\mathbf{X} = \mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_{n_j}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_{n_j}$ y $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)^t$, el modelo (29) es de la forma $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} &= \mathbf{Z}_j (\mathbf{Z}_j^t \mathbf{Z}_j)^{-1} \mathbf{Z}_j^t \\ &= \mathbf{1}_{n_j} \left(\mathbf{1}_{n_j}^t \mathbf{1}_{n_j} \right)^{-1} \mathbf{1}_{n_j}^t \\ &= \mathbf{1}_{n_j} (n_j)^{-1} \mathbf{1}_{n_j}^t \\ &= \frac{1}{n_j} \left(\mathbf{1}_{n_j} \mathbf{1}_{n_j}^t \right) \\ &= \frac{1}{n_j} \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t, \end{aligned}$$

de lo cual se cumple $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t$.

(iv) Modelo intercepto aleatorio con variables explicatorias. Considérese el modelo:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_{1ij} + \beta_2 X_{2ij} + u_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (30)$$

donde β_0 , β_1 , y β_2 son parámetros fijos; u_j es el efecto aleatorio; u_j y e_{ij} son independientes, con $u_j \sim N(0, \sigma_{u0}^2)$ y $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$. El modelo para la j -ésima unidad de nivel 2 tiene la forma:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{1}_{n_j} \beta_0 + \mathbf{X}_{1j} \beta_1 + \mathbf{X}_{2j} \beta_2 + \mathbf{1}_{n_j} u_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad (31)$$

tomando $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^t$, $\mathbf{X}_j = (\mathbf{1}_{n_j} : \mathbf{X}_{1j} : \mathbf{X}_{2j})$, $\mathbf{Z}_j = \mathbf{1}_{n_j}$ el modelo (31) toma la forma

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j u_j + \mathbf{e}_j. \quad (32)$$

Además definiendo a \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 como las matrices de las variables explicatorias de nivel 1, y $\mathbf{X} = (\mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_{n_j} : \mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2)$, $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_{n_j}$ y $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)^t$, el modelo (32) es de la forma $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$. En este caso también se cumple la condición $n_j \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_j} = \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^t$.

6. Modelo intercepto aleatorio

En esta sección se presenta el desarrollo de la caracterización del *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ bajo el modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias (23), considerando el caso balanceado.

Lema 6.1 *Para el modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias (23), considerando el caso balanceado, el operador proyector oblicuo está dado por:*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \frac{\mathbf{1}_{kd}\mathbf{1}_{kd}^t}{kd}. \quad (33)$$

Demostración. Bajo el modelo

$$Y_{ij} = \mu + u_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, k, \quad (34)$$

con $u_j \sim N(0, \sigma_{u0}^2)$ y $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$, se tiene $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d$, de lo cual se cumple

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t}{d} = \frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t)}{d}. \quad (35)$$

Del teorema 4.2, la matriz \mathbf{V}^{-1} está dada por:

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t)}{d(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} + \frac{(d\mathbf{I}_{kd} - (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t))}{d\sigma_e^2} \quad (36)$$

en este caso $\mathbf{X} = \mathbf{1}_k \otimes \mathbf{1}_d = \mathbf{1}_{kd}$, así de (36)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{1}_{kd}^t \left[\frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t)}{d(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} + \frac{(d\mathbf{I}_{kd} - (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t))}{d\sigma_e^2} \right] \\ &= \mathbf{1}_{kd}^t \frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t)}{d(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} + \mathbf{1}_{kd}^t \frac{(d\mathbf{I}_{kd} - (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t))}{d\sigma_e^2}, \end{aligned}$$

desarrollando cada uno de los términos involucrados en $\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}$

$$\mathbf{1}_{kd}^t \frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t)}{d(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} = \frac{d\mathbf{1}_{kd}^t}{d(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} = \frac{\mathbf{1}_{kd}^t}{(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} \quad (37)$$

y

$$\mathbf{1}_{kd}^t \frac{(d\mathbf{I}_{kd} - (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t))}{d\sigma_e^2} = \mathbf{1}_{kd}^t \frac{(d\mathbf{I}_{kd})}{d\sigma_e^2} - \mathbf{1}_{kd}^t \frac{((\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d\mathbf{1}_d^t))}{d\sigma_e^2} = \mathbf{0} \quad (38)$$

Así de (37) y (38), se tiene

$$\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1} = \frac{\mathbf{1}_{kd}^t}{(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} \quad (39)$$

Considerando (39), el producto $\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ está dado por:

$$\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} = \frac{\mathbf{1}_{kd}^t\mathbf{1}_{kd}}{(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)} = \frac{kd}{(d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2)}$$

y su g-inversa por:

$$(\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^- = \frac{d\sigma_{u0}^2 + \sigma_e^2}{kd}. \quad (40)$$

De (39) y (40), se tiene

$$(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} = \frac{d\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2}{kd} \frac{\mathbf{1}_{kd}^t}{(d\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)} = \frac{\mathbf{1}_{kd}^t}{kd} \quad (41)$$

Por lo que el operador proyector oblicuo $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$, bajo el modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias (23), considerando el caso balanceado, está dado por:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \frac{\mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t}{kd} \blacksquare$$

Lema 6.2 *Bajo el modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias (23), se cumple $\mathbf{P}_Z \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$.*

Demostración. De (33) y (35), se tiene

$$\mathbf{P}_Z \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t)}{d} \frac{\mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t}{kd} = \frac{d \mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t}{dkd} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \blacksquare$$

El siguiente resultado presenta en forma explícita la caracterización del *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ para el modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias (23).

