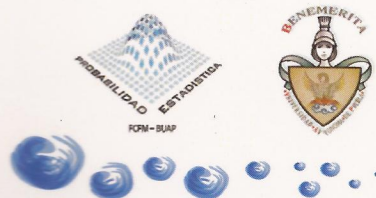


*Aportaciones y aplicaciones de*  
**la Probabilidad**  
**y**  
**la Estadística**

*2011*

***Editores:***

*Francisco Solano Tajonar Sanabria  
Hugo Adán Cruz Suárez  
Hortensia Josefina Reyes Cervantes  
José Dionisio Zacarías Flores  
Victor Hugo Vázquez Guevara*





# Contenido

## Sección de Probabilidad

Solución de la ecuación de Black-Scholes para calcular el precio de una opción con pago general mediante técnicas elementales: sustituciones y transformada de Fourier (Palomino C., Tajonar F., Cruz H., Zamora C.) .....	1
Las condiciones de frontera y la interpretación probabilística del oscilador armónico cuántico (Oliveros J., Maya M.).....	9
Expansión asintótica de densidades de probabilidad mediante la serie de cosenos de Fourier (García N., Tajonar F., Vázquez V.).....	24
Teoría para sistemas percolantes y cálculo de los exponentes críticos para la red de Bethe y para un arreglo cuadrado (Ramírez J., Herrera J., Martínez M., Lozada J.) .....	35
Valoración de opciones europeas a través del algoritmo de Derman y Kani (Vázquez V., Alducin R., Reyes H.) .....	53
Valoración de opciones barreras dobles bajo el método de transformadas (Aguilar F., Tajonar F., Palomino C.) .....	70
Aplicación del método de transformadas para opciones barreras dobles (Jiménez B., Tajonar F., Cruz H.) .....	85

## Sección de Estadística

Estructura general inicial del modelo BMA-Bayesian Model Averaging (López A., Linares G.) .....	100
Caracterización del BLUP de efectos aleatorios en modelos de ANOVA de un criterio de clasificación (Velasco F., Ojeda M.).....	113
Análisis de regresión de Cox estratificado para evaluar la eficacia de la vacuna CimaVax EGF en pacientes con cáncer de pulmón (Viada C., Lorenzo P., Fors M., Maytee R., Neningen E., Wilkinson B. y otros).....	127

# Caracterización del *BLUP* de efectos aleatorios en Modelos de ANOVA de un Criterio de Clasificación

Fernando, Velasco-Luna  
Mario Miguel, Ojeda-Ramírez  
Facultad de Estadística e Informática,  
Universidad Veracruzana,  
Av. Xalapa Esq. Avila Camacho s/n,  
Xalapa, Veracruz. Código Postal 91020, México,  
fvelasco@uv.mx, mojeda@uv.mx

**Resumen.** La caracterización por medio del operador proyector ortogonal u oblicuo de los estimadores de los coeficientes de regresión y de la varianza en el modelo lineal general es conocida y usada para el estudio de la inferencia en este contexto; sin embargo, se carece de estudios de este tipo en el caso del modelo lineal general mixto. En este trabajo se presenta la caracterización del mejor predictor lineal insesgado (*BLUP*) de un efecto mixto, así como el de un efecto aleatorio, involucrados en los modelos de Análisis de Varianza (ANOVA) de efectos aleatorios de un criterio de clasificación; es decir, se hace un estudio del modelo ANOVA en el contexto del modelo lineal general mixto (MLGM). Esta caracterización se lleva a cabo en términos de los operadores proyector definidos sobre los subespacios generados por las matrices de diseño que intervienen en el modelo de ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios; se considera sólo el caso balanceado. La forma explícita del *BLUP* de los efectos aleatorios es obtenida a partir de la aplicación de resultados de la teoría de predicción, pero en este caso se logra caracterizar al *BLUP* del efecto aleatorio en términos de los operadores proyector definidos sobre los subespacios generados por las matrices de diseño. Esta caracterización permite ver al efecto aleatorio como una resta de dos operadores proyector, cada uno de éstos definido en cada espacio generado por las matrices de diseño que intervienen en el modelo ANOVA bajo estudio.

**Abstract.** The characterization of the estimates of the regression coefficients and variance in the general linear model using the projector operator, orthogonal or oblique is known and used for the study of inference in this context, however, there are no studies of this type in the case of general linear mixed model (*GLMM*). In this paper it is presented the characterization of best linear unbiased predictor (*BLUP*) of a mixed effect as well as a random effect involved in the analysis of variance (ANOVA) models of random effects of One-way classification, i.e. , we study the ANOVA model in the context of *GLMM*. This characterization is made in terms of projector operators defined on subspaces generated by the design matrices involved in the ANOVA model of one-way classification of random effects,

it is considered only the balanced case. The explicit form of the *BLUP* of random effects is obtained from the application of results of the theory of prediction, but in this case is achieved by characterizing the *BLUP* of the random effect in terms of projector operators defined on subspaces generated by the matrices design. This characterization allows to see the random effect as a subtraction of two projector operators, each of these defined in each space generated by the design matrices involved in the ANOVA model under study.

