ANÁLISIS DINÁMICO DE UN CIRCUITO CAOTICO CON DOS MEMRISTORES

ECUACIONES DIFERENCIALES

Vázquez Rojas Jair *Lozada Serena Emmanuel* *Badillo Jiménez Itzel Guadalupe*

De Jesús Loyola Omar

Basado en el circuito de oscilación caótica de Chua, se ha diseñado un circuito caótico de quinto orden con dos memristores con su correspondiente modelomatemático adimen sional .

Mediante el uso de métodos convencionales de análisis dinámicos, se ha llevado a cabo el análisis de estabilidad del equilibrio establecido del circuito , se ha obtenido la distribución de las regiones estables e inestables correspondientes a los estados iniciales de los memristores y los comportamientos complejos dinámicos en función de los parámetros del circuito y de los estados iniciales de memristor. El análisis teórico y los resultados numéricos de simulación demuestran que el circuito propuesto, tiene un equilibrio de fijación ubicado en el plano constituido por las variables de estado interno de dos memristores. La estabilidad del conjunto de equilibrio depende tanto del modelado de los circuitos de memristores básicos y de los parámetros del circuito así como de los estados iniciales de los dos memristores. En el fenómeno dinámico-no lineal de Rich, tal como las transiciones de estado, se pretede observar estados transitorios de hipercaos sucesivamente.

INTRODUCCIÓN

Un memristor es un circuito de elemento faltante propuesto por León O Chua en 1971, y posteriormente realizado por un grupo de HP Labs de Stan Willians en 2008.

Dicho circuito es un dispositivo electrónico pasivo de dos terminales descrito por relación no lineal constitutiva de la carga y del flujo. Actualmente, la realización física, el modelado , los diseños y análisis de los memristores basados en la aplicación de circuitos, han llamado la atención de la comunidad de ingenieros eléctricos y electrónicos.

Debido a la no-linealidad del elemento del memristor, el circuito básico puede crear una señal caotica con gran facilidad, lo cual mejora los intereses de investigación en el diseño del circuito caótico memristivo.

Itoh y Chua, desarrolladron varios osciladores, reemplazando los diodos con memristores caracterizados por función monótona creciente y lineal.

Muthuswamy y Kokate propusieron un memristor basado en circuitos caóticos con la memductancia matemáticamente definida como una función discontinua. Estos estudios revelaron que los memristores

basados en circuitos caóticos pudieron generar varios atractores y exhibir el fenómeno no lineal de Rich. Sin embargo, la relación constitutiva de los memristores fue lineal por partes, y resultó con características discontinuas en la memristencia correspondiente y memductancia, lo cual hace la realización física como memristor no lineal más dicifil.

Muthuswamy proporcionó una práctica implementación de los memristores basados en circuitos caóticos, donde los memristores eran caracterizados por una no linealidad cúbica y realizado por los componentes en serie como un resistor, capacitor, amplificador operacional y un multiplicador análogo. Sin embargo, el comportamiento dinámico más detallado de la propuesta de los memristores basados en circuitos caóticos no fueron investigados. Cabe señalar que muchos fenómenos físicos no lineales en el circuito memristivo aparecen por la introducción de los memristores.

A diferencia del sistema dinamico general, los puntos de equilibrio del sistema memristivo son un conjunto de puntos localizados en el eje correspondiente, en el interior del estado variable del memristor, por lo tanto, la estabilidad del sistema memristivo también depende del estado inicial del memristor. La trayectoria del sistema empieza en diferentes estados iniciales, y tienden a descender asintóticamente, ciclo limite, orbita caótica o infinito. Se reportó el fenómeno dinámico complejo así como el caos transitorio, caos intermitente, el estado de transición de la trayectoria del sistema, y periodo global de oscilación constante con caos transitorio. Sin embargo, para el circuito de dos memristores existe un conjunto de puntos de equilibrio localizados en el plano construido por las variables de estado interno de dos memristores, los cuales hacen el análisis de estabilidad cualitativa de el punto de equilibrio más complicado. A través del modelo matemático, hacemos enfásis en las regiones de estabilidad del conjunto de puntos de equilibrio en el plano para revelar y analizar las dinámicas complejas no lineales de este circuito, bajo la variación de sus parámetros de circuitos y el estado inicial de los dos memristores.

