

Valor en Riesgo del Índice de Precios y Cotizaciones, 1991-2011^{*}

Genoveva Lorenzo Landa^a

Especialización en Métodos Estadísticos Universidad Veracruzana

Sergio Fco. Juárez Cerrillo

Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana

Héctor Fco. Coronel Brizio

Facultad de Física, Universidad Veracruzana

Clasificación: Tesis de Licenciatura.

Área: Valores Extremos.

Subárea: Modelación de Valor en Riesgo.

Trabajo presentado en: XXVIII Foro Nacional de Estadística.

Palabras Clave: Bondad de Ajuste, Censura Tipo II, Distribución Pareto, Riesgo de Mercado.

1. Introducción

Los índices de precios se integran por muestras de acciones del mercado que se consideran representativas de éste. En el mercado financiero internacional destacan índices como el Standard & Poors, el Dow Jones y el Nikkei. En México el principal indicador es el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Dentro de un mercado financiero los instrumentos financieros se valoran de acuerdo a su rendimiento y riesgo de que su valor disminuya al mismo tiempo que los movimientos del mercado. El rendimiento en un período de tiempo $[0, T]$ se determina por $R_T = (S_T - S_0)/S_0$ donde S_T es el precio del instrumento financiero al final del período y S_0 es el precio al inicio del período. El retorno en el tiempo t es el rendimiento expresado en relación al tiempo anterior, es decir $R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$. Junto con la integración

^{*}Este trabajo se presentó con financiamiento parcial de la Maestría en Estadística Aplicada de la Universidad Veracruzana

^agelorenzo@uv.mx

financiera global, la volatilidad de los mercados financieros se ha convertido en un tema de relevancia para los diferentes agentes económicos. La metodología de Valor en Riesgo (VaR) busca anticipar esta volatilidad y así cuantificar el riesgo calculando las magnitudes de grandes pérdidas así como las probabilidades de que ocurran. Una forma de hacer esto es mediante el cálculo del Valor en Riesgo, el cual se define por $\text{VaR}_p = F^{-1}(p)$, $0 < p < 1$, donde F es la distribución de las pérdidas. El VaR permite que los reguladores financieros asignen un número a su peor escenario y así planear de acuerdo a ese escenario. En este artículo calculamos el riesgo financiero de los retornos del IPC durante el período 1991-2011. Seguimos la propuesta de Coronel-Brizio y Hernández-Montoya (2010b) de modelar los retornos del IPC con la distribución Pareto para muestras con censura tipo II por la izquierda.

2. El IPC

En la gráfica (a) de la Figura 1 observamos el comportamiento del IPC al cierre desde el 11 de noviembre de 1991 hasta el 29 de noviembre del 2011. Se tienen 5012 observaciones. Sea I_t el valor de cierre del IPC en el tiempo t ($t = 1, \dots, 5012$), de modo que los retornos son $R_t = (I_t - I_{t-1})/I_{t-1}$. Las gráficas (b) y (c) de la Figura 1 muestran los retornos estandarizados del IPC. La función de autocorrelación de los retornos estandarizados, gráfica (d), nos permite considerar a los retornos como variables aleatorias independientes.

3. La Distribución Pareto y su Ajuste

La variable aleatoria X sigue la distribución Pareto, Pareto (1897), con parámetros α y θ si su función de distribución es

$$F(x; \alpha, \theta) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha, x > \theta,$$

donde θ es un parámetro positivo de escala y α es un parámetro positivo que se le conoce como índice de Pareto y corresponde al negativo de la pendiente de $\log(1 - F(x; \alpha, \theta))$ vs $\log(x)$. El valor esperado y la varianza de X son $E(X) = \alpha\theta/(\alpha - 1)$ para $\alpha > 1$ y $\text{Var}(X) = \alpha\theta^2/(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)$ para $\alpha > 2$, respectivamente.

