TEMA 2: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

2.1. MATRICES EQUIVALENTES, CONGRUENTES Y SEMEJANTES.

Dos matrices del mismo orden (pueden ser rectangulares o cuadradas), A y B, son **equivalentes** si existen dos matrices P y Q, cuadradas con determinante distinto de cero tales que B=PAQ.
Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango

Dos matrices cuadradas del mismo orden, A y B, son **congruentes** si existe una matriz cuadrada P con determinante distinto de cero, de modo que se satisface $B=PAP^t$.
Si dos matrices son congruentes, entonces son equivalentes, por lo tanto si dos matrices son congruentes, tienen el mismo rango.

Dos matrices cuadradas de orden n, A y B, son **semejantes** si existe una matriz cuadrada, P, con determinante distinto de cero, que satisfaga $B=P^{-1}AP$.
A la matriz B se le llama transformada de A mediante la matriz de paso P.
Propiedades:

- **1.** Si A y B son semejantes , entonces son equivalentes.
- **2.** Si A y B son semejantes, tienen el mismo rango.
- **3.** Si (A,B) y (C, D) son semejantes con la misma matriz de paso, entonces A+C es semejante a B+D con matriz de paso P.
- **4.** Si A y B son semejantes con matriz de paso P, y n es un número natural, A^n y B^n son semejantes con matriz de paso P.

2.2. MATRIZ DIAGONALIZABLE.

Una matriz A es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal, D, es decir, si existe P regular tal que $A=PDP^{-1}$.
El proceso de cálculo de la matriz diagonal y de la matriz de paso se denomina diagonalización de A.

2.3. VALORES Y VECTORES PROPIOS. PROPIEDADES.

Sea f un endomorfismo definido sobre un espacio vectorial de dimensión n mediante la relación f(x)=Ax, decimos que t perteneciente a K es un **valor propio** de la matriz A o del endomorfismo f si existe un vector x distinto de cero tal que tx=Ax.

Al conjunto de vectores, x, que satisfacen la relación anterior se les llama **conjunto de vectores propios o autovectores** asociados a t.

Obtención práctica de valores y vectores propios:

Partimos de la ecuación matricial Ax=tx que también podemos expresar Ax-tx=0 o (A-tI)x=0. La ecuación vectorial anterior representa un sistema de ecuaciones homogéneo con matriz de los coeficientes A-tI. Este sistema de ecuaciones tendrá solución distinta de la trivial si el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. El desarrollo de este determinante da lugar a un polinomio de grado n, al que llamaremos **polinomio característico**. Cuando igualamos este polinomio a cero, la ecuación que obtenemos se denomina **ecuación característica**. Las n soluciones de esta ecuación son los valores propios que estábamos buscando. Resumiendo:

- **Polinomio característico:** |A-tI|
- **Ecuación característica:** |A-tI|=0
- **Matriz característica:** A-tI

Como la ecuación característica es de grado n, posee n soluciones, no necesariamente distintas. Por lo tanto es conveniente acompañar cada raíz del número de veces que se repita, a dicho número lo denominaremos **orden de multiplicidad** del valor propio..

Una vez calculados todos los valores propios habrá que calcular el conjunto de vectores propios asociado a cada uno de ellos. Esto lo haremos resolviendo para cada t_i (valor propio) el siguiente sistema homogéneo $(A-t_i)x=0$

Propiedades de valores y vectores propios:

1. T. De Hamilton-Cayley: Si P es el polinomio característico de A, P(A)=0.
2. La suma de los n valores propios de una matriz es igual a su traza.
3. Los valores propios de una matriz coinciden con los de su traspuesta.
4. El producto de los n valores propios de una matriz es igual a su determinante.
5. Si t_i son los valores propios de A, t_i^n son los valores propios de A^n. Además A y A^n tienen los mismos vectores propios.
6. n vectores propios distintos correspondientes a n valores propios distintos de orden de multiplicidad uno, constituyen una base del espacio vectorial donde está definida la matriz A.
7. Dada una matriz simétrica de coeficientes reales se verifica que sus valores propios son números reales y que los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.
8. Los vectores propios de una matriz y de su traspuesta, si corresponden a valores propios distintos, son ortogonales.
9. Si un valor propio para una matriz es un número complejo, se verifica que su complejo conjugado es también un valor propio de la matriz.
10. Dos matrices semejantes tienen la misma ecuación característica y consecuentemente los mismos valores propios con el mismo grado de multiplicidad.
11. Si A y B son dos matrices semejantes mediante la matriz de paso P y x es un vector propio de A asociado a t, entonces Px es un vector propio de B asociado a t.
12. Una matriz triangular tiene como valores propios los elementos de la diagonal principal.
13. El conjunto de vectores propios asociados a un determinado valor propio constituye un espacio vectorial cuya dimensión es mayor o igual que 1 y menor o igual que el orden de multiplicidad del valor propio.
14. Sea p(x) un polinomio de grado n, sea t un valor propio de A y v un vector propio asociado a A, entonces p(t) es un valor propio asociado a p(A) con el mismo vector propio.
15. A valores propios distintos le corresponden vectores propios linealmente independientes.

