SISTEMAS DE COORDENADAS EN 3D

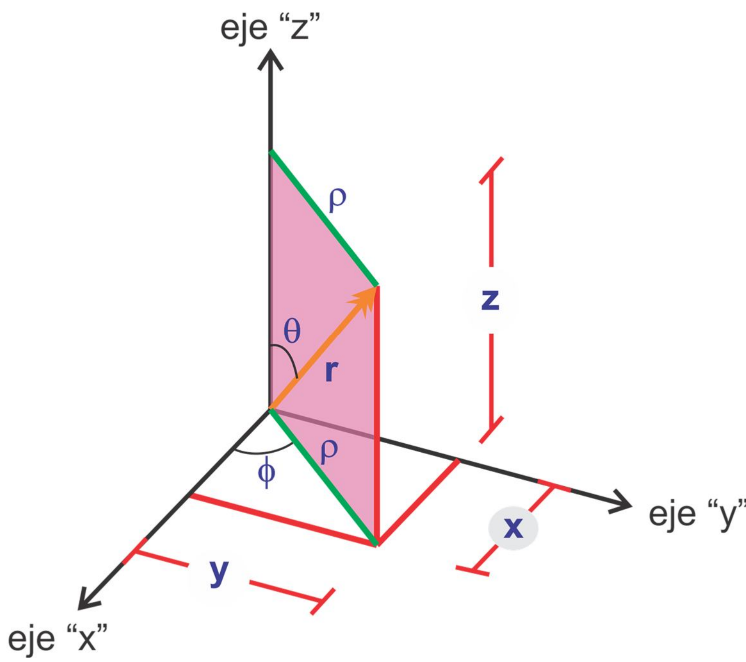
GEOMETRÍA ANALÍTICA: Tema 1

Profesor Antonio Herrera Escudero

Universidad Veracruzana

Antes de comenzar, observemos el siguiente dibujo, e identifiquemos los parámetros

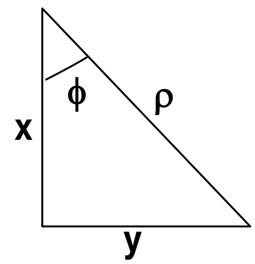
x, y, z, r, ρ, θ, ϕ



Podemos observar que:

1. 'x', 'y' y 'z', son las coordenadas rectangulares que ya conocemos y que representan longitudes medidas sobre cada uno de los ejes 'X', 'Y' y 'Z' respectivamente.
2. 'ρ' es la longitud de la proyección del radio vector 'r' sobre el plano 'X-Y.
3. 'ϕ' es el ángulo azimutal y está descrito sobre el plano 'X-Y', se mide desde eje 'X' positivo y hasta la línea 'ρ', siempre en sentido positivo (es decir, en contra de las manecillas del reloj). ϕ puede tomar valores desde 0 y hasta 2π, es decir, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (Cuestión de fuentes: será indistinto poner θ o φ).

4. 'x', 'y', 'ρ' forman un triángulo rectángulo, donde 'ρ' es la hipotenusa, 'x' el cateto adyacente a 'ϕ' y 'y' el cateto opuesto a 'ϕ'.



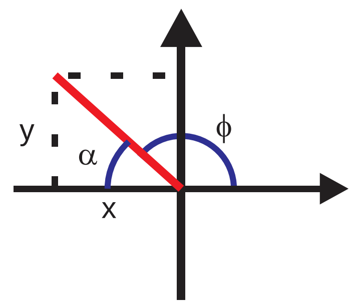
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De donde:

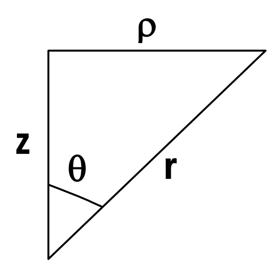
$$x = \rho\, Cos(\varphi)$$

$$y = \rho\, Sen(\varphi)$$

$$\varphi = \begin{cases} Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| & en\ el\ 1er\ cuadrante \\ \pi - Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| & en\ el\ 2do\ cuadrante \\ \pi + Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| & en\ el\ 3er\ cuadrante \\ 2\pi - Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| & en\ el\ 4to\ cuadrante \end{cases}$$