EL MEMRISTOR

En teoría de circuitos eléctricos, es un elemento de circuito pasivo, descrito como el cuarto elemento llamado también resistor-memoria. Este mantiene una relación funcional entre las integrales de tiempo de corriente y voltaje, resultando una resistencia que varia dependiendo de la función de memresistor necesaria.

La forma en que se han definido tradicionalmente los elementos de circuito, ha sido asignándoles una relación entre dos variables eléctricas:

VARIABLES FUNDAMENTALES

Las variables eléctricas mencionadas pueden fácilmente convertidas a las variables fundamentales mediante las siguientes ecuaciones

$$V = \int \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Donde *V* es el voltaje, $\vec{E}$el campo eléctrico y $\overrightarrow{dl}$el diferencial de longitud.

$$I = \int \vec{J} \bullet d\vec{a} \ ,$$

Aquí, *I* es la corriente, $\vec{J}$la densidad de corriente y d$\vec{a}$el diferencial de área

$$\phi = \int \vec{B} \bullet d\vec{a} \ ,$$

Descritas como sigue, el flujo magnético y $\vec{B}$el campo magnético.

$$Q = \int_{\zeta} \varsigma d\zeta \ ,$$

Donde *Q* es la carga eléctrica, ζ es la distribución de carga (que puede ser lineal , superficial *σ* o volumétrica *ρ*) y $d\zeta$es el diferencial dimensional (lineal *dl*, superficial *da*, o volumétrico *dv*).[2]

Dadas las ecuaciones de conversión solo resta conocer las relaciones funcionales entre las variables fundamentales. Las relaciones funcionales se gobiernan por las cuatro leyes de la teoría electromagnética, las ecuaciones de Maxwell, así que el desarrollo subsecuente se hará utilizando estas leyes para probar el surgimiento de los objetos o elementos de circuito, como se verá en la siguiente sección.

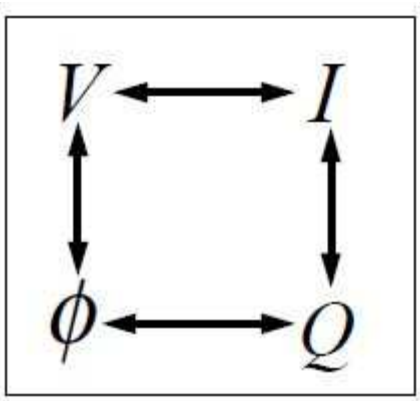
Para organizar los elementos que surgen, se debe aclarar primero las relaciones entre las variables: inicialmente se sabe que las variables voltaje y corriente, representan las variaciones temporales del flujo magnético y la carga respectivamente como se muestra en la figura siguiente

$$V \underset{d/dt}{\overset{\int dt}{\rightleftarrows}} \phi$$

$$I \underset{d/dt}{\overset{\int dt}{\rightleftarrows}} Q$$

Relaciones del voltaje con el flujo magnético y de la corriente con la carga.

Una vez establecidas estas relaciones, se reagrupan de forma siguiente: voltaje con corriente y carga; así como flujo magnético con corriente y carga, esto se puede apreciar en la siguiente figura[3]



MEMRISTANCIA

Es importante definir la memristancia, la cual es una propiedad del memristor. Cuando la carga fluye en una dirección a través del circuito, la resistencia del memristor se incrementa; de manera similar, si la carga fluye en sentido contrario a través del circuito la resistencia disminuye. Si el valor voltaje aplicado se apaga, impidiendo el flujo de carga, el memristor recuerda su último valor de resistencia. Cuando el flujo de carga vuelve a empezar, la resistencia inicial será la misma que cuando se dejo inactivo.

