Modelación de los Retornos Negativos del IPC con las Distribuciones Pareto y Pareto Generalizada, 1991-2014

Genoveva Lorenzo Landa[a], Sergio Fco. Juárez Cerrillo, J. Martín Cadena Barajas

Universidad Veracruzana

Clasificación: Tesina de Especialización.

Área: Valores Extremos.

Subárea: Modelación de Valor en Riesgo.

Trabajo presentado en: XXIX Foro Internacional de Estadística.

Palabras Clave: Censura Tipo I, Excedentes sobre Umbrales, Valor en Riesgo.

1. Introducción

En México el principal indicador que calcula la Bolsa Mexicana de Valores es el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). El IPC expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios de una muestra de 35 acciones que cotizan en la BMV y operan en diferentes sectores de la economía. Esta muestra de emisiones es una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto total de acciones cotizadas en la Bolsa. En este artículo modelamos las pérdidas grandes del IPC. Utilizamos un enfoque de extremos, ajustamos a los retornos negativos extremos las distribuciones Pareto y Pareto Generalizada. Empleamos máxima verosimilitud para datos con censura tipo I por la izquierda, lo cual es equivalente al enfoque de excedentes sobre umbrales de la metodología de valores extremos. Utilizamos la medida de bondad de ajuste Valor Promedio Absoluto Escalado como criterio para elegir una distribución. Aunque ambas distribuciones dan una descripción adecuada de los retornos negativos, la distribución Pareto proporciona un mejor ajuste.

[a] gelorenzo@uv.mx

2. Retornos del IPC

Dentro de un mercado financiero los instrumentos financieros se valoran de acuerdo a su rendimiento y riesgo. Este rendimiento en un período de tiempo $[0, T]$ se determina por $R_T = (S_T - S_0)/S_0$ donde S_T es el precio del instrumento financiero al final del período y S_0 es el precio al inicio del período. El retorno en el tiempo t es el rendimiento expresado en relación al tiempo anterior, es decir $R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$. En la Figura 1 parte superior se

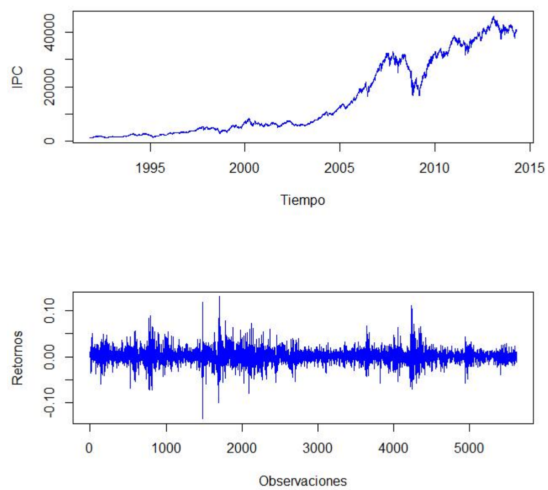

Figura 1: IPC del 8/11/1991 al 24/04/2014 y retornos estandarizados.

observa el comportamiento del IPC al cierre, desde noviembre de 1991 hasta marzo de 2014, obteniendo 5597 observaciones. En la parte inferior se puede observar mejor la volatilidad del mercado accionario correspondiente a los retornos del IPC. La Figura 2 muestra los retornos negativos en valor absoluto estandarizados. Estos son los datos que modelamos en este trabajo.

3. Valores de Retorno y VaR

Una forma de medir el riesgo financiero es con el Valor en Riesgo (VaR) el cual se define por $\text{Var}_q = F^{-1}(q), q \in (0, 1)$ donde F es la distribución de las pérdidas. A continuación describimos este procedimiento.

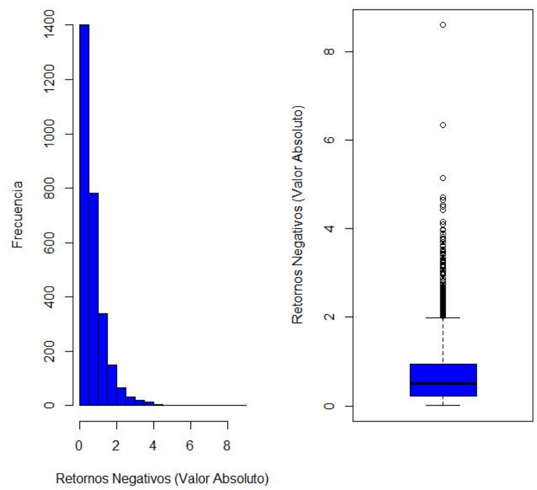

Figura 2: Histograma de los retornos negativos en valor absoluto.