En la Figura 2 vemos los histogramas de los retornos estandarizados positivos y negativos

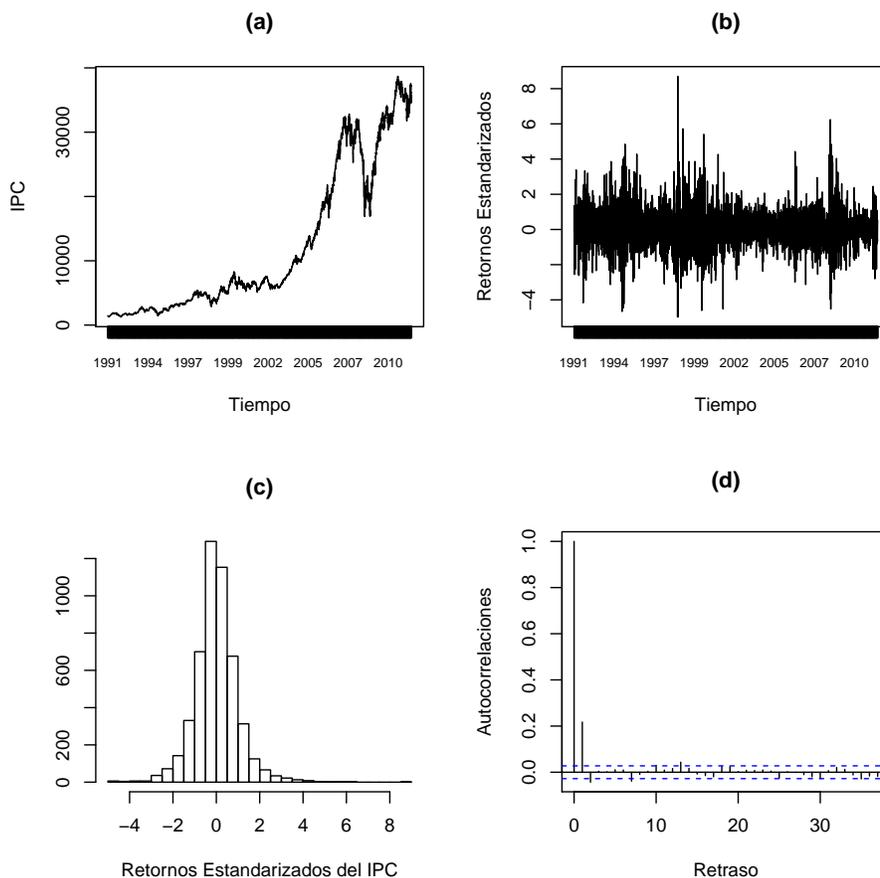


Figura 1: (a) IPC del 8/11/1991 al 29/11/2011, (b) Serie de tiempo de los retornos estandarizados, (c) Histograma de los retornos estandarizados, (d) Función de autocorrelación de los retornos estandarizados.

(en valor absoluto) estandarizados. El comportamiento aproximadamente lineal en la escala log-log proporciona evidencia empírica de que la Pareto es un modelo que describe adecuadamente a los retornos del IPC. Como un procedimiento formal utilizamos el estadístico de Anderson-Darling para probar que las observaciones x_1, \dots, x_n provienen de una distribución Pareto basándose en las r observaciones más grandes $x_{(n-r+1)} \leq x_{(n-r+2)} \leq \dots \leq x_{(n-1)} \leq$

	$q = 1 - r/n$	r	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$A_{n,r}^2$
retornos positivos	$q = 0.85$	389	2.397	0.596	0.22
$n = 2596$	$q = 0.9$	260	2.617	0.664	0.12
retornos negativos	$q = 0.9$	259	3.149	0.737	0.10
$n = 2595$	$q = 0.95$	130	3.973	0.943	0.01

Tabla 1: Parámetros estimados a los retornos del IPC y estadísticos de Anderson-Darling.

