Álgebra. 2004–2005. Ingenieros Industriales.

Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla.

Tema 2.- Formas Cuadráticas.

Definición y representación matricial.
Clasificación de las formas cuadráticas.
Reducción a suma de cuadrados: método de Lagrange.

En el Tema 1, al estudiar las cónicas y las cuádricas, hemos descrito y considerado ejemplos referentes a cómo completar cuadrados en un polinomio de segundo grado sin términos cruzados. Veremos en esta lección que este mismo procedimiento (completar cuadrados) puede usarse en un polinomio homogéneo de segundo grado en varias variables, que se denomina una forma cuadrática. Las formas cuadráticas surgen en estadística, mecánica y en otros problemas de la física. Aparecen, además, al estudiar los máximos y los mínimos de las funciones de varias variables, como se verá en la asignatura de Cálculo.

1. Definición y representación matricial.

Un **polinomio homogéneo de segundo grado** en varias variables, es decir un polinomio de segundo grado en el que todos los términos son de segundo grado, se suele denominar **forma cuadrática**. En dos variables (x, y) tendremos

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

y en tres variables

$$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

En el caso genérico de n variables, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la forma cuadrática adopta la expresión

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \cdots \\ &+ 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-2,n-1}x_{n-2}x_{n-1} + 2a_{n-2,n}x_{n-2}x_n + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kk}x_k^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} 2a_{ij}x_{ij}. \end{aligned}$$

Nótese que puesto que hemos escrito los coeficientes de los términos cruzados como $2a_{ij}$, la forma cuadrática que es una función (real de varias variables) $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ puede expresarse a través de una matriz simétrica $A = [a_{ij}]$ (una matriz cuadrada se dice simétrica cuando todos sus elementos verifican $a_{ij} = a_{ji}$, es decir, cuando A coincide con su traspuesta, $A^T = A$):

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

siendo $\mathbf{x}$ el vector columna de las variables.

En particular, en el caso de dos variables, tendremos

$$Q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x},$$

y en el de tres variables

$$Q(x, y, z) = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

El estudio de las formas cuadráticas lo completaremos en el Tema 12 donde, aprovechando propiedades de las matrices simétricas, reduciremos a suma de cuadrados por un proceso alternativo al que describiremos en este tema.

2. Clasificación de las formas cuadráticas.

Definición. Se dice que la forma cuadrática $Q : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow Q = x^T Ax \in \mathbb{R}$ (y que la matriz simétrica A) es

(1) **definida positiva** si $Q(x) = x^T Ax > 0,\ \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

(2) **definida negativa** si $Q(x) = x^T Ax < 0,\ \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

(3) **indefinida** si existen vectores en $\mathbb{R}^n$ para los que Q es positiva y otros para los que es negativa, es decir, $\exists v_1 \in \mathbb{R}^n$ y $\exists v_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$Q(v_1) = v_1^T Av_1 > 0 \quad \text{y} \quad Q(v_2) = v_2^T Av_2 < 0.$$

(4) **semidefinida positiva** si $Q(x) = x^T Ax \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(5) **semidefinida negativa** si $Q(x) = x^T Ax \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Nota. Con las definiciones dadas los casos de formas cuadráticas semidefinidas (positiva o negativa) incluyen a los casos de formas cuadráticas definidas (positiva o negativa). Para considerar situaciones disjuntas, en la definición de forma cuadrática semidefinida suele añadirse que se cumpla $Q(v) = 0$ para algún vector $v \neq 0$. En caso de no existir tal vector v, siendo semidefinida (positiva o negativa) será definida (positiva o negativa). En lo que sigue consideramos la definición dada más arriba con objeto de simplificar los enunciados.

En el caso general de varias variables, el siguiente resultado nos da la clasificación pero sólo sirve para formas cuadráticas sin términos mixtos. Necesitaremos, por tanto, un método sistemático que nos permita escribir cualquier forma cuadrática como suma de cuadrados. Veremos un método (el de Lagrange) en la siguiente sección que permite eliminar los términos mixtos y conseguir lo que se llama una *forma canónica* de la forma cuadrática.

