Tema 5: Diagonalización de matrices: Apéndice

1 Más aplicaciones de la diagonalización

1.1 Diagonalización de matrices simétricas reales

Tiene especial interés la diagonalización de matrices simétricas. Supongamos que tenemos una matriz cuadrada real A de orden n que es simétrica (recordemos que esto significa que $A = A^t$). Vamos a considerar el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$, en el que se considera el producto escalar euclídeo. Entonces:

1. A es siempre diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, en particular sus valores propios son todos reales (no hay valores propios imaginarios).
2. Vectores propios de la matriz asociados a distintos valores propios son ortogonales.
3. Puede encontrarse una base ortogonal (e incluso ortonormal) de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de la matriz.

Recordemos que una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal cuando es invertible y $A^{-1} = A^t$. En referencia a esto se tiene que una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si sus vectores-fila (o sus vectores–columna) forman una base ortonormal de espacio $\mathbb{R}^n$, para el producto escalar euclídeo, y que la matriz cambio de base entre dos bases ortonormales (según el producto escalar euclídeo) es siempre una matriz ortogonal.

Sea A una matriz cuadrada real simétrica. Según lo anterior A es diagonalizable y podemos encontrar una base ortonormal B de $\mathbb{R}^n$ (respecto al producto escalar euclídeo) formada por vectores propios de la matriz (esto se hará **escogiendo en cada subespacio propio una base ortonormal y uniendo dichas bases**). Entonces en la descomposición $A = PDP^{-1}$ de A, donde $P = M_{B\to C}$, siendo C la base canónica, se tiene que P es una matriz ortogonal, ya que es la matriz cambio de base entre dos bases ortonormales, B y C, con lo que $P^{-1} = P^t$. En esto consiste lo que denominaremos la **diagonalización ortogonal** de la matriz real simétrica A, en hacer la diagonalización mediante una matriz de paso ortogonal.

Ejercicio 1.1 *Diagonalizar ortogonalmente la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

hallando la matriz diagonal asociada, los subespacios propios, una base ortonormal de vectores propios, y las matrices de paso que permiten la descomposición de la matriz inicial.

Como

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3-\lambda)[(-4-\lambda)(-1-\lambda)-4] = (3-\lambda)(\lambda^2+5\lambda) = (3-\lambda)\lambda(\lambda+5) \end{aligned}$$

los valores propios son $\lambda = 3, 0, -5$. *La matriz diagonal asociada es*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Hallemos una base ortonormal de cada subespacio propio.

Para el valor propio $\lambda = 3$ *se tiene que*

$$ker(A - 3I) \equiv \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ -7y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{array} \right\} =< (1, 0, 0) >$$

Para el valor propio $\lambda = 0$ *se tiene que*

$$kerA \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array} \right\} =< (0, 1, 2) >$$

Para el valor propio $\lambda = -5$ *se tiene que*

$$ker(A + 5I) \equiv \left\{ \begin{array}{l} 8x = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{array} \right\} =< (0, -2, 1) >$$

Luego las bases ortonormales de los subespacios propios son:

$$\{\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|}\} = \{(1,0,0)\}$$

$$\{\frac{(0,1,2)}{\|(0,1,2)\|}\} = \{(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$$

$$\{\frac{(0,-2,1)}{\|(0,-2,1)\|}\} = \{(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$$

Entonces una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ *formada por vectores propios de la matriz es*

$$\{(1,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$$

por tanto las matriz de paso son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \; y \; P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

1.2 Resolución de ecuaciones en diferencias

Hay cierto tipo de problemas cuya resolución depende de la potencia de una matriz. Es el caso de las ecuaciones en diferencias en las que a partir de una matriz cuadrada A y vectores de $\mathbb{R}^n$

$$x_0, x_1, x_2, ...$$

se cumple para cada índice natural k que

$$x_{k+1} = Ax_k$$

Entonces la solución viene dada por la expresión

$$x_k = A^k x_0$$

Ejemplo 1.2 *En una población de 10000 individuos se observa que, de modo aproximado, el 80% de los que eran donantes de sangre un año siguen siéndolo al siguiente y que el 70% de los que no eran donantes de sangre permanecen de nuevo sin donar a otro año. Suponiendo que inicialmente hay 2000 donantes hallar cuántos habrá después de 10 años.*

Denominemos d_k y e_k al número de donantes y no donantes que hay después de k años. Entonces se verifican las siguientes ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= 0.8d_k + 0.3e_k \\ e_{k+1} &= 0.2d_k + 0.7e_k \end{aligned}$$