*Palabras clave: Analysis of variance and covariance, Orthogonal matrices, Prediction theory.*

## 1. Introducción

La teoría de espacios vectoriales de dimensión finita proporciona un marco para trabajar conceptos de inferencia en el modelo lineal general (*MLG*). Conceptos como subespacio columna, operador proyector ortogonal u oblicuo, matriz inversa generalizada, entre otros, juegan un papel de suma importancia en el estudio del *MLG*. La caracterización de los estimadores de los coeficientes de regresión  $\beta$  y de la varianza  $\sigma^2$  en el *MLG* por medio del operador proyector, ortogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}^t$  u oblicuo  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}$ , permite una mejor comprensión de las propiedades, ya que está basada en los principios del operador proyector y del subespacio generado por las columnas de las matrices involucradas. En el criterio de mínimos cuadrados para definir el mejor ajuste, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios del vector de coeficientes en el *MLG* se puede expresar en términos del operador proyector ortogonal  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$  sobre el espacio  $S(\mathbf{X})$ ; así mismo el estimador de mínimos cuadrados generalizados se puede expresar en términos del operador proyector oblicuo  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ . Para una revisión de la aplicación del operador proyector en modelos lineales ver Christensen [3]. Kala y Pordzik [9] presentan propiedades de operadores lineales y su relación con el Mejor Estimador Lineal Inssegado (*BLUE*). Peng y Zhang [12] presentan algunas propiedades del operador oblicuo. Para un estudio del operador oblicuo y de sus propiedades ver Takane and Yanai [15].

La metodología del análisis de varianza es muy utilizada por su simplicidad computacional y por su sencillez para la estimación de parámetros en modelos que tienen efectos fijos, aleatorios o mixtos. Esta flexibilidad lo hace apropiado para una gran variedad de diseños, que incluyen diseños anidados y diseños de medidas repetidas. Existe una gran variedad de literatura relacionada con la teoría y aplicaciones del análisis de varianza, ver por ejemplo Hocking [7], Christensen [2], Toutenburg [16], Sahai and Ojeda [14], Casella [1], Rencher y Schaalje [13]. En un trabajo monográfico muy amplio, Sahai y Ojeda [14], hacen una revisión de los modelos de efectos: fijos, aleatorios, mixtos, y de los modelos de componentes de la varianza. Consideran el problema de la estimación puntual de los componentes de la varianza, llevando a cabo un análisis de varios métodos clásicos de estimación puntual. Lo anterior lo llevan a cabo considerando modelos de un y dos criterios de clasificación. Velasco y Ojeda [17] presentan la caracterización del modelo de ANOVA de un y dos criterios de clasificación como casos particulares del *MLGM*.

El *MLGM* está dado por  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$ . ver Muller y Stewart [11], Jiang [8],

West, Wech y Galecki [20]. En el *MLGM* además de los efectos fijos y aleatorios, están involucrados los efectos mixtos, Velasco y Ojeda [18] presentan la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  en términos de los operadores proyector  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$  definidos sobre los subespacios  $S(\mathbf{X})$  y  $S(\mathbf{Z})$ , respectivamente. En el contexto de la teoría de estimación en áreas pequeñas Velasco y Ojeda [19] desarrollan la caracterización del *BLUP* de la media poblacional  $\mu_j$  de la  $j$ -ésima área pequeña basados en el enfoque del *MLGM*.

Aunque en la literatura se conocen suficientes resultados acerca de la teoría del Álgebra Lineal relacionada con la teoría de estimación y prueba de hipótesis en el *MLG*, en particular en la caracterización de los parámetros en términos del operador proyector ortogonal u oblicuo, no existen resultados que caractericen al *BLUP* de los efectos aleatorios involucrados en el modelo ANOVA, en el contexto del *MLGM*, en términos de los operadores proyector. En este trabajo se presenta la caracterización del *BLUP* de un efecto aleatorio involucrado en el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios, considerado el modelo ANOVA de un criterio de clasificación como un caso particular del *MLGM*. Tal caracterización se da en términos de los operadores proyector ortogonal y oblicuo definidos sobre los subespacios generados por las matrices de diseño involucradas en el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios. Se considera el caso balanceado.

En la sección 2 se presenta el modelo de ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios, en la sección 3 se presenta la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  y del *BLUP* del efecto aleatorio  $\mathbf{Z}\mathbf{u}$  en términos de los operadores proyector  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ , en la sección 4 se presenta la caracterización del modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios como caso particular del *MLGM*, finalmente en la sección 5, contribución de este trabajo, se desarrolla la caracterización del *BLUP* del efecto aleatorio  $\alpha_j$  involucrado en el modelo ANOVA de efectos aleatorios de un criterio de clasificación en términos de los operadores proyector, considerando el caso balanceado.