MEMORIA DEL DISPOSITIVO

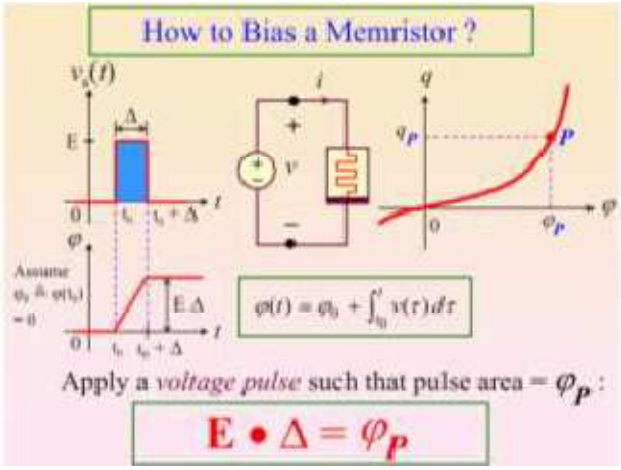
La importancia de retener el valor resistivo (un valor que puede ser alterado controlando la cantidad de carga que fluye a través del dispositivo así como la dirección en que fluye la corriente eléctrica) es de vital importancia para nuevos sistemas electrónicos donde se requiera ahorrar en consumo de energía y tener memorias no volátiles

Para poder comprender la característica de memoria que posee el memristor es necesario pensar primero en un pulso eléctrico, de duración Δ, similar al que se observa en la imagen.

Este pulso nos permitirá polarizar al memristor y colocar su punto de polarización, similar al de un transistor, donde más nos convenga. La razón matemática es muy simple, pues si integramos la función que describe al pulso de voltaje a lo largo del tiempo, obtendremos un valor que ahora será el flujo de enlace.

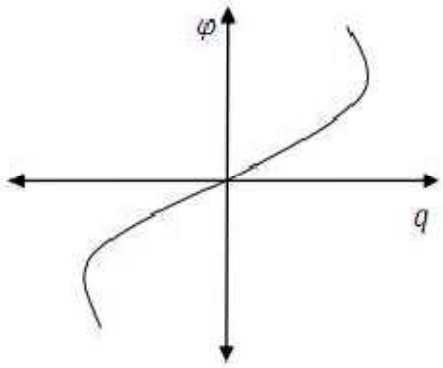
$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Entonces ahora se obtiene una gráfica ϕ-t similar a la que se describe la figura siguiente:



Curva ϕ-q característica del memristo[4]

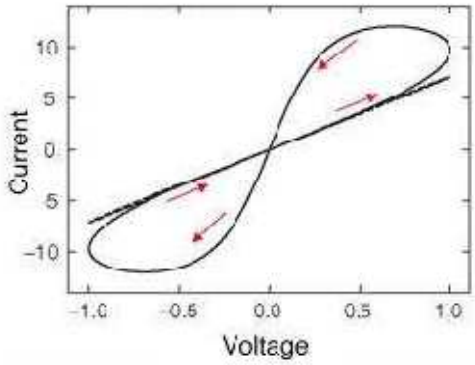
La curva φ-*q* del memristor es monótonamente creciente. La memristancia M(*q*) es la pendiente de la curva φ-*q*. Basándonos en la condición de pasividad del memristor, definida por Chua, el memristor es pasivo si y sólo si la memristancia M(*q*) es no negativa. Si M(*q*) ≥ 0, entonces la potencia instantánea disipada por el memristor $p(i) = M(q)i(t)^2$ es siempre positiva. Así el memristor es un dispositivo pasivo, puramente disipativo como una resistencia. De esta forma la curva φ-q de un memristor es siempre una función monótonamente creciente. A continuación se muestran ejemplos de curvas características de un memristor.



Curva φ-*q* característica de un memristor.

Curva v-i característica del memristor

Un sello importante del memristor es su característica curva de histéresis de *v-i*. Para un memristor excitado por una señal periódica (cuadrada, senoidal, etc.), cuando el voltaje *v(t)* es cero, la corriente *i(t)* es igualmente cero y viceversa. Así el voltaje y corriente deben cumplir con idéntico cruce por cero. Si cualquier dispositivo posee una curva como la mostrada en la figura, entonces se está hablando de un memristor o un sistema memristivo. Otra característica del memristor es que la curva se vuelve cada vez más pequeña con el aumento en la frecuencia[5]; es más, cuando la frecuencia aplicada crece hasta el infinito, el memristor se comporta como una resistencia.