Si ponemos $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ *y* $u_k = \begin{pmatrix} d_k \\ e_k \end{pmatrix}$ *se tiene que las ecuaciones anteriores pueden ponerse del siguiente modo matricial equivalente $u_{k+1} = Au_k$. Si aplicamos reiteradamente dicha relación se obtiene que $u_k = A^k u_0$, donde*

$$u_0 = \begin{pmatrix} d_0 \\ e_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 8000 \end{pmatrix}$$

Debemos pues hallar A^k. Para ello calcularemos la diagonalización de la matriz A. Sus valores propios son 0.5 y 1. Los subespacios propios asociados son

$$\ker(A - 0.5I) =< (1, -1) >, \ker(A - I) =< (1, 1) >$$

De este modo, tomando

$$D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que $A = PDP^{-1}$. En este caso el cálculo de la inversa sale

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (0.5)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (0.5)^k & 1 \\ -(0.5)^k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (0.5)^k + 1 & -(0.5)^k + 1 \\ -(0.5)^k + 1 & (0.5)^k + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces deducimos que

$$u_k = A^k u_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (0.5)^k + 1 & -(0.5)^k + 1 \\ -(0.5)^k + 1 & (0.5)^k + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2000 \\ 8000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3000(0.5)^k + 5000 \\ 3000(0.5)^k + 5000 \end{pmatrix}$$

por lo que el número de donantes después de pasar k años es $d_k = -3000(0.5)^k + 5000$, y para $k = 5$ se tiene que

$$d_{10} = -3000(0.5)^{10} + 5000 = -\frac{3000}{1024} + 5000 \simeq 4997$$

Ejemplo 1.3 *Se propone construir una sucesión numérica $a_0, a_1, a_2, ...$ tomando $a_0 = 0, a_1 = 1$ y de modo que cada uno de los siguientes números sea la media aritmética de los dos anteriores. Dicha sucesión se llama la sucesión de Fibonacci. Hallar a qué valor tienden dichos números cuando avanzamos suficientemente en este proceso.*

Tengamos en cuenta que se tiene para cada $k \geq 2$ la relación $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k-2}}{2}$. Si tenemos aplicamos esto para el índice $k+1$ se tendrá que

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2}$$

de donde obtenemos las ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} a_k &= a_k \\ a_{k+1} &= \frac{1}{2}a_{k-1} + \frac{1}{2}a_k \end{aligned}$$

Poniendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, u_k = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$$

se tiene que las ecuaciones anteriores pueden ponerse del siguiente modo matricial equivalente

$$u_{k+1} = Au_k$$

Si aplicamos reiteradamente dicha relación se obtiene que

$$u_k = A^k u_0$$

donde $u_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Los valores propios de A son -0.5 y 1. Los subespacios propios asociados son

$$\ker(A + 0.5I) =< (-2, 1) >, \ker(A - I) =< (1, 1) >$$

De este modo, tomando

$$D = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ luego } P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

se tiene que $A = PDP^{-1}$. Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-0.5)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-0.5)^{k-1} & 1 \\ (-0.5)^k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-0.5)^{k-1} - 1 & (-0.5)^{k-1} - 2 \\ (-0.5)^k - 1 & -(-0.5)^k - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces deducimos que

$$u_k = A^k u_0 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-0.5)^{k-1}-1 & (-0.5)^{k-1}-2 \\ (-0.5)^k-1 & -(-0.5)^k-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-0.5)^{k-1}-2 \\ -(-0.5)^k-2 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$a_k = -\frac{1}{3}[(-0.5)^{k-1}-2]$$

cantidad que tiende a $\frac{2}{3}$ *conforme* k *se hace suficientemente grande.*

2 Raíces de polinomios

Todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ puede considerarse como una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n$$

para cada $\alpha \in K$ (es decir, se sustituye la x por α). Se dice que α es **raíz** del polinomio $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$. Esto equivale a que el polinomio $x - \alpha$ divida a $p(x)$, es decir, que exista un polinomio (necesariamente de grado $n-1$, es decir, un grado inferior al de $p(x)$) $q(x)$ que cumpla que $p(x) = (x-\alpha)q(x)$. Toda raíz α de un polinomio $p(x)$ tiene una **multiplicidad**, que es el único número $r \in \mathbb{N}$ que cumple que $(x-\alpha)^r$ divide a $p(x)$, pero $(x-\alpha)^{r+1}$ no divide a $p(x)$. r se puede hallar comprobando que $p(\alpha) = 0$, $p'(\alpha) = 0$, $p''(\alpha) = 0$,..., $p^{(r-1)}(\alpha) = 0$, $p^{(r)}(\alpha) \neq 0$, es decir, comprobando que r es el primer orden de derivación para el que p no se anula al sustituir en α. Una propiedad destacable de los polinomios es que la suma de las multiplicidades de las raíces de un polinomio es como mucho el grado del polinomio.