La variable aleatoria X sigue la distribución Pareto, denotado $X \sim P(\alpha, \theta)$, si su función de distribución es

$$G(x; \alpha, \theta) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha}, x > \theta,$$

donde θ es un parámetro positivo de escala y α es un parámetro de forma. Supongamos que $X \sim P(\alpha, \theta)$ y sea $u > \theta$ un valor fijo, tal que $X - u|X > u$, entonces

$$P(X - u \leq x|X > u) = 1 - \left(\frac{u}{u+x}\right)^{\hat{\alpha}}.$$

De manera que si $X \sim P(\alpha, \theta)$, entonces $X - u|X > u$ es $P(\alpha, \theta)$. Sea u tal que $P(X > u) = 1 - q$ para $0 < q < 1$, entonces $P(X > u + x) = P(X > u)P(X - u > x|x > u)$ para $x > 0$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $P(\alpha, \theta)$. Si $q = 1 - (r/n)$, donde r es un entero positivo menor que n, entonces una estimación de $P(X > u)$ basada en los r estadísticos de orden más grandes está dada por r/n y una estimación de la cola derecha de X es

$$\hat{P}(X > u + x) = 1 - G(u + x; \hat{\alpha}, \hat{\theta}) = \frac{r}{n}\left(\frac{\hat{\theta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}, x > \hat{\theta}.$$

donde

$$\widehat{\alpha} = n\left[\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{X_i}{\widehat{\theta}}\right)\right]^{-1}$$

y $\hat{\theta} = \text{mín}_i X_i$ son los estimadores de maxima verosimilitud. De tal manera que un estimador del cuantil x_p de G se obtiene resolviendo para x_p a la ecuación

$$G(x_p; \alpha, \theta) = \hat{P}(X \leq x_p) = 1 - \frac{r}{n} \left(\frac{\hat{\theta}}{x_p - u} \right)^{\hat{\alpha}} = p.$$

Lo que resulta en $\hat{x}_p = u + \hat{\theta}(r/n(1-p))^{1/\hat{\alpha}}$. Este cuantil es el VaR estimado de la variable X con la distribución Pareto.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución desconocida F_X. Sea u un valor umbral fijo, supongamos que nos interesa la variable $X - u | X > u$. En la teoría de valores extremos, se determina que un modelo que aproxima la cola derecha de F_X está dado por

$$P(X > u + x) = P(x > u)(1 - F(x))$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \xi \dfrac{x}{\beta}\right)^{1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \beta > 0, \\ 1 - e^{-x/\beta} & \text{si } \xi = 0, \beta > 0, \end{cases}$$

con ξ un parámetro de forma y β un parámetro de escala. La función de distribución F se llama Pareto Generalizada. El uso de esta distribución para modelar valores extremos de la forma de excedentes $X - u | X > u$ se puede ver en Embrechts et al (1997) y Coles (2002).

Sea N_u el número de excedentes sobre u y sea n el total de observaciones, N_u/n es un estimador de $P(X > u)$ y un estimador de la cola superior de F_X es

$$\widehat{P}(X > u + x) = \frac{N_u}{n} \left(1 - \widehat{\xi} \frac{x}{\beta} \right)^{1/\widehat{\xi}}$$

donde $\hat{\beta}$ y $\hat{\xi}$ son los estimadores de máxima verosimilitud de β y ξ, respectivamente, basados en una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$, de la Pareto Generalizada β y $\xi \neq 0$. De tal manera que un estimador del cuantil x_p de F se obtiene resolviendo $\widehat{P}(X > u + x_p) = p$ para x_p, lo que resulta en

$$x_p = u + \frac{\widehat{\beta} \left(1 - \left[\dfrac{n(1-p)}{N_u} \right]^{\widehat{\xi}} \right)}{\widehat{\xi}}.$$

Este cuantil es el VaR estimado de la variable X con la distribución Pareto Generalizada.