Sistemas memristivos

En 1976, cinco años después de que Chua publicara su paper sobre memristors, él y Kang publicaron un paper definiendo una clase más amplia de sistemas, a los cuales llamaron sistemas memristivos. Estos son descritos por:

$$v = M(w, i)i$$

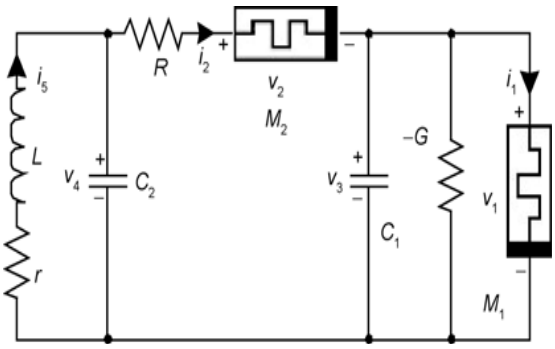
$$\frac{dw}{dt} = f(w, i)$$

Donde *w* es un conjunto de variables de estado, *M* y *f* pueden ser funciones de tiempo al mismo tiempo que *v* e *i* son voltaje y corriente respectivamente.

El teorema fundamental de un sistema memristivo establece que “todo dispositivo de dos terminales, el cual exhiba un lazo cerrado de histéresis en el plano v-i cuando un voltaje de CD y/o de CA de cualquier frecuencia sea aplicado, es un sistema memristivo.

CIRCUITO CAÓTICO CON DOS MEMRISTORES

En la figura 1 se muestra un circuito caótico de flujo controlado con dos memristores, dos terminales lineales y dos pasivos.



Este circuito se desarrolla del circuito caótico de Chua sustituyendo el diodo de Chua con un circuito memristivo activo que consiste en un memristor M_1 y un resistor con resistencia negativa -1/G, e insertando un memristor M_2 entre el circuito de resonancia LC_2 y salida no lineal del circuito de filtro. Dejando x= Theta1, y= Theta2, z= V_3, u= V_4, v= i_5, a= $1/C_1$, b= 1/L, c= r/L, d= G, e=R, C_2=1 y definir las funciones de no linealidad q(x) y W(x) como:

$$q(\xi)=\xi+\xi^3,$$
$$W(\xi)=\mathrm{d}q(\xi)/\mathrm{d}\xi=1+3\xi^2, \qquad (2)$$

El circuito propuesto consiste de cinco elementos dinámicos, incluyendo dos memristores, dos capacitores, y un inductor. Las variables de estados correspondientes son Theta1, Theta2, V_3y V_4 e i_5 respectivamente, dónde Theta1 y Theta2 son variables de estado internas de los dos memristores M_1 y M_2.

Aplicando las leyes de circuito de Kirchhoff al circuito de la figura 1 se obtiene un grupo de cinco ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales definen la relación entre las cinco variables del circuito.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}&=v_3,\\
\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{v_4-v_3}{RW_2+1},\\
\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{C_1}\left[(G-W_1)v_3-\frac{W_2}{RW_2+1}(v_3-v_4)\right],\\
\frac{\mathrm{d}v_4}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{C_2}\left[\frac{W_2}{RW_2+1}(v_3-v_4)+i_5\right],\\
\frac{\mathrm{d}i_5}{\mathrm{d}t}&=-\frac{1}{L}v_4-\frac{r}{L}i_5.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Respectivamente, las ecuaciones de estado pueden ser reescritas en forma adimensional como:

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=z,\\
\dot{y}&=(u-z)/(1+eW_2),\\
\dot{z}&=az(d-W_1)-a(z-u)W_2/(1+eW_2),\\
\dot{u}&=(z-u)W_2/(1+eW_2)+v,\\
\dot{v}&=-bu-cv,
\end{aligned} \qquad (3)$$

Donde $W_1 = 1+3x^2$, $W_2 = 1+3y^2$. Así, el circuito caótico con dos memristores propuesto es un sistema de cinco dimensiones con sus dinámicas descritas por la ecuación 3. Con base en el cual los análisis teóricos correspondientes y simulaciones numéricas pueden llevarse a cabo.