Recordemos ahora las soluciones de las ecuaciones polinómicas de grados 1 y 2.

La **ecuación general de primer grado** $ax + b = 0$ (con $a \neq 0$) tiene como única solución $x = -\frac{b}{a}$.

La **ecuación general de segundo grado** $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) puede tener dos, una o ninguna solución en $\mathbb{R}$. La fórmula que determina esto es $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Analizando el signo del discriminante $b^2 - 4ac$ sabremos entonces sus soluciones:

Si el discriminante es positivo hay dos soluciones; si es cero hay una sola solución (también se dice que hay 2 soluciones iguales); si es negativo no hay ninguna solución real. Hay que tener presente que incluso en el caso de que no halla soluciones sobre $\mathbb{R}$ sí que hay 2 soluciones sobre $\mathbb{C}$ (como ya veremos más adelante).

Ejemplo 2.1

1. *La raíz del polinomio* $p(x) = 3x+7$ *(es decir la solución de la ecuación* $3x+7 = 0$*) es* $x = -\frac{7}{3}$.

2. *Hallemos las raíces reales de* $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$*, o lo que es lo mismo, tenemos que resolver la ecuación* $2x^2 - 8x + 6 = 0$*. Sus soluciones son*

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{4} = \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = 1, 3 \end{aligned}$$

3. *Dispongámonos a determinar las raíces reales del polinomio* $p(x) = 3x^2 + 6x + 3$. *Éstas se obtienen de la fórmula*

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} = \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{-6 \pm 0}{6} = \frac{-6}{6} = -1, -1 \end{aligned}$$

4. *Hallemos las raíces del polinomio* $p(x) = 5x^2 + 4x + 1$. *Éstas vienen dadas por la fórmula*

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{10} = \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{10} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{10} = \frac{-4 \pm 2i}{10} = \\ &= \frac{-4 + 2i}{10}, \frac{-4 - 2i}{10} \ \textit{(son raíces complejas no reales)} \end{aligned}$$

2.1 Búsqueda de raíces de polinomios

Vamos a ver cómo podemos buscar las raíces de un polinomio de grado mayor que 2 y cómo obtener la factorización de dicho polinomio. Usaremos básicamente dos recursos. En primer lugar para la búsqueda de las raíces enteras $(0, 1, -1, 2, -2, ...)$ nos basaremos en la siguiente propiedad:

Proposición 2.2 *Sea* $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ *un polinomio cuyos coeficientes son números enteros. Si* α *es una raíz entera de* $p(x)$ *entonces* α *divide al término independiente* a_0.

Gracias a este resultado, a la hora de buscar raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros solamente debemos hacerlo entre los divisores del término independiente del polinomio (esto no significa que no haya más raíces que no sean enteras).

En segundo lugar usaremos el **método de Ruffini**. Éste proporciona no sólo una forma de comprobar si un valor α es raíz o no del polinomio (para esto es mejor normalmente sustituir)

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

sino también la descomposición que se obtiene de $p(x)$, en caso de que sí sea raíz.

Se comienza construyendo la siguiente tabla:

	a_n	a_{n-1}	...	...	a_2	a_1	a_0
α							
	a_n						

A partir de dicha tabla se van realizando una serie de operaciones, consistentes en multiplicar α por el número situado en la fila de abajo, colocar el resultadeo debajo del número de la siguiente columna y sumarlo, poniendo el valor final de nuevo abajo (esta vez en la columna en la que estemos). El primer paso sería así:

	a_n	a_{n-1}	...	...	a_2	a_1	a_0
α		αa_n					
	a_n	$a_{n-1} + \alpha a_n$					

Para explicar mejor los siguientes pasos hagamos las identificaciones

$$r_n = a_n, b_{n-1} = \alpha a_n \text{ y } r_{n-1} = a_{n-1} + \alpha a_n$$

De este modo la tabla quedaría así:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \alpha & & b_{n-1} & & & & & \\ \hline & r_n & r_{n-1} & & & & & \end{array}$$