Teorema de clasificación de formas cuadráticas.
Sea $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$. Se verifica:

(1) Q es definida positiva $\Longleftrightarrow$ todos los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son (estrictamente) positivos,

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \cdots, \alpha_n > 0.$$

(2) Q es definida negativa $\Longleftrightarrow$ todos los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son (estrictamente) negativos,

$$\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0, \cdots, \alpha_n < 0.$$

(3) Q es indefinida $\Longleftrightarrow$ hay algún coeficiente $\alpha_i > 0$ y algún coeficiente $\alpha_j < 0$, es decir,

$$\exists\, i, j \quad \text{tales que} \quad \alpha_{\mathrm{i}} > 0,\ \alpha_{\mathrm{j}} < 0.$$

(4) Q es semidefinida positiva si no hay ningún coeficiente negativo,

$$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \cdots, \alpha_n \geq 0.$$

(5) Q es semidefinida negativa si no hay ningún coeficiente positivo,

$$\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq 0, \cdots, \alpha_n \leq 0.$$

3. Reducción a suma de cuadrados: método de Lagrange.

En esta sección mostramos un método sencillo que permite escribir cualquier forma cuadrática como suma de cuadrados, es decir, sin términos mixtos. Este método, denominado de Lagrange, se basa en dos ideas sencillas: completar cuadrados y, a veces, que *suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados*. Aprenderemos a usar el método con los siete ejemplos que aparecen a continuación y, sólo al final, describiremos el método en forma general.

Los siguientes ejemplos ilustran el método de Lagrange, que nos permite llevar cualquier forma cuadrática a una suma de cuadrados (una forma canónica). Obviamente el carácter de la forma cuadrática no cambia con las operaciones usadas en el método de Lagrange, lo cual permite clasificar la forma cuadrática utilizando el *teorema de clasificación de formas cuadráticas* enunciado en la sección anterior.

Ejemplo 1.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_1(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2.$$

Al aparecer los términos x_1^2 y x_1x_2 podemos completar cuadrados en la primera variable

$$Q_1(x) = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 - x_2^2 = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{13}{4}x_2^2.$$

Finalmente, mediante el cambio $y_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2,\ \ y_2 = x_2$ llegamos a

$$Q_1(x) = y_1^2 - \frac{13}{4}y_2^2.$$

Por tanto, la forma cuadrática es indefinida puesto que

$$Q_1(y_1 = 1, y_2 = 0) = Q_1(x_1 = 1, x_2 = 0) = 1 \qquad \text{y} \quad Q_1(y_1 = 0, y_2 = 1) = -\frac{13}{4}.$$

Pero, la anterior no es la única forma de proceder. Puesto que también aparecen en Q_1 los términos x_2^2 y x_1x_2, podemos completar cuadrados en la segunda variable:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 = -\left(x_2^2 - 3x_1x_2\right) + x_1^2 \\ &= -\left(x_2 - \frac{3}{2}x_1\right)^2 + \frac{9}{4}x_1^2 + x_1^2 = -\left(x_2 - \frac{3}{2}x_1\right)^2 + \frac{13}{4}x_1^2 \\ &= -z_2^2 + \frac{13}{4}z_1^2 = \frac{13}{4}z_1^2 - z_2^2, \end{aligned}$$

donde al final hemos hecho el cambio $z_1 = x_1,\ \ z_2 = x_2 - \frac{3}{2}x_1$. Nótese que si preferimos hacer el cambio $u_1 = x_2 - \frac{3}{2}x_1,\ \ u_2 = x_1$ llegamos a

$$Q_1(x) = -u_1^2 + \frac{13}{4}u_2^2.$$

Nada nos impide hacer el cambio $u_1 = x_2 - \frac{3}{2}x_1,\ \ u_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}x_1$, y llegar a

$$Q_1(x) = -v_1^2 + v_2^2.$$

Obsérvese que siempre que reducimos Q_1 a una suma de cuadrados aparecen un coeficiente positivo y uno negativo:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -13/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13/4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 13/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{13}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{13}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \ldots \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_2(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2.$$

Al aparecer los términos x_1^2 y x_1x_2 podemos completar cuadrados en la primera variable:

$$Q_2(x) = (2x_1 - x_2)^2$$

y, finalmente, hacemos el cambio $y_1 = 2x_1 - x_2,\ \ y_2 = x_2$ para obtener

$$Q_2(x) = y_1^2.$$

Nótese que tomamos, por simplicidad, $y_2 = x_2$, pero que podemos elegir $y_2 = \alpha x_1 + \beta x_2$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + 2\beta \neq 0$ y seguimos obteniendo $Q_2(x) = y_1^2$.

Si preferimos hacer el cambio $z_1 = x_1,\ \ z_2 = 2x_1 - x_2$, obtenemos

$$Q_2(x) = z_2^2.$$

Además, en este caso, si preferimos completar cuadrados en la segunda variable (en vez de en la primera) llegamos a la misma expresión.