Los parámetros adimensionales a= 8, b= 10, c= 0, d= 2 y e= 0.1. Para las condiciones iniciales (0, 0, 0,1 X 10^{-4}, 0), el sistema (3) es caótico y muestra un atractor caótico con dos enfoques (A y B) como en las figuras siguientes:

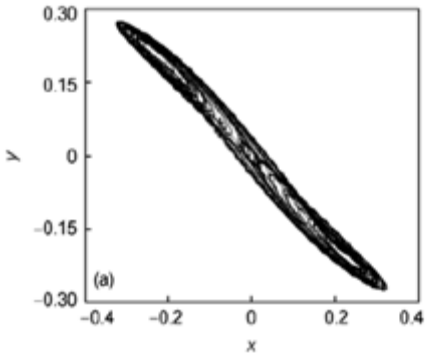


Figura A: Enfoque 1,2 (x,y respectivamente)

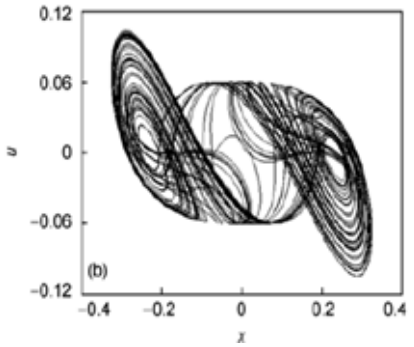


Figura B: Enfoque 1, v4 (x, u respectivamente)

Por el método de Wolf para calcular exponentes Lyapunov, los resultados son L_1 = 0.6254, L_2 = 0, L_3 = 0 y L_4 = -3.8694, y la dimensión de Lyapunov es d_L = 2.1616. Por lo tanto, observado desde los diagramas de fase, los exponentes y la dimensión de Lyapunov, podemos ver claramente que el circuito memristivo de quinto orden es un estado caótico.

CONCLUSION:

Como proyecto final de la experiencia educativa correspondiente a ecuaciones diferenciales se realizó la codificación de las ecuaciones mostradas en el artículo anteriormente mostrado, en la aplicación de Maple, la cual arrojó como resultado las gráficas mostradas en las figuras 1, 2 y 3:

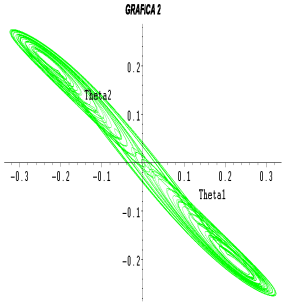


Figura 1: enfoque 2,1.

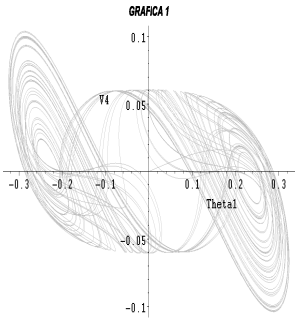
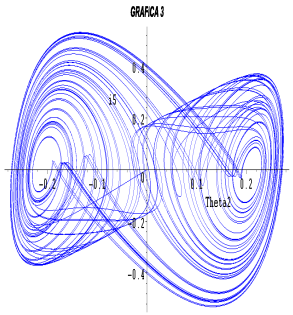


Figura 2: enfoque v4, 1.

Adicionalmente a las gráficas mostradas en la publicación de BaoBoCheng*et al*[1]se realizó una tercera con el enfoque 1, i5, como se puede apreciar en la siguiente figura:



REFERENCIAS:

1 BaoBoCheng, Shi GuoDong, XuJianPing, Liu Zhong& Pan SaiHu, Sci China Tech Sci, August 2011, Vol. 54, No.8, p. 2180-2187.

2 El Memristor como elemento básico de circuito,R. Enríquez, A. Gallardo, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica,Luis Enrique Erro # 1, Tonantzintla, Pue. , C.P. 72840, México. E-mail: rogerio@inaoep.mx, delfin-x@inaoep.mx

3 http://proton.ucting.udg.mx/somi/memorias/electron/Ele-15.pdf

4 http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lsi/cardenas_g_ja/capitulo3.pdf

5 INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL, http://itzamna.bnct.ipn.mx:8080/dspace/bitstream/123456789/5678/1/CIENCIASISTEMAS.pdf