Se procedería igual multiplicando α por r_{n-1}, etc. Al final nos quedaría una tabla del siguiente modo:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \alpha & & b_{n-1} & & & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline & r_n & r_{n-1} & \dots & \dots & r_2 & r_1 & \boxed{r_0} \end{array}$$

Al número r_0 se le denomina **resto** de la división y de hecho se tiene que $r_0 = p(\alpha)$, es decir es el resultado de evaluar en el polinomio la raíz. Como ya sabemos, si este valor es distinto de cero entonces α no es raíz del polinomio. En caso de que el resto sea cero α sí es raíz del polinomio y además los coeficientes que aparecen en la parte inferior de la tabla son precisamente los coeficientes del polinomio, de grado una unidad menor, resultante de la división del polinomio inicial entre $x - \alpha$, ordenados de mayor a menor grado. Es decir

$$p(x) = (x - \alpha)q(x), \text{ donde } q(x) = r_n x^{n-1} + \dots + r_2 x + r_1$$

Dicho razonamiento puede seguirse para ahora, hallar las raíces del polinomio $q(x)$, pues las raíces de $p(x)$ son exactamente las de $q(x)$, además de α. Yendo así, si es posible, rebajaremos el grado del polinomio cada vez más hasta obtener su completa descomposición.

Teorema 2.3 *(**Teorema fundamental del Álgebra**) Todo polinomio de grado n con coeficientes sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ tiene n raíces sobre $\mathbb{C}$ (contando las repeticiones).*

El teorema anterior se traduce en que si tenemos un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes complejos se tiene que existe un número complejo a y números complejos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (entre estos últimos puede haber algunos repetidos) tales que $p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$. Así obtenemos una descomposición de $p(x)$ como producto de polinomios de grado 1, que son precisamente los polinomios irreducibles sobre $\mathbb{C}$.

Un polinomio con coeficientes reales $p(x)$ es un caso particular de lo anterior (pues $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$), con lo cual está asegurado que también tiene tantas raíces complejas como grado. Lo que ocurre en este caso, además, es que como los polinomios irreducibles sobre $\mathbb{R}$ pueden tener grado 1 ó 2 (a diferencia de los polinomios irreducibles sobre $\mathbb{C}$ que tienen todos grado 1) en la factorización de $p(x)$ como producto de irreducibles sobre $\mathbb{R}$ aparecerán además de factores de grado 1 (de la forma $x - \alpha$, con α una raíz real de $p(x)$) también factores de grado 2 de la forma $x^2 + ax + b$. Éstos últimos se caracterizan por tener cada uno de ellos 2 raíces complejas conjugadas no reales $z = \alpha + \beta i$ y $\overline{z} = \alpha - \beta i$ verificando la relación $(x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + ax + b$.

Observación 2.4 *En general se tiene que un polinomio con coeficientes reales o complejos se puede descomponer como producto de los factores que contienen a todas sus raíces, multiplicado por su coeficiente principal.*

Observación 2.5 *Antes de ver un ejemplo de calcular las raíces de polinomios comentemos algunos detalles que conviene tener en cuenta:*

1. *Un polinomio tiene la raíz* 0 *si y sólo si no tiene término independiente. En tal caso el factor correspondiente a dicha raíz es* $x - 0 = x$*. La multiplicidad del* 0 *como raíz será el grado del término no nulo de menor grado, y para la extracción de todos los factores* x *del polinomio bastará con sacar factor común* x *elevado al grado anterior. Por ejemplo el* 0 *es raíz con multiplicidad* 3 *en el polinomio* $x^7 - 5x^5 + 2x^4 + 6x^3$ *y del polinomio puede extraerse el factor* x^3 *sin más que poner* $x^7 - 5x^5 + 2x^4 + 6x^3 = x^3(x^4 - 5x^2 + 2x + 6)$.