## 2. Modelo de un criterio de clasificación

Considérese que en un experimento se desea comparar  $a$  niveles de un factor  $A$ , la respuesta  $Y$  que se observa en cada uno de los  $a$  niveles del factor es una variable aleatoria. Estas observaciones pueden describirse mediante el modelo estadístico

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu + \alpha_j + e_{ij}, \\ i &= 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, a, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $Y_{ij}$  denota la  $i$ -ésima observación del  $j$ -ésimo nivel del factor,  $\mu$  denota la media general de todos los niveles del factor,  $\alpha_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$ , y  $e_{ij}$  es el error aleatorio correspondiente a la  $i$ -ésima observación del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$ , con los supuestos  $E(e_{ij}) = 0$ ,  $Var(e_{ij}) = \sigma_e^2$ , y  $Cov(e_{ij}, e_{lk}) = 0$  para  $(i, j) \neq (l, k)$ . Un experimento con estas características se denomina de un criterio de clasificación, ya que en este se estudia la variabilidad de la variable respuesta respecto a un sólo factor, y el modelo se denomina modelo ANOVA de un criterio de clasificación. En este tipo de estudio el interés es probar hipótesis acerca de los efectos de los niveles del factor, así como obtener estimaciones de tales efectos.

El diseño estadístico permite planear las condiciones en que se desarrollará un experimento, de manera que los datos puedan analizarse mediante un modelo estadístico particular. En este sentido es necesario determinar la cobertura que tendrán las inferencias y conclusiones que se obtengan a partir de dicho análisis. Por esta razón es importante hacer una breve revisión de la forma como se determinan los niveles de los factores que serán incluidos en el diseño experimental. En el modelo dado por (1) pueden presentarse dos casos relacionadas con los  $a$  niveles del factor  $A$ . En el primer caso el interés del experimentador es hacer inferencias acerca de los efectos de únicamente los  $a$  niveles bajo estudio. En este caso el modelo (1) se conoce como modelo de efectos fijos. El otro caso es cuando el experimentador desea realizar inferencias acerca de la población de niveles del factor  $A$  y los  $a$  niveles bajo estudio representan una muestra de esta gran población. En este caso el modelo (1) se conoce como modelo de efectos aleatorios. Para definir si los efectos son fijos o aleatorios, se debe de tener presente si los objetivos de la investigación se aplican únicamente a los  $a$  niveles del factor incluidos en el experimento, en tal caso se consideran fijos. Ahora, si el objetivo está enfocado a la población de los niveles del factor, estos niveles se consideran aleatorios. A continuación se describe con mayor detalle estas dos situaciones.

## 2.1. Modelo con efectos fijos

En este caso el experimentador realiza una selección específica de los  $a$  niveles de interés ya que estos son los únicos para los cuales se desea hacer inferencia acerca de su efecto. Para este caso las conclusiones obtenidas únicamente serán para estos  $a$  niveles considerados en el estudio.

Sea un experimento de un criterio de clasificación en el que se tienen  $a$  niveles del factor  $A$  y  $n_j$  observaciones por nivel, denótese por  $Y_{ij}$  la  $i$ -ésima observación tomada en el  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$ . Cada una de las observaciones pueden describirse mediante el modelo lineal

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu_j + e_{ij}, \\ i &= 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, a \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\mu_j$  denota la media del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$ . Este modelo también se puede describir por medio de:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu + \alpha_j + e_{ij}, \\ i &= 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, a \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\mu$  denota la media general,  $\alpha_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo nivel del factor  $A$  y  $e_{ij}$  es el error aleatorio, con los supuestos  $E(e_{ij}) = 0$ ,  $Var(e_{ij}) = \sigma_e^2$ , y  $Cov(e_{ij}, e_{lk}) = 0$  para  $(i, j) \neq (l, k)$ .

Bajo los supuestos del modelo dado por (3), la varianza de la variable respuesta  $Y_{ij}$ , está dada por

$$Var(Y_{ij}) = \sigma_e^2. \quad (4)$$

Basados en el modelo dado por la ecuación (2), el interés es probar la igualdad de las  $a$  medias de los  $a$  niveles del factor  $A$ . La hipótesis está dada por

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_a \\ vs \\ H_1 : \mu_l \neq \mu_k \text{ para al menos un par } (l, k). \end{aligned} \quad (5)$$

Mientras que bajo el modelo dado por la ecuación (3), el interés es probar la igualdad de los  $a$  efectos de los  $a$  niveles del factor  $A$ . La hipótesis está dada por

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0 \\ vs \\ H_1 : \alpha_l \neq 0 \text{ para al menos un } l. \end{aligned} \quad (6)$$

En el caso del modelo de efectos fijos, de la teoría de estimación en el modelo ANOVA de un criterio de clasificación, la estimación de  $\alpha_j$  está dada por medio de

$$\bar{Y}_j - \bar{Y}, \quad (7)$$

donde

$$\bar{Y}_j = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} \text{ y } \bar{Y} = \sum_{j=1}^a \bar{Y}_j, \quad (8)$$

ver McCulloch y Searle [10].