5. 'θ' es el ángulo polar, el cual se forma en el plano 'Z-ρ', a partir del eje 'Z' positivo y hasta la línea 'r'. θ puede tomar valores que van de 0 a π, es decir, $0 \leq \theta \leq \pi$.
6. 'z', 'ρ' y 'r' forman un triángulo rectángulo, donde 'r' es la hipotenusa, 'z' es el cateto adyacente al ángulo 'θ' y 'ρ' es el cateto opuesto al ángulo 'θ'



De donde:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = r\, Sen(\theta)$$
$$z = r\, Cos(\theta)$$

$$\theta = \begin{cases} Tan^{-1}\left|\frac{\rho}{z}\right| & para\ z > 0 \\ \pi - Tan^{-1}\left|\frac{\rho}{x}\right| & para\ z < 0 \\ 0 & para\ z = 0 \end{cases}$$

Ahora, tenemos tres formas geométricas de llegar al punto que está en la punta del radio vector $\vec{r}$, cada una de estas formas usa tres de los seis parámetros señalados más arriba, estas ternas constituyen tres sistemas de coordenadas

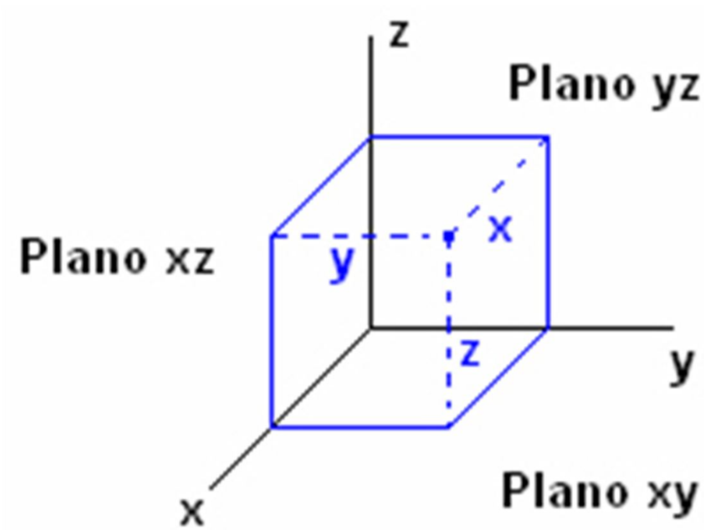
Coordenadas rectangulares: (x, y, z)

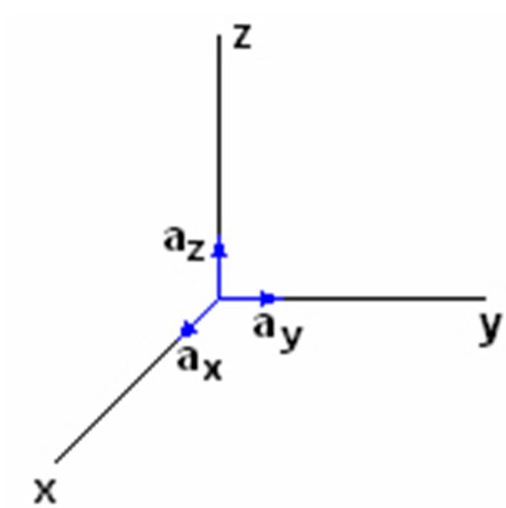
Coordenadas Esféricas: (r, θ, φ)

Coordenadas Cilíndricas (ρ, φ, z)