$x_{(n)}$. Este estadístico de prueba es

$$A_{n,r}^2 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r (2i-1) \{ \log(1 - z_{n-i+1}) - \log(z_{n-i+1}) \} - 2 \sum_{i=1}^r \log(z_{n-i+1}) \\ - \frac{1}{n} \left[(r-n)^2 \log(z_{n-r+1}) - r^2 \log(1 - z_{n-r+1}) + n^2 (1 - z_{n-r+1}) \right],$$

donde $z_{n-i+1} = F(x_{(n-i+1)}; \hat{\alpha}, \hat{\theta})$, y

$$\hat{\alpha} = r \left[\sum_{i=1}^r \log(x_{(n-r+i)}) - r \log(x_{(n-r+1)}) \right]^{-1} \quad \text{y} \quad \hat{\theta} = \left(\frac{r}{n} \right)^{1/\hat{\alpha}} x_{(n-r+1)}$$

son los estimadores de máxima verosimilitud de α y θ bajo censura tipo II. Los valores críticos de $A_{(n,r)}^2$ están tabulados en Coronel-Brizio y Hernández-Montoya (2010a).

4. VaR para los Retornos del IPC

La Tabla 1 muestra los resultados de ajustar separadamente la Pareto a los retornos positivos y negativos estandarizados (en valor absoluto) para diferentes niveles de censura tipo II por la izquierda. Los cálculos se hicieron en R. De la inspección de los valores críticos de $A_{n,r}^2$ en Coronel-Brizio y Hernández-Montoya (2010a), tenemos que no rechazamos a la Pareto con un nivel de significancia del 0.15. La Figura 3 muestra el ajuste de las colas derechas de las distribuciones Pareto. Para calcular el VaR, supongamos que X es Pareto con parámetros α y θ y sea u un valor tal que $P(X > u) = 1 - q$. Una estimación de la cola derecha de X con una proporción de censura de tipo II de $q = 1 - r/n$ es

$$\hat{P}(X > u + x) = 1 - F(u + x; \hat{\alpha}, \hat{\theta}) = \frac{r}{n} \left(\frac{\hat{\theta}}{x} \right)^{\hat{\alpha}},$$

