

Determina los valores propios y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

Los valores propios son las raíces del polinomio característico, que es

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -3 & -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = 15\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3 - 7 = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 \\ f(\lambda) &= (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 7 \quad \text{y} \quad \lambda_{2,3} = 1$$

El valor propio 1, tiene multiplicidad 2.

Para calcular el vector propio, correspondiente al valor propio 7, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2x + y + z \\ 2x + 3y + 2z \\ 3x + 3y + 4z \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + y + z \\ 2x - 4y + 2z \\ 3x + 3y - 3z \end{pmatrix} = 0$$

Multiplicando la primer ecuación por 4, y sumandola a la segunda, obtenemos

$$-18x + 6z = 0$$

así que

$$z = 3x$$

Multiplicando la primera por 3, y sumandola a la tercera, obtenemos

$$-12x + 6y = 0$$

así que

$$y = 2x$$

Por tanto, los vectores propios son

$$t(1, 2, 3) \text{ con } t \neq 0$$

Para calcular los vectores propios, correspondientes al valor propio 1, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2x + y + z \\ 2x + 3y + 2z \\ 3x + 3y + 4z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \\ 3x + 3y + 3z \end{pmatrix} = 0$$

Es claro que tenemos una sola ecuación, $x + y + z = 0$.

Poniendo a x y y como parámetros y denotándolos respectivamente como s y t , tenemos $z = -s - t$. Por tanto, los vectores correspondientes al valor propio 1 son

$$(s, t, -s - t) = s(1, 0, -1) + t(0, 1, -1) \quad \text{donde } s \neq 0 \text{ ó } t \neq 0$$

Resumen:

Valor propio λ	Vectores propios	Dim $E(\lambda)$
7	$t(1, 2, 3)$ con $t \neq 0$	1
1,1	$s(1, 0, -1) + t(0, 1, -1)$, s ó $t \neq 0$	2