## 2.2. Modelo con efectos aleatorios

Si el factor  $A$  tiene un gran número de niveles, que provienen de una gran población de niveles, y el interés es realizar inferencias acerca de la población de niveles, lo que hace el investigador es seleccionar en forma aleatoria  $a$  de esta gran población de niveles del factor. En este caso el interés no son los  $a$  niveles que se eligieron, sino la población completa de los niveles del factor  $A$ . En este caso el factor se denomina aleatorio. El modelo que describe esta situación está dado por

$$\begin{aligned} Y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}, \\ i = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, a, \\ \alpha_j \sim N(0, \sigma_\alpha^2) \text{ y } e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2), \end{aligned} \quad (9)$$

en este caso tanto  $\alpha_j$  y  $e_{ij}$  se consideran variables aleatorias, independientes.

Bajo los supuestos del modelo dado por (9), la varianza de la variable respuesta  $Y_{ij}$ , está dada por

$$Var(Y_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2 \quad (10)$$

El interés está en la existencia de variabilidad entre los niveles del factor  $A$ , es decir, si  $\sigma_\alpha^2 > 0$ , el caso de que  $\sigma_\alpha^2 = 0$  implica que no existe variabilidad entre los niveles del factor  $A$ . De lo anterior la hipótesis de interés está dada por

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0 \\ vs \\ H_1 : \sigma_\alpha^2 > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

De la teoría de predicción en el modelo ANOVA se tiene que el *BLUP* de  $\alpha_j$  está dado por

$$\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2/n_j} (\bar{Y}_j - \bar{Y}), \quad (12)$$

ver McCulloch y Searle [10].

### 3. Caracterización del *BLUP* del efecto $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$

En esta sección se presenta la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  en términos de los operadores proyector definidos sobre los subespacios generados por las matrices de diseño  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Z}$ . En el apartado 3.1 se presenta en forma breve el *MLGM*, en el apartado 3.2 se presenta la caracterización del *BLUP* considerando el caso balanceado.

#### 3.1. Modelo lineal general mixto

El *MLGM* está dado por medio de:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}, \\ E(\mathbf{e}) &= \mathbf{0}, \quad Var(\mathbf{e}) = \mathbf{R}, \\ E(\mathbf{u}) &= \mathbf{0}, \quad Var(\mathbf{u}) = \mathbf{G} \quad \text{y} \quad Cov(\mathbf{e}, \mathbf{u}^t) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $\mathbf{Y}$  es un vector perteneciente a  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{X}$  es una matriz conocida de orden  $m \times p$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  es un vector perteneciente a  $\mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{Z}$  es una matriz conocida de orden  $m \times k$ , y  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{u}$  están distribuidos independientemente con media cero y matriz de varianza y covarianza  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$  respectivamente, tales matrices dependen de parámetros desconocidos llamados los componentes de la varianza, los cuales serán denotados por  $\sigma$ .

Bajo los supuestos del *MLGM* se tiene

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}) &= \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} \\ &\quad \text{y} \\ \mathbf{V} = Var(\mathbf{Y}) &= \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}^t + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

El *MLGM* se divide en dos partes; la parte fija,  $\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}$ , y la parte aleatoria,  $\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$ . La parte fija está compuesta por los coeficientes de regresión los cuales forman el parámetro  $\boldsymbol{\gamma}$ , mientras que la parte aleatoria está compuesta por los efectos aleatorios  $\mathbf{u}$ . Los estimadores para efectos aleatorios son conocidos como predictores. Predictor es un término usado para distinguirlo de estimador, ya que éste último se usa para los coeficientes de la parte fija, mientras que predictor es para efectos aleatorios. La predicción de efectos aleatorios tiene una larga historia la cual data desde los primeros trabajos de Henderson sobre genética animal (Henderson [5]).

Henderson *et al.* [6], desarrollan un conjunto de ecuaciones que simultáneamente proporcionan el mejor estimador lineal insesgado de  $\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}$  y el mejor predictor lineal insesgado de  $\mathbf{u}$ . Éstas son conocidas como las ecuaciones del modelo mixto. Para



obtener estimaciones de  $\boldsymbol{\gamma}$  y  $\mathbf{u}$ , el método estándar es resolver las ecuaciones del modelo mixto (Henderson [5]). Las estimaciones pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\gamma}} &= (\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}, \\ \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{GZ}^t \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\gamma}}).\end{aligned}\quad (14)$$

Además de la estimación del parámetro  $\boldsymbol{\gamma}$  y de la predicción de  $\mathbf{u}$ , es necesaria la estimación de combinaciones lineales de éstos, es decir, funciones de la forma  $\mathbf{k}^t \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{m}^t \mathbf{u}$ , para vectores específicos de constantes  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{m}$ , estas funciones se denominan efectos mixtos ya que son combinaciones de efectos fijos y efectos aleatorios. Henderson [4] obtiene el *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{k}^t \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{m}^t \mathbf{u}$  bajo el *MLGM*, el *BLUP* de este efecto mixto está dado por medio de:

$$\mathbf{k}^t \hat{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{m}^t \hat{\mathbf{u}}, \quad (15)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  y  $\hat{\mathbf{u}}$  están dados por (14).