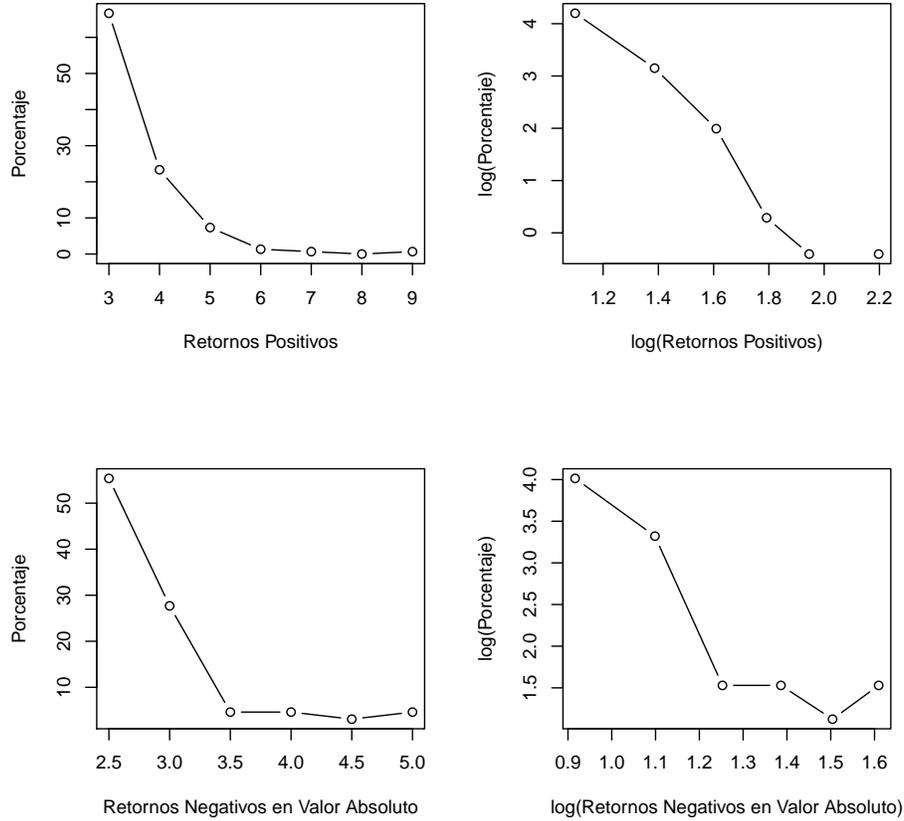


Figura 2: IPC del 8/11/1991 al 29/11/2011. Arriba: Cierres. Abajo: Retornos.

para $x > \hat{\theta}$. De tal manera que un estimador del cuantil x_p de F se obtiene resolviendo para x_p a la ecuación

$$\hat{P}(X > x_p) = \frac{r}{n} \left(\frac{\hat{\theta}}{x_p - u} \right)^{\hat{\alpha}} = p.$$

Lo que resulta en $\hat{x}_p = u + \hat{\theta}(r/np)^{1/\hat{\alpha}}$. Si $p = 1/m$, entonces $\hat{x}_{1/m}$ es el nivel de retorno con período de retorno de m días, $\hat{x}_{1/m} = u + \hat{\theta}(rm/n)^{1/\hat{\alpha}}$. Para los retornos negativos estandarizados con $q = 0.9$ tenemos $u = x_{(n-r-1)} = x_{(2595-259-1)} = 1.53$ y, la Tabla 1, el valor en riesgo estimado es