Teorema 6.3 *El BLUP del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ bajo el modelo intercepto aleatorio sin variables explicatorias (23), está dado por*

$$(1 - c) \frac{\mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t}{kd} \mathbf{Y} + c \frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t)}{d} \mathbf{Y},$$

donde $c = d\sigma_{u_0}^2 / (d\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$.

Demostración. Por el teorema 4.3, la caracterización del *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ está dada por

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}) \mathbf{Y},$$

donde $c = d\sigma_{u_0}^2 / (d\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$. Así por los lemas 6.1 y 6.2, se tiene

$$\begin{aligned} \text{BLUP}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}) &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z \mathbf{Y} - c \mathbf{P}_Z \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z \mathbf{Y} - c \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} \\ &= (1 - c) \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z \mathbf{Y} \\ &= (1 - c) \frac{\mathbf{1}_{kd} \mathbf{1}_{kd}^t}{kd} \mathbf{Y} + c \frac{(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^t)}{d} \mathbf{Y} \end{aligned}$$

donde $c = d\sigma_{u_0}^2 / (d\sigma_{u_0}^2 + \sigma_e^2)$ ■

7. Conclusiones

En este trabajo se presentó la condición bajo la cual se puede dar la caracterización del *BLUP* del efecto mixto $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$. Para poder obtener la caracterización, la matriz de diseño \mathbf{Z} , del modelo considerado, debe de cumplir la condición $d\mathbf{P}_Z = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t$. La caracterización del *BLUP* del efecto mixto permite ver que éste es un elemento de la suma lineal de $S(\mathbf{X})$ y de $S(\mathbf{Z})$, donde esta suma no necesariamente es directa ya que depende de la estructura de las matrices \mathbf{X} y \mathbf{Z} .

Referencias

- [1] Christensen, R., Plane Answers to Complex Questions. The Theory of Linear Models, 3rd Ed Springer, New York, USA, 473 p., 2002.
- [2] Goldstein, H., Multilevel Statistical Models, Third Edition, Halsted Press, New York, 1995.
- [3] Henderson, C.R., Best Linear Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model, *Biometrics*, 31, 423-447, 1975.
- [4] Henderson, C.R., Applications of Linear Models in Animal Breeding, University of Guelph, Guelph, Ontario, 1984.
- [5] Henderson, C.R., Kempthorne, O., Searle, S.R. and von Krosigk, C.N., Estimation of Environmental and Genetic Trends from Records Subject to Culling, *Biometrics*, 15, 192-218, 1959.
- [6] Kala, R. and Pordzik, Two local operators and the BLUE, *Linear Algebra and its Applications*, 417, 134-139, 2006.
- [7] Laird, N. and Ware, J., Random Effects Models for Longitudinal Data, *Biometrics*, 38, 963-974, 1982.
- [8] Littell, R.C., Milliken, G.A., Stroup, W.W., Wolfinger, R.D. and Schabenberger, O., SAS for Mixed Models. Cary, NC: SAS Institute, Inc., 2006.
- [9] Longford, N.T., (eds. Arminger, G., Clogg, C.C. and Sobel, M.E.), Random Coefficient Models. In: Handbook of Statistical Models for the Social and Behavioral Sciences, pp. 519-577, Plenum Press, New York, USA, 1995.
- [10] Peng, C. and Zhang, X., On Recursive Oblique Projectors, *IEEE Signal Processing Letters*, 12, 433-436, 2005.
- [11] Pinheiro J.C. and Bates, D.M., Mixed Effects Models in S and S-PLUS, Springer, New York, USA, 2000.
- [12] Rabe-Hesketh, S. and Srodonal, A. Multilevel and Longitudinal Modeling Using Stata, Second Edition, Stata Press. 562 p., 2008.
- [13] Rasbash, J., Steele, F., Browne, W.J., and Goldstein, H., A user's guide to MLwiN version 2.10. Center for multilevel modeling. University of Bristol, London, England, 2009.
- [14] Raudenbush, S.W. and Bryk, A.S, Hierarchical Linear Models Applications and Data Analysis Methods, 2nd. Ed., Sage Publications, Thousand Oaks, USA, 2002.
- [15] Searle, S.R., Casella, G. and McCulloch, C.E., Variance Component, 2nd Ed., John Wiley, New York, USA, 2006.
- [16] Takane, Y. and Yanai, H., On Oblique Projectors, *Linear Algebra and its Applications*, 289, 297-310, 1999.