Obsérvese que siempre que reducimos Q_2 a una suma de cuadrados aparecen un coeficiente positivo y otro nulo. Esta forma cuadrática es, por tanto, semidefinida positiva.

Ejemplo 3.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_3(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 4x_1x_2.$$

Completamos cuadrados en la primera variable (puesto que aparecen términos en x_1^2 y x_1x_2), para finalmente hacer el cambio $y_1 = x_1 - 2x_2,\ \ y_2 = x_2$:

$$Q_3(x) = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2 = y_1^2 - 4y_2^2.$$

Puesto que aparecen un coeficiente positivo y uno negativo, esta forma cuadrática es indefinida.

Ejemplo 4.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q_4(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4x_1x_2.$$

En este caso no podemos completar cuadrados ni en la primera ni en la segunda variable (pues no aparecen ni x_1^2 ni x_2^2). Sin embargo sí hay término mixto (x_1x_2). En esta situación recurrimos a la idea de introducir una *suma por diferencia*, que conseguimos, por ejemplo, mediante el cambio $x_1 = y_1 + y_2,\ \ x_2 = y_1 - y_2$:

$$Q_4(x) = 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4y_1^2 - 4y_2^2.$$

Hemos conseguido ya una suma de cuadrados.

Obsérvese que siempre que reducimos Q_4 a una suma de cuadrados aparecen un coeficiente positivo y uno negativo. Esta forma cuadrática es, por tanto, indefinida.

Ejemplo 5.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$

$$Q_5(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Completamos cuadrados en la primera variable puesto que aparecen términos en x_1^2 y x_1x_2:

$$\begin{array}{rcl} Q_5(x) & = & 3\left(x_1^2+\dfrac{4}{3}x_1x_2\right)+2x_2^2+x_3^2+4x_2x_3 \\ & = & 3\left(x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)^2-\dfrac{4}{3}x_2^2+2x_2^2+x_3^2+4x_2x_3 \\ & = & 3\left(x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)^2+\dfrac{2}{3}x_2^2+x_3^2+4x_2x_3. \end{array}$$

A continuación completamos cuadrados en la segunda variable puesto que aparecen términos en x_2^2 y x_2x_3:

$$\begin{array}{rcl} Q_5(x) & = & 3\left(x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)^2+\dfrac{2}{3}(x_2^2+6x_2x_3)+x_3^2 \\ & = & 3\left(x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)^2+\dfrac{2}{3}(x_2+3x_3)^2-6x_3^2+x_3^2 \\ & = & 3\left(x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)^2+\dfrac{2}{3}(x_2+3x_3)^2-5x_3^2. \end{array}$$

Finalmente el cambio $y_1=x_1+\frac{2}{3}x_2,\ y_2=x_2+3x_3,\ y_3=x_3$ nos lleva a

$$Q_5(x)=3y_1^2+\frac{2}{3}y_2^2-5y_3^2.$$

Obsérvese que siempre que reducimos Q_5 a una suma de cuadrados aparecen dos coeficientes positivos y uno negativo. Esta forma cuadrática es, por tanto, indefinida.

Ejemplo 6.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$

$$Q_6(x)=x^TAx=\left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right]=x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3.$$

Completamos cuadrados en la primera variable puesto que aparecen términos en x_1^2, x_1x_2 y x_1x_3:

$$\begin{array}{rcl} Q_6(x) & = & (x_1+2x_2+x_3)^2-4x_2^2-x_3^2-4x_2x_3+5x_2^2+2x_3^2+6x_2x_3 \\ & = & (x_1+2x_2+x_3)^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3. \end{array}$$

A continuación completamos cuadrados en la segunda variable (puesto que aparecen términos en x_2^2 y x_2x_3):

$$Q_6(x)=(x_1+2x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2=y_1^2+y_2^2,$$

donde hemos hecho el cambio $y_1=x_1+2x_2+x_3,\ y_2=x_2+x_3,\ y_3=x_3$.

Obsérvese que siempre que reducimos Q_6 a una suma de cuadrados aparecen dos coeficientes positivos y uno nulo. Esta forma cuadrática es, por tanto, semidefinida positiva.

Ejemplo 7.