$$\hat{x}_{1/m} = 1.53 + 0.737 \left(\frac{259m}{2595} \right)^{1/3.149}.$$

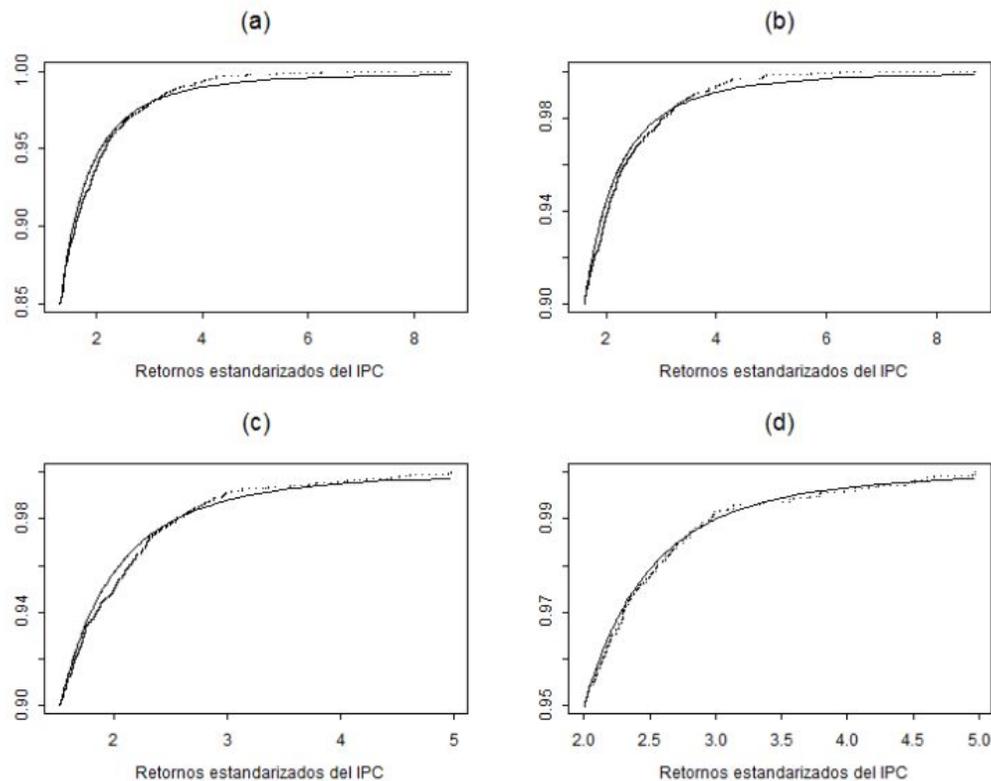


Figura 3: Ajuste de la Pareto a la cola derecha de los retornos positivos con (a) $q = 0.85$ y (b) $q = 0.9$. Ajuste de la Pareto a la cola derecha de los retornos negativos (valor absoluto) con (c) $q = 0.9$ y (d) $q = 0.95$.

La Figura 4 muestra las estimaciones de los niveles de retorno de los retornos negativos (en valor absoluto) desestandarizados $\text{Var}_{1/m} = \bar{R} + s\hat{x}_{1/m}$ para un horizonte a 10 años, donde \bar{R} y s son la media y la desviación estándar de los retornos R_t . Así por ejemplo vemos que en los próximos 10 días se espera una caída del aproximadamente el 9% del valor del IPC.

5. Conclusiones

Hemos visto que la distribución Pareto proporciona un buen ajuste a los retornos máximos y mínimos estandarizados del IPC. Es interesante notar el hecho de que los índices de Pareto estimados para el IPC son muy similares a los estimados para el Dow Jones en Coronel-Brizio y Hernández-Montoya (2010b). El criterio de evaluación de la bondad de ajuste del modelo

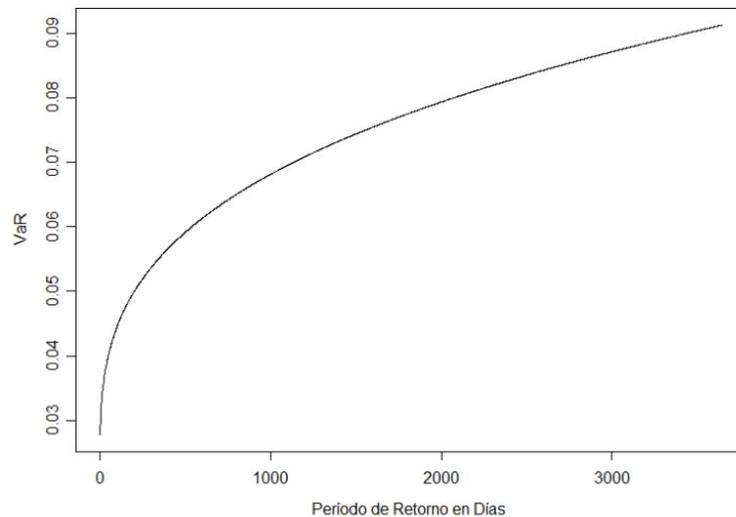


Figura 4: Valor en riesgo estimado de los retornos negativos (en valor absoluto) del IPC.

fue la prueba de Anderson-Darling para muestras con censura tipo II.

Referencias

1. CANO MEDINA, J.L. (2010). *Valor en Riesgo del IPC de México, 1991-2008*. Tesis de Maestría en Estadística Aplicada, Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana.
2. CORONEL-BRIZIO, H.F., AND HERNÁNDEZ-MONTOYA, A.R. (2010A). *The Anderson-Darling Test of Fit for the Power-Law Distribution from Left-Censored Samples*. *Econophysics A* 389, 3508-3515.
3. CORONEL-BRIZIO, H.F., AND HERNÁNDEZ-MONTOYA, A.R. (2010B). *On fitting the Pareto Levy Distribution to Stock Market Index Data*. *Econophysics A* 389, 3508-3515.
4. PARETO, V. (1897). *Cours d'Economie Politique*. Paris: Rouge et Cie.