En adelante se considera el modelo dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}, \\ \mathbf{u} &\sim N(\mathbf{0}, \sigma_u^2 \mathbf{I}_q), \quad \mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_m), \\ \text{Cov}(\mathbf{e}, \mathbf{u}^t) &= \mathbf{0},\end{aligned}\quad (16)$$

donde  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{X}$  es una matriz conocida de orden  $m \times p$ ,  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$  es un vector de efectos fijos,  $\mathbf{Z}$  es una matriz conocida de orden  $m \times q$ , y  $\mathbf{u}$  es un vector de efectos aleatorios. En este caso la matriz de varianzas y covarianzas de  $\mathbf{Y}$  está dada por

$$\mathbf{V} = \text{Var}(\mathbf{Y}) = \sigma_u^2 \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t + \sigma_e^2 \mathbf{I}_m.$$

### 3.2. Efecto mixto

El siguiente resultado presenta la condición que debe de cumplir la matriz de diseño  $\mathbf{Z}$  para que la matriz de varianzas y covarianzas  $\mathbf{V}$  se exprese en términos del operador proyector ortogonal  $\mathbf{P}_Z$  y de su complemento ortogonal  $\mathbf{Q}_Z$ .

**Teorema 3.1** *Bajo el modelo (16), si se cumple  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_Z$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , entonces la matriz de varianzas y covarianzas de  $\mathbf{Y}$  se expresa en términos del operador proyector ortogonal  $\mathbf{P}_Z$  y de su complemento ortogonal  $\mathbf{Q}_Z$  por:*

$$\mathbf{V} = (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2) \mathbf{P}_Z + \sigma_e^2 \mathbf{Q}_Z.$$

**Demostración.** Ver Velasco y Ojeda [19] ■

El siguiente resultado presenta la caracterización de la matriz inversa  $\mathbf{V}^{-1}$  de la matriz de varianzas y covarianzas en términos del operador proyector ortogonal  $\mathbf{P}_Z$  y de su complemento ortogonal  $\mathbf{Q}_Z$ .

**Teorema 3.2** *Bajo el modelo (16), si se cumple  $\mathbf{ZZ}^t = d\mathbf{P}_Z$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , entonces la inversa  $\mathbf{V}^{-1}$  de la matriz de varianzas y covarianzas de  $\mathbf{Y}$  se expresa en términos del operador proyector ortogonal  $\mathbf{P}_Z$  y de su complemento ortogonal  $\mathbf{Q}_Z$  por:*

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{\mathbf{P}_Z}{(d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)} + \frac{\mathbf{Q}_Z}{\sigma_e^2}.$$

**Demostración.** Ver Velasco y Ojeda [19] ■

El siguiente resultado presenta la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Zu}$  en términos de los proyectores mencionados.

**Teorema 3.3** *Bajo el modelo (16), si se cumple  $\mathbf{ZZ}^t = d\mathbf{P}_Z$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , entonces el *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\beta + \mathbf{Zu}$  se expresa en términos de los operadores  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$  y  $\mathbf{P}_Z$  por:*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}\mathbf{Y} + c\mathbf{P}_Z(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})\mathbf{Y},$$

donde  $c = d\sigma_u^2 / (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$ .

**Demostración.** Ver Velasco y Ojeda [19] ■

**Corolario 3.4** *Bajo el modelo (16), si se cumple  $\mathbf{ZZ}^t = d\mathbf{P}_Z$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , entonces el *BLUP* del efecto aleatorio  $\mathbf{Zu}$  se expresa en términos de  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$  y  $\mathbf{P}_Z$  por:*

$$c\mathbf{P}_Z(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}})\mathbf{Y},$$

donde  $c = d\sigma_u^2 / (d\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$ .

## 4. Modelo de ANOVA en el contexto del *MLGM*

En esta sección se lleva a cabo la caracterización del modelo de ANOVA de un criterio de clasificación como caso particular del *MLGM*.

Sea un experimento de un criterio de clasificación en el que se tienen 4 niveles del factor  $A$ , y 3 observaciones por nivel. Desarrollando el modelo (9), se tiene

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \\ y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \\ y_{14} \\ y_{24} \\ y_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \\ e_{14} \\ e_{24} \\ e_{34} \end{bmatrix} \quad (17)$$

En términos del producto de Kronecker (17), se expresa por medio de

$$\mathbf{y} = \mathbf{1}_{12}\mu + (\mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{1}_3)\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}$$

o en la forma

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1}_4 \otimes \mathbf{1}_3) \mu + (\mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{1}_3) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}$$

En general para un experimento de un criterio de clasificación en el que se tienen  $a$  niveles del factor  $A$ , y  $n$  observaciones por nivel, el modelo está dado por:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1}_a \otimes \mathbf{1}_n) \mu + (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}. \quad (18)$$

Considerando los efectos  $\alpha_j$  como aleatorios, tomando

$$\mathbf{X} = \mathbf{1}_a \otimes \mathbf{1}_n$$

y

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n,$$

el modelo dado por (18), se puede escribir como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$$

donde  $\boldsymbol{\gamma} = \mu$  y  $\mathbf{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a)^t$ .