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

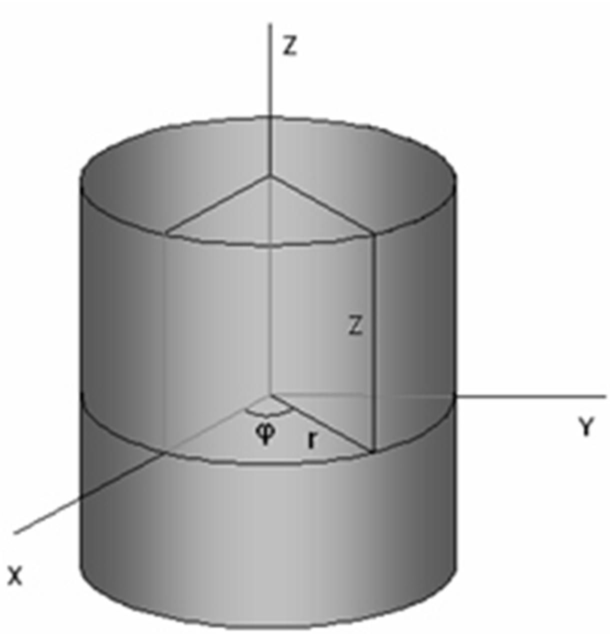
Observe el dibujo de abajo para entender este sistema

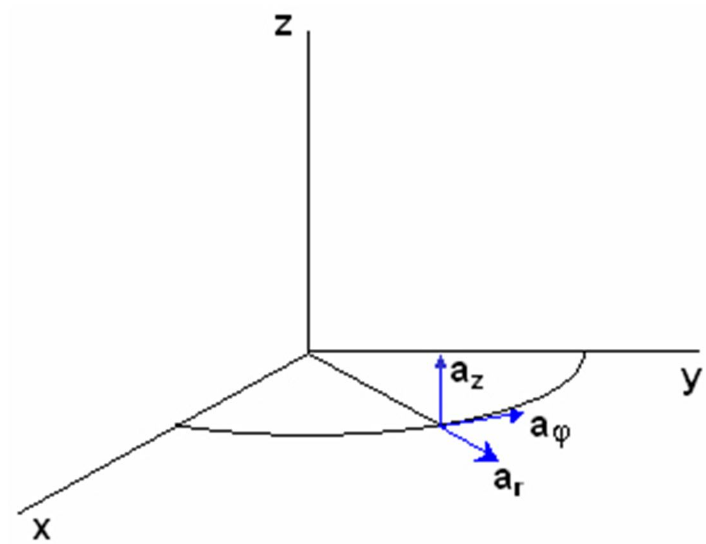




SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

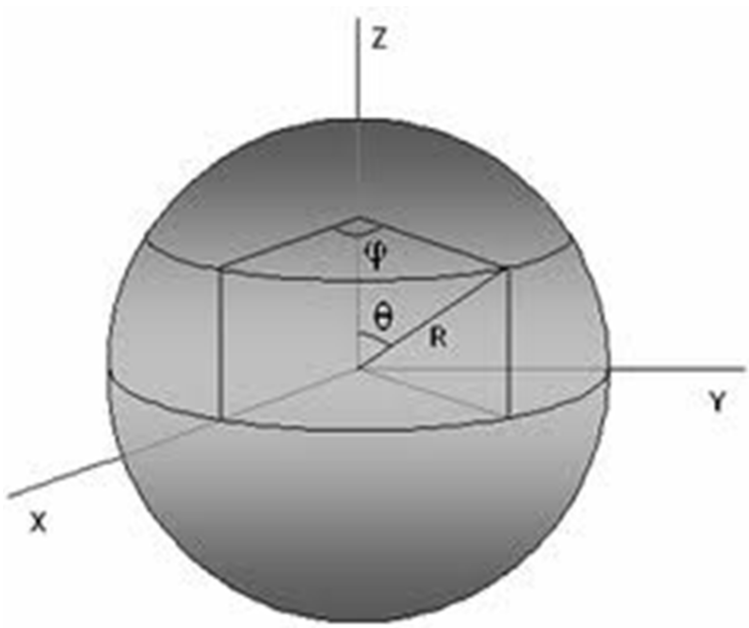
Observe el dibujo de abajo para entender este sistema