2. *Cuando se utilice el método de Ruffini para obtener las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros, cada vez que encontremos una raíz es conveniente reelaborar la lista de divisores, pues el nuevo término independiente es posible que tenga menos divisores que el anterior (nunca tendrá más).*

3. *Cuando se utilice el método de Ruffini con un número y se deduzca que éste es raíz del polinomio, eso no descarta a dicho número como raíz del polinomio resultante de la descomposición. Por tanto, salvo que estemos en el caso de un polinomio con raíces enteras, y este número no esté en la lista de los divisores del nuevo término independiente, habría que volver a probar con él como candidato.*

4. *Cuando se utilice el método de Ruffini con un número y se deduzca que éste no es raíz del polinomio, eso lo descarta como raíz de cualquier polinomio que obtengamos en su factorización. Por tanto, ya no será necesario probar con él como candidato.*

Ejercicio 2.6 *Hallar las raíces reales de los siguientes polinomios (hallar también la factorización, calculando las raíces complejas):*

- $p_1(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
- $p_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
- $p_3(x) = x^3 + x^2 - 21x - 45$
- $p_4(x) = x^3 + 6x^2 - 13x - 42$
- $p_5(x) = x^4 - 4x^2 + 3$
- $p_6(x) = x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 4x + 20$
- $p_7(x) = 2x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 32x - 24$
- $p_8(x) = x^5 - x^4 - 24x^3 - 36x^2$
- $p_9(x) = x^4 - 16$
- $p_{10}(x) = x^4 + 1$
- $p_{11}(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$

Haremos el cálculo de las raíces de uno de ellos a modo de ejemplo. Por ejemplo de $p_1(x)$.

Los divisores del término independiente 4 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Empecemos a probar con las más sencillas (1 ó -1). Por ejemplo con -1. Construimos la tabla

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ -1 & & -1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{6} \end{array}$$

Como el resto es $6 \neq 0$ no se cumple que -1 sea raíz de $p_1(x)$. Probemos con el 1. Construimos la tabla

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

En este caso sí da 0 el resto, por lo que 1 es raíz. Obtenemos además que nuestro polinomio factoriza del siguiente modo:

$$p_1(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$$

Por lo anterior lo que nos quedaría sería hallar las raíces del polinomio $q(x) = x^2 - 4$, que junto con el 1, constituirán todas las raíces de $p_1(x)$. En este caso, no es necesario (aunque podría utilizarse igualmente) el método de Ruffini, pues dicho polinomio es de grado 2 y se le puede aplicar la fórmula para las ecuaciones de segundo grado. Obtenemos muy fácilmente que las raíces de $q(x)$ son ± 2. En conclusión las raíces de $p_1(x)$ son $1, 2, -2$.

Solución: He aquí las raíces reales de los restantes polinomios anteriores:

- $p_2 \rightarrow$0, 1 y 2
- $p_3 \rightarrow$5, -3 y -3
- $p_4 \rightarrow$3, -7 y -2
- $p_5 \rightarrow$-1, 1, $\sqrt{3}$ y -$\sqrt{3}$
- $p_6 \rightarrow$-2, -2, 1 y 5
- $p_7 \rightarrow$-3, -2, -1 y 2
- $p_8 \rightarrow$-3, -2, 0, 0 y 6
- $p_9 \rightarrow$2 y -2
- p_{10} no tiene raíces reales
- $p_{11} \rightarrow$-2 y 3

Ejemplo 2.7 *Vamos a hallar la factorización (sobre $\mathbb{R}$) de los últimos 3 polinomios del ejercicio anterior.*

Solución: Las raíces de $x^4 - 16$ son $2, -2, \pm 2i$; por tanto su factorización es

$$x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Las raíces de $x^4 + 1$ son $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$; por tanto su factorización es

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Las raíces de $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$ son $-2, 3, \pm 2i$; por tanto su factorización es

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 = (x+2)(x-3)(x^2+4)$$

Ejemplo 2.8 *Hallar las raíces (reales y complejas) y la factorización (sobre $\mathbb{R}$) del polinomio $2x^3 - 2$*

Se comprueba fácilmente que el 1 es raíz del polinomio. La descomposición a que da lugar dicha información es

$$2x^3 - 2 = (x-1)(2x^2 + 2x + 2)$$

Y como el polinomio $2x^2 + 2x + 2$ tiene dos raíces complejas no reales, que son

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

la descomposición anterior no puede reducirse más (salvo sacar factor común el 2) y es la pedida. Observemos finalmente que $2x^2 + 2x + 2$ no coincide con $(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = x^2 + x + 1$ sino con $2[(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2]$, por tanto $2x^3 - 2 = 2(x-1)(x^2 + x + 1)$ (esto se debe al coeficiente principal 2).

También podríamos haber hecho primero así

$$2x^3 - 2 = 2(x^3 - 1)$$

después descomponer el polinomio

$$(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

y finalmente obtener que

$$2x^3 - 2 = 2(x-1)(x^2 + x + 1)$$