**Teorema 4.1** *El modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9) cumple la condición  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t = d\mathbf{P}_Z$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .*

**Demostración.** El modelo para la  $i$ -ésima observación del  $j$ -ésimo nivel, en el caso balanceado, está dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, a, \quad (19)$$

donde  $\mu$  es un parámetro fijo;  $\alpha_j$  es el efecto aleatorio;  $\alpha_j$  y  $e_{ij}$  son independientes, con  $\alpha_j \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$  y  $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ . El modelo para el  $j$ -ésimo nivel tiene la forma:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{1}_n \mu + \mathbf{1}_n \alpha_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, a, \quad (20)$$

tomando  $\boldsymbol{\gamma} = \mu$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{1}_a \otimes \mathbf{1}_n$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n$  y  $\mathbf{u} = (\alpha_1, \dots, \alpha_a)^t$ , el modelo (20) es de la forma  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$ . En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t &= (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)^t = (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) (\mathbf{I}_a^t \otimes \mathbf{1}_n^t) \\ &= (\mathbf{I}_a \mathbf{I}_a^t \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t) = (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t). \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_Z &= \mathbf{Z} (\mathbf{Z}^t \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^t \\ &= (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \left[ (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)^t (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \right]^{-1} (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)^t \\ &= (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \left[ (\mathbf{I}_a^t \otimes \mathbf{1}_n^t) (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \right]^{-1} (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)^t \\ &= (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \left[ (\mathbf{I}_a^t \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n^t \mathbf{1}_n) \right]^{-1} (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)^t \\ &= (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \left[ (\mathbf{I}_a \otimes 1/n) \right] (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)^t = (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n/n) (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)^t \\ &= \mathbf{I}_a \otimes \frac{\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n} = \frac{1}{n} (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t) \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^t \blacksquare \end{aligned}$$

En el modelo ANOVA considerado, el efecto fijo está dado por  $\boldsymbol{\gamma} = \mu$ , el efecto aleatorio por  $\mathbf{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a)^t$ , por lo que un efecto mixto está dado por

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Z}\mathbf{u} = (\mathbf{1}_a \otimes \mathbf{1}_n)\mu + (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a)^t. \quad (21)$$

## 5. Caracterización del *BLUP* en ANOVA

En esta sección se lleva a cabo la caracterización del *BLUP* del efecto mixto involucrado en el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios, dado por (9), considerando el caso balanceado.

Para obtener la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  bajo el modelo (9), son necesarios los siguientes resultados:

**Lema 5.1** *Para el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado, el operador proyector oblicuo está dado por:*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \frac{\mathbf{1}_{an}\mathbf{1}_{an}^t}{an}. \quad (22)$$

**Demostración.** Bajo el modelo

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, a, \quad (23)$$

con  $\alpha_j \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$  y  $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ , se tiene  $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n$ , de lo cual se cumple

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^t}{n} = \frac{\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n}. \quad (24)$$

Del teorema 3.2, la matriz  $\mathbf{V}^{-1}$  está dada por:

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n(n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)} + \frac{n\mathbf{I}_{an} - (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t)}{n\sigma_e^2} \quad (25)$$

en este caso  $\mathbf{X} = \mathbf{1}_a \otimes \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_{an}$ , así de (25)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{1}_{an}^t \left[ \frac{\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n(n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)} + \frac{n\mathbf{I}_{an} - (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t)}{n\sigma_e^2} \right] \\ &= \mathbf{1}_{an}^t \frac{\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n(n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)} + \mathbf{1}_{an}^t \frac{n\mathbf{I}_{an} - (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t)}{n\sigma_e^2}, \end{aligned}$$

desarrollando cada uno de los términos involucrados en  $\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1}$

$$\mathbf{1}_{an}^t \frac{\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n(n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)} = \frac{n\mathbf{1}_{an}^t}{n(n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)} = \frac{\mathbf{1}_{an}^t}{n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \quad (26)$$

y

$$\mathbf{1}_{an}^t \frac{n\mathbf{I}_{an} - (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t)}{n\sigma_e^2} = \mathbf{1}_{an}^t \frac{n\mathbf{I}_{an}}{n\sigma_e^2} - \mathbf{1}_{an}^t \frac{\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n\sigma_e^2} = \mathbf{0} \quad (27)$$

Así de (26) y (27), se tiene

$$\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} = \frac{\mathbf{1}_{an}^t}{n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} \quad (28)$$

Considerando (28), el producto  $\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}$  está dado por:

$$\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} = \frac{\mathbf{1}_{an}^t \mathbf{1}_{an}}{n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} = \frac{an}{n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}$$

y su g-inversa por:

$$(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^- = \frac{n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{an}. \quad (29)$$