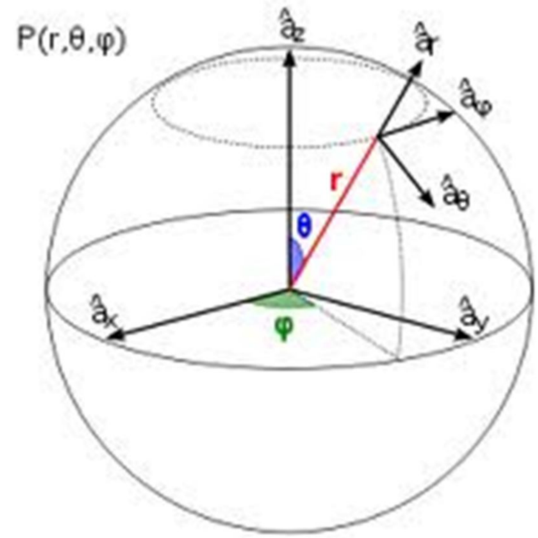




SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

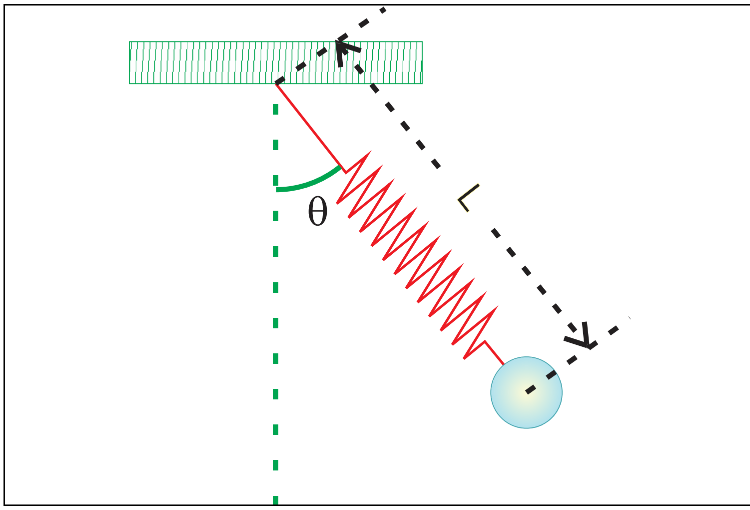
Observe el dibujo de abajo para entender este sistema





TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS EN 3D

Siempre que se expresa analíticamente, un punto, un vector, la ecuación de una curva o de una superficie, o simplemente alguna expresión o ecuación cualquiera, cada variable representa una coordenada, de tal forma que el conjunto de variables estará en algún sistema de coordenadas, este sistema puede ser cualquiera, de hecho podría no obedecer a alguna geometría en especial, es decir, las coordenadas pueden ser generalizadas. por ejemplo, las ecuaciones de movimiento del sistema



$$\theta(t) = \theta_0 Sen(\omega_1 t + \phi_0)$$

$$x(t) = L_0 + ACos(\omega_2 t + \varphi_0)$$

Con

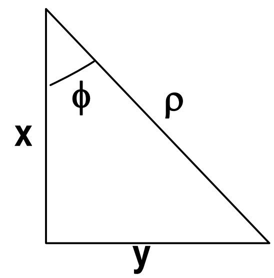
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L_0}} \quad y \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

no representan coordenadas cartesianas, ni cilíndricas o esféricas, simplemente son las coordenadas naturales del movimiento, es decir son las coordenadas generalizadas más convenientes, dado que hay dos grados de libertad para el movimiento del péndulo: a lo largo del resorte (coordenada x) y en movimiento angular alrededor de la vertical (coordenada θ).