4. Comparación de las Distribuciones Ajustadas

En la Figura 3 se observa el comportamiento del parámetro de forma y escala con las distribuciones Pareto y Pareto Generalizada basado en el enfoque de excedentes sobre umbrales. Se obtienen 2815 retornos negativos, trabajamos con la cola derecha que representa el 10 % de los datos más grandes, es decir, nos quedamos con 281 observaciones. Posteriormente censuramos por la izquierda 100 observaciones y calculamos el VaR con los 181 datos más grandes. En la Figura 3 se visualiza que existe estabilidad para modelar dichos umbrales para los dos modelos propuestos. A medida que aumentamos la fracción de censura podemos visualizar que la distribución se vuelve inestable, esto se debe a que el número de datos cada vez es mas pequeño. Para elegir una distribución que describa a los retornos negativos del

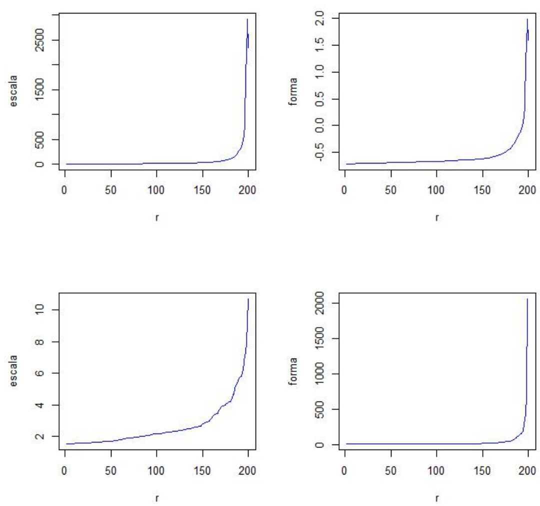

Figura 3: Parámetros de las ditribuciones. Superior: Pareto, Inferior: Pareto Generalizada.

IPC, comparamos a las distribuciones ajustadas con el Valor Absoluto Promedio Escalado, (ASAE) propuesto por Castillo y Hadi (1997)

$$ASAE = \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \left(\frac{|x_{(i)} - \hat{x}_{(i)}|}{x_{(n)} - x_{(n-k+1)}} \right),$$

donde $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$, son los estadísticos de orden observados y $\hat{x}_{(i)}$ son los respectivos cuantiles estimados con el modelo. La Figura 4 muestra el ASAE para ambas distribuciones. Se

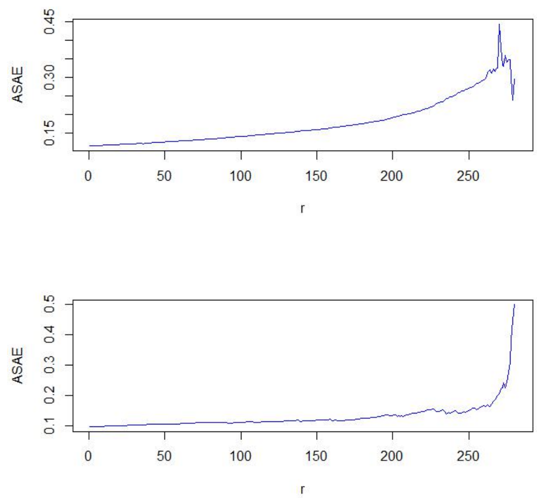

Figura 4: ASAE de las ditribuciones. Arriba: Pareto Generalizada. Abajo: Pareto.

observa que la distribución Pareto presenta un menor ASAE. Esto nos conduce a elegir la distribución Pareto con $\hat{\theta} = 1.83$ y $\hat{\alpha} = 3.15$ para modelar a los retornos negativos.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos visto que las distribuciones Pareto y Pareto Generalizada proporcionan un buen ajuste para describir a los retornos negativos del IPC. El criterio de evaluación de la bondad de ajuste del modelo fue el Valor Absoluto Promedio Escalado. Se considera mejor la distribución Pareto debido que es la que presenta un menor ASAE.

Referencias

1. Castillo, E., and Hadi, A.S. (1997). Fitting the Generalizad Pareto Distribution to Data. *Journal of the American Statistical Association,*92, 1609-1620.

2. Coles, S. (2002). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values.* London: Springer Verlag.

3. Embrechts, P., Kluppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events.* Berlin: Springer Verlag.