Consideremos la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

$$Q_7(x)=x^TAx=\left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right]=3x_1x_2+5x_3x_4.$$

Puesto que no hay ningún término al cuadrado, necesitamos recurrir a *suma por diferencia.* Lo hacemos, por ejemplo, mediante el cambio:

$$x_1=y_1+y_2,\ x_2=y_1-y_2,\ x_3=y_3,\ x_4=y_4$$

con lo que
$$Q_7(x) = 3(y_1+y_2)(y_1-y_2) + 5y_3y_4 = 3y_1^2 - 3y_2^2 + 5y_3y_4.$$
Ya tenemos suma de cuadrados en las dos primeras variables. Nuevamente, como no hay ningún término al cuadrado en las variables restantes (tercera y cuarta), necesitamos recurrir a *suma por diferencia*. Lo hacemos, por ejemplo, mediante el cambio:
$$y_1 = z_1,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3 + z_4,\ y_4 = z_3 - z_4,$$
y obtenemos finalmente
$$Q_7(x) = 3z_1^2 - 3z_2^2 + 5(z_3+z_4)(z_3-z_4) = 3z_1^2 - 3z_2^2 + 5z_3^2 - 5z_4^2$$
que ya aparece como suma de cuadrados.

Nótese que ambos cambios de variables, en este caso sencillo, se podían haber hecho a la vez:
$$x_1 = z_1 + z_2,\ x_2 = z_1 - z_2,\ x_3 = z_3 + z_4,\ x_4 = z_3 - z_4,$$
con lo que habríamos llegado, en un solo paso, al resultado final.

Obsérvese que siempre que reducimos Q_7 a una suma de cuadrados aparecen dos coeficientes positivos y dos negativos (y obviamente ninguno nulo). Esta forma cuadrática es pues indefinida.

Como quedó de manifiesto en los siete ejemplos anteriores, reduciendo de diferentes modos una forma cuadrática a suma de cuadrados, podemos obtener coeficientes diferentes. Sin embargo tiene lugar el siguiente hecho importante:
Si una forma cuadrática se reduce a suma de cuadrados de dos formas diferentes (es decir, si se obtienen dos formas canónicas diferentes para dicha forma cuadrática), el número de coeficientes positivos es el mismo en ambas expresiones. Y lo mismo ocurre con el número de coeficientes negativos y con el de número de coeficientes nulos.

Este resultado se conoce como **ley de inercia de Sylvester**.

Formulación general del método de Lagrange.

Sea $Q(x) = x^T Ax$ una forma cuadrática. El método consistente en ir completando cuadrados haciendo cambios de variable en los que en cada paso cambia una (o a lo sumo dos) de las variables, suele denominarse método de Lagrange. Hemos visto con ejemplos este método, que se puede sistematizar como sigue. Hay que distinguir dos casos:

1. Si para algún índice i se tiene $a_{ii} \neq 0$, podemos completar cuadrados con todos los términos que contengan a x_i para obtener
$$Q(x) = a_{ii}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j\right)^2 + Q'(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$
donde Q' es una nueva forma cuadrática con $n-1$ variables a la que se le vuelve a aplicar el proceso.

   El cambio de variables que se utiliza es
$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j \ ,\ y_j = x_j \text{ para } j \neq i.$$

2. Si $a_{ii} = 0$ para todo i elegimos $a_{ij} \neq 0$ (si todos fueran cero tendríamos $\Psi(x) = 0$ que ya está reducida). En este caso hacemos el cambio de variables
$$x_i = y_i + y_j \ ,\ x_j = y_i - y_j \text{ y } x_k = y_k \text{ para } k \neq i, j,$$
y pasamos de nuevo al caso (1), pues $a_{ij}x_ix_j = a_{ij}y_i^2 - a_{ij}y_j^2$.

Un teorema para clasificar formas cuadráticas de dos variables.

Clasificar una forma cuadrática de dos variables a partir del determinante de la matriz simétrica asociada es posible usando el siguiente resultado, que se demuestra fácilmente completando cuadrados.
Teorema. La forma cuadrática

$$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = [x \ \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

es:

- definida positiva si, y sólo si, $a > 0$ y $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 > 0$.
- definida negativa si, y sólo si, $a < 0$ y $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 > 0$.
- indefinida si, y sólo si, $\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 < 0$.