Sin embargo gran parte de los análisis de muchos sistemas, caen en la conveniencia de utilizar coordenadas, ya sea rectangulares o cilíndricas o esféricas, por lo cual vale la pena seguir el análisis de este tema y mostrar como pasar la representación de un punto, un radio vector o una ecuación, que esté en alguno de estos sistemas de coordenadas, a otro de estos sistemas de coordenadas. cabe notar que solo hay seis posibles transformaciones:

Cilíndricas a Rectangulares
Rectangulares a Cilíndricas
Esféricas a Rectangulares
Rectangulares a Esféricas
Cilíndricas a Esféricas
Esféricas a Cilíndricas

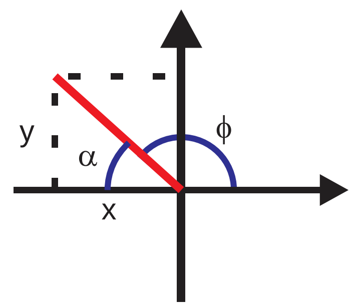
Si Utilizamos las relaciones y triángulos rectángulos de los puntos 4 y 6 anteriores:

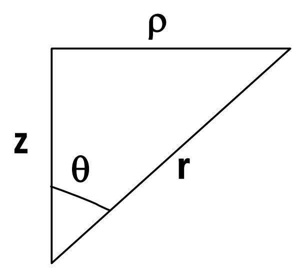


<table>
<tr>
<td>De donde:

$x = \rho\, Cos(\varphi)$

$y = \rho\, Sen(\varphi)$</td>
<td>$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \begin{cases} Tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert & en\ el\ 1er\ cuadrante \\ \pi - Tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert & en\ el\ 2do\ cuadrante \\ \pi + Tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert & en\ el\ 3er\ cuadrante \\ 2\pi - Tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert & en\ el\ 4to\ cuadrante \end{cases}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>



<table>
<tr>
<td>De donde:

$\rho = r\, Sen(\theta)$
$z = r\, Cos(\theta)$</td>
<td>$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\theta = \begin{cases} Tan^{-1}\left\lvert\frac{\rho}{z}\right\rvert = Tan^{-1}\left\lvert\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right\rvert & para\ z > 0 \\ \pi - Tan^{-1}\left\lvert\frac{\rho}{x}\right\rvert = \pi - Tan^{-1}\left\lvert\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right\rvert & para\ z < 0 \\ 0 & para\ z = 0 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

Tendremos las ecuaciones de transformación requeridas:

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS ESFÉRICAS A RECTANGULARES:

$x = \rho Cos\varphi$ $\quad y = \rho Sen\varphi$ $\quad z = rCos\theta$

$\boldsymbol{x = rSen\theta Cos\varphi}$ $\quad \boldsymbol{y = rSen\theta Sen\varphi}$ $\quad \boldsymbol{z = rCos\theta}$

Con $\rho = rSen\theta$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS RECTANGULARES A ESFÉRICAS:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = Tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \qquad \boldsymbol{\varphi} = \begin{matrix} Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \\ 180° - Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \\ 180° + Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \\ 360° - Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \end{matrix}$$

Con $\rho = rSen\theta$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A RECTANGULARES:

$\boldsymbol{x = \rho Cos\varphi}$ $\quad \boldsymbol{y = \rho Sen\varphi}$ $\quad \boldsymbol{z = z}$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS RECTANGULARES A CILÍNDRICAS:

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \boldsymbol{\varphi} = \begin{matrix} Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \\ 180° - Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \\ 180° + Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \\ 360° - Tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \end{matrix} \qquad \boldsymbol{z = z}$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \qquad \theta = \begin{cases} Tan^{-1}\left|\frac{\rho}{z}\right| & para\ z > 0 \\ \pi - Tan^{-1}\left|\frac{\rho}{z}\right| & para\ z < 0 \\ 0 & para\ z = 0 \end{cases} \qquad \phi = \phi$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS :

$\rho = rSen\theta$ $\quad \phi = \phi$ $\quad z = rCos(\theta)$