De (28) y (29), se tiene

$$(\mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^- \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} = \frac{n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2}{an} \frac{\mathbf{1}_{an}^t}{n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2} = \frac{\mathbf{1}_{an}^t}{an} \quad (30)$$

Por lo que el operador proyector oblicuo  $\mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ , bajo el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado, está dado por:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \frac{\mathbf{1}_{an} \mathbf{1}_{an}^t}{an} \blacksquare$$

**Lema 5.2** *Bajo el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado, se cumple  $\mathbf{P}_Z \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}$ .*

**Demostración.** De (22) y (24), se tiene

$$\mathbf{P}_Z \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} = \frac{(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t)}{n} \frac{\mathbf{1}_{an} \mathbf{1}_{an}^t}{an} = \frac{n \mathbf{1}_{an} \mathbf{1}_{an}^t}{nan} = \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \blacksquare$$

El siguiente resultado presenta la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  para el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado.

**Teorema 5.3** *El BLUP del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  bajo el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado, está dado por*

$$(1 - c) \frac{\mathbf{1}_{an} \mathbf{1}_{an}^t}{an} \mathbf{Y} + c \frac{(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t)}{n} \mathbf{Y},$$

donde  $c = n\sigma_\alpha^2 / (n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)$ .

**Demostración.** Por el teorema 3.3, la caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ , en el contexto del *MLGM*, está dada por

$$\mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{XV}}) \mathbf{Y},$$

donde  $c = n\sigma_u^2 / (n\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$ . Así por los lemas 5.1 y 5.2, se tiene

$$\begin{aligned} BLUP(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}) &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z \mathbf{Y} - c \mathbf{P}_Z \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z \mathbf{Y} - c \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} \\ &= (1 - c) \mathbf{P}_{\mathbf{XV}} \mathbf{Y} + c \mathbf{P}_Z \mathbf{Y} \\ &= (1 - c) \frac{\mathbf{1}_{an} \mathbf{1}_{an}^t}{an} \mathbf{Y} + c \frac{(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t)}{n} \mathbf{Y} \end{aligned}$$



donde  $c = n\sigma_\alpha^2 / (n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)$  ■

El siguiente resultado presenta la caracterización del *BLUP* del efecto aleatorio  $\alpha$  para el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado.

**Teorema 5.4** *El BLUP del efecto aleatorio  $\alpha$  bajo el modelo ANOVA de un criterio de clasificación con efectos aleatorios (18), está dado por*

$$c [\mathbf{1}_{an} \otimes (\bar{Y}_j - \bar{Y})],$$

donde  $c = n\sigma_\alpha^2 / (n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)$ .

**Demostración.** Por el corolario 3.4, la caracterización del *BLUP* del efecto aleatorio  $\alpha$ , en el contexto del *MLGM*, está dada por

$$c\mathbf{P}_Z(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{XV})\mathbf{Y},$$

donde  $c = n\sigma_u^2 / (n\sigma_u^2 + \sigma_e^2)$ . así por los lemas 5.1 y 5.2, se tiene

$$\begin{aligned} BLUP(\alpha) &= c\mathbf{P}_Z\mathbf{Y} - c\mathbf{P}_Z\mathbf{P}_{XV}\mathbf{Y} \\ &= c\mathbf{P}_Z\mathbf{Y} - c\mathbf{P}_{XV}\mathbf{Y} \\ &= c \left[ \frac{\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^t}{n} \right] \mathbf{Y} - c \left[ \frac{\mathbf{1}_{an} \mathbf{1}_{an}^t}{an} \right] \mathbf{Y} \\ &= c [\mathbf{1}_{an} \otimes \bar{Y}_j] - c [\mathbf{1}_{an} \otimes \bar{Y}] \\ &= c [\mathbf{1}_{an} \otimes (\bar{Y}_j - \bar{Y})] \end{aligned}$$

donde  $c = n\sigma_\alpha^2 / (n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)$  ■

Por último, el siguiente resultado presenta la caracterización del *BLUP* del efecto aleatorio  $\alpha_j$  para el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado.

**Teorema 5.5** *El BLUP del efecto aleatorio  $\alpha_j$  bajo el modelo ANOVA de un criterio de clasificación de efectos aleatorios (9), considerando el caso balanceado, está dado por*

$$c(\bar{Y}_j - \bar{Y})$$

donde  $c = n\sigma_\alpha^2 / (n\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2)$ .