Notemos que si el determinante es nulo la forma cuadrática es semidefinida. Este teorema, que no merece la pena memorizar, se suele aplicar al estudiar los extremos de funciones de dos variables en la asignatura de Cálculo.
Para demostrar este resultado, separemos los casos en los que $a \neq 0$ y los casos en los que $a = 0$.
Si $a \neq 0$, entonces podemos completar cuadrados en x

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a\left[x^2 + \frac{2b}{a}xy\right] + cy^2 = a\left[x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \left(\frac{b}{a}y\right)^2 - \left(\frac{b}{a}y\right)^2\right] + cy^2 \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \left(\frac{b}{a}y\right)^2\right] - a\left(\frac{b}{a}y\right)^2 + cy^2 = a\left[x + \frac{b}{a}y\right]^2 + \left(-\frac{b^2}{a} + c\right)y^2 \\ &= a\,x'^2 + \left(-\frac{b^2}{a} + c\right)y'^2, \text{ siendo } \begin{cases} x' = x + \frac{b}{a}y, \\ y' = y. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso, la forma cuadrática es:

$$\begin{array}{lcl} \text{definida positiva} & \iff & a > 0, \quad -\frac{b^2}{a} + c > 0, \\ \text{definida negativa} & \iff & a < 0, \quad -\frac{b^2}{a} + c < 0, \\ \text{indefinida} & \iff & a\left(-\frac{b^2}{a} + c\right) < 0. \end{array}$$

Supongamos ahora que $a = 0$. En este caso, $Q(x,y) = 2bxy + cy^2$. Si $c \neq 0$ podemos completar el cuadrado en y, y estamos en un caso análogo al anterior y si $c = 0$ tenemos $Q(x,y) = 2bxy$ y podemos transformar el producto cruzado en una suma$\times$diferencia

$$Q(x,y) = 2b\,xy = \left[\text{siendo} \begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases}\right] = 2b\left(x'^2 - y'^2\right).$$

Por tanto, en este caso, la forma cuadrática es indefinida, sea cual sea el signo de $b \neq 0$.
Recopilando todos los casos obtenemos el enunciado.

Ejercicio. Estudia los casos en los que la forma cuadrática $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es semidefinida.

4. Ejercicios

Ejercicio 1. Reducir a suma de cuadrados las formas cuadráticas siguientes y clasificarlas:

a) $Q(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 20x_1x_2 + 20x_2^2$.

b) $Q(x_1, x_2) = 20x_1^2 + 20x_1x_2 + 4x_2^2$.

c) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 12x_2^2$.

d) $Q(x_1, x_2) = -11x_1^2 - 18x_1x_2 - 27x_2^2$.

e) $Q(x_1, x_2) = -9x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2$.

f) $Q(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 12x_1x_2 - 18x_2^2$.

g) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$.

h) $Q(x_1, x_2, x_3) = 13x_1^2 + 18x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

i) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 9x_2^2 - 2x_3^2 - 30x_1x_2 - 8x_1x_3 - 12x_2x_3$.

j) $Q(x_1, x_2, x_3) = 12x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

k) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

l) $Q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 22x_2^2 - 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3$.

m) $Q(x_1, x_2, x_3) = -11x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

n) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1^2 + 19x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_4^2 - 14x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_4 - 12x_2x_3 + 24x_2x_4 - 8x_3x_4$.

ñ) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1^2 - 9x_2^2 - x_3^2 - 4x_4^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 6x_2x_3 - 12x_2x_4 + 4x_3x_4$.

Ejercicio 2. Calcula, mediante el método de Lagrange, dos formas canónicas distintas para cada una de las formas cuadráticas siguientes. Comprueba que se verifica la ley de inercia de Sylvester.

a) $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2$.

b) $Q(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

c) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$.

d) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 7x_2^2$.

e) $Q(x_1, x_2) = -9x_1^2 + 8x_1x_2 - x_2^2$.

Ejercicio 3. Calcula, mediante el método de Lagrange, una forma canónica para cada una de las formas cuadráticas siguientes. A continuación, aplicando la ley de inercia de Sylvester, escribe tres formas canónicas más para cada una de ellas.

a) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2$.

b) $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

c) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$.

d) $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 7x_2^2$.

e) $Q(x_1, x_2) = 8x_1x_2 - x_2^2$.

f) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

g) $Q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

h) $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Ejercicio 4. Indica la respuesta correcta:

a) Una forma canónica de la forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ es:

- ☐ $-\sqrt{2}y_1^2 - y_2^2$
- ☐ $\frac{3}{5}y_1^2 - y_2^2$
- ☐ $2y_1^2 + 2y_2^2$

b) La forma cuadrática $-5x^2 - y^2 + az^2 + 4xy - 2xz - 2yz$ es definida negativa si

- ☐ $a > -10$.
- ☐ $a = -10$.
- ☐ $a < -10$.

Ejercicio 5. (Septiembre 2004, Ing. Química) Dada la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 4ax_1x_2,$$

clasificarla según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. (Primer Parcial, Enero 2004) Escribir la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (3 - \beta)\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3$$

como suma de cuadrados y clasificarla según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$.