**Demostración.** Por el teorema 5.4, la caracterización del *BLUP* del efecto aleatorio  $\alpha$ , en el contexto del *MLGM*, está dada por

$$c [\mathbf{1}_{an} \otimes (\bar{Y}_j - \bar{Y})]. \quad (31)$$

La relación existente entre  $\alpha_j$  y  $\alpha$  está dada por

$$\alpha_j = \frac{\mathbf{1}_j^*}{n} \alpha, \quad (32)$$

donde  $\mathbf{1}_j^*$  es un vector en  $\mathbb{R}^{an}$  de 0's con un 1 en las posiciones correspondientes a las observaciones del  $j$ -ésimo nivel. De (31) y (32) se tiene

$$BLUP(\alpha_j) = c(\bar{Y}_j - \bar{Y}) \quad (33)$$

## 6. Conclusiones

En este trabajo se caracterizó al modelo ANOVA de un criterio de clasificación como caso particular del *MLGM*. Se probó que el modelo ANOVA de un criterio de clasificación cumple la condición  $n\mathbf{P}_Z = \mathbf{Z}\mathbf{Z}$ , por lo cual se puede aplicar la teoría de la caracterización del *BLUP* de efectos mixtos  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$  en términos de los operadores proyector ortogonal y oblicuo definidos sobre las matrices de diseño involucradas en el modelo ANOVA de un criterio de clasificación. Además se caracterizó al *BLUP* de  $\alpha_j$  en términos de los operadores proyector ortogonal y oblicuo.

La forma explícita del *BLUP* de  $\alpha_j$  obtenida es la ya dada por la teoría de predicción, pero en este caso se logra caracterizar al *BLUP* del efecto aleatorio  $\alpha_j$  en términos de los operadores proyector  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}\mathbf{V}}$  y  $\mathbf{P}_Z$  definidos sobre los subespacios  $S(\mathbf{X})$  y  $S(\mathbf{Z})$  generados por las matrices de diseño  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Z}$ , respectivamente. Se espera que esta caracterización ayude a comprender las propiedades de la predicción, tal como sucede con la caracterización de los parámetros  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\sigma$  en la teoría de estimación en el *MLG*.

## Referencias

- [1] Casella, G., Statistical Design, Springer, New York, USA, 2008.
- [2] Christensen, R., Analysis of Variance, Design and Regression. Applied statistical methods, Chapman and hall/CRC. Boca Raton, Florida, USA, 1998.
- [3] Christensen, R., Plane Answers to Complex Questions. The Theory of Linear Models, Springer, New York, USA, 3rd Ed, 2002.
- [4] Henderson, C.R., Best Linear Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model, Biometrics, 31, 423-447, 1975.
- [5] Henderson, C.R., Applications of Linear Models in Animal Breeding, University of Guelph, Guelph, Ontario, 1984.
- [6] Henderson, C.R., Kempthorne, O., Searle, S.R. and von Krosigk, C.N., Estimation of Environmental and Genetic Trends from Records Subject to Culling, Biometrics, 15, 192-218, 1959.
- [7] Hocking, R. R., Methods and Applications of Linear Models; Regression and the Analysis of Variance, John Wiley and Sons, New York, USA, 1996.
- [8] Jiang, J., Linear and Generalized Linear Mixed Models and Their Applications, Springer, New York, 2007.
- [9] Kala, R. and Pordzik, Two local operators and the BLUE, Linear Algebra and its Applications, 417, 134-139, 2006.
- [10] McCulloch, Ch. E. and Searle, R. S., Generalized, Linear and Mixed Models, John Wiley, New York, 2001.

- [11] Muller, K. E. and Stewart, P. W., Linear Model Theory Univariate, Multivariate and Mixed Models, Wiley-Interscience, New Jersey, 2006.
- [12] Peng, C. and Zhang, X., On recursive oblique projectors, IEEE Signal Processing Letters 12, 433-436. 2005.
- [13] Rencher, A. C. and Schaalje, G. B., Linear Models in Statistics, Wiley-Interscience, New Jersey, 2nd. edn, 2008.
- [14] Sahai, H. and Ojeda, R., Analysis of Variance for Random Models, Unbalanced Data, Volume II, Birkhäuser, USA, 2005.
- [15] Takane, Y. and Yanai, H., On Oblique Projectors, Linear Algebra and its Applications, 289, 297-310, 1999.
- [16] Toutenburg, H., Statistical Analysis of Designed Experiments, Springer, New York, 2nd. edn, 2002.
- [17] Velasco, L. F. y Ojeda, R. M. M., Caracterización del modelo ANOVA de un y dos criterios de clasificación como casos particulares del modelo lineal general mixto, Memorias de la 3ra Semana Internacional de Estadística y Probabilidad. Puebla, Puebla, México, 2010 a.
- [18] Velasco, L. F. y Ojeda, R. M. M., Caracterización del *BLUP* de la media poblacional en el modelo lineal general mixto, Memorias de la XXIV Foro Nacional de Estadística (INEGI: México), 81-87, 2010 b.
- [19] Velasco, L. F. y Ojeda, R. M. M., Caracterización del *BLUP* del efecto mixto  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u}$ , Aportaciones y Aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística, Editores: Tajonar S. F. S., Cruz S. H. A., Reyes C. H. y Zacarías F. J. D. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. 2010 c.
- [20] West, B. T., Welch, K. B. and Galecki, A. T., Linear Mixed Models. A Practical Guide Using Statistical Software, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, USA, 2007.