2.4. DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ CUALQUIERA

Sea A una matriz asociada a un endomorfismo f, definido en un espacio vectorial de dimensión n. Para diagonalizar una matriz A, tratamos de encontrar una matriz diagonal, D, semejante a la matriz A. Necesitamos encontrar una matriz de transformación o cambio de base P, que mediante la relación de semejanza $P^{-1}AP$ de lugar a la matriz D. Por lo tanto tenemos que encontrar una base en la que el endomorfismo quede asociado a una matriz diagonal. En algunos casos podremos encontrarlo, entonces la matriz será diagonalizable , y en otros no, no será diagonalizable.

TEOREMA:
La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonalizable es que exista una base del espacio vectorial formada por vectores propios del endomorfismo asociado a la matriz dada.

Tenemos asegurada la existencia de dicha base para:
- Matrices simétricas.
- Diagonales.
- Matrices en las que los valores propios sean de orden de multiplicidad uno.

En otro caso debemos verificar la condición de orden y rango (equivalente a la anterior) para valores propios de orden de multiplicidad mayor que 1.

TEOREMA: (Condición de orden y rango)
La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea diagonalizable es que para cada valor propio t_i de orden de multiplicidad r_i se verifique rango$(A-t_iI)=n-r_i$.

Si la matriz dada es diagonalizable tendremos que buscar una base de vectores propios, para ello calcularemos los valores propios de la matriz, para cada uno de ellos calcularemos una base de vectores propios asociados, de entre ellos elegiremos los representantes de modo que sean linealmente independientes, estos vectores así escogidos constituyen la base del espacio vectorial y si los disponemos como columnas de una matriz, obtenemos la matriz de paso P. La matriz diagonal D, semejante a A , es aquella matriz diagonal D, que tiene como elementos de la diagonal principal a los valores propios de A.

2.5. DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA

Dada A una matriz simétrica asociada a f, endomorfismo de R^n, se verifican las siguientes propiedades:

a) Si los coeficientes de la matriz son números reales, sus valores propios son siempre números reales.
b) Los vectores propios asociados a valores propios distintos son siempre ortogonales.
c) Si normalizamos los vectores propios ortogonales, los vectores obtenidos son normales.

Una base con vectores propios ortonormales da lugar a una matriz de cambio de base ortogonal de modo que se satisface $P^tAP=D$. Siendo D una matriz diagonal semejante a A.

Las matrices simétricas son siempre diagonalizables como consecuencia del teorema de Schur.

En la práctica para diagonalizar una matriz simétrica mediante una transformación ortogonal desarrollaremos el siguiente proceso:

1. Calculamos sus valores propios. Si son todos distintos, tomamos un vector propio por cada valor, la base así formada tiene la particularidad de ser ortogonal.
2. Normalizamos los vectores de la base anteriormente calculada, para ello dividimos las coordenadas de cada vector por su módulo.
3. Disponemos los vectores de la base obtenida en el paso anterior como las columnas de una matriz que será la matriz de paso ortogonal. Como hemos comentado anteriormente, los elementos de la diagonal principal de D son los valores propios de A.

Si los valores propios no son de orden de multiplicidad uno, los vectores elegidos para cada valor propio pueden resultar no ser ortogonales, en tal caso hay que sustituir la base elegida por una base ortogonal, lo que se conseguirá por el método de ortogonalización de Grand-Smith, después se normalizarán los vectores y se procederá como antes.

APLICACIONES ECONÓMICAS

Entre las aplicaciones de la diagonalización de matrices cuadradas se encuentra el análisis de la solución de un sistema dinámico a lo largo del tiempo. Un sistema se caracteriza por el estado de las n variables que lo determinan y se puede representar por un vector x de R^n cuyas componentes expresan los valores de esas variables.

Si el estado evoluciona a lo largo del tiempo modificando su valor en cada periodo (mn, hora, día, mes, ...), es muy común que la relación entre los estados del sistema en dos periodos sucesivos se exprese en la forma $x_{p+1}=Ax_p$ donde A es una matriz cuadrada de orden n y x_p representa el estado del sistema en el periodo p. Entonces basta conocer el estado del sistema en el periodo inicial x_0 (estado inicial) para poder calcular el estado del sistema en cualquier periodo. En efecto si x_0 es conocido: $x_1=Ax_0$; $x_2=Ax_1$, $x_2=A(Ax_1)$, $x_2=A^2x_0$ de este modo $x_m=Ax_{m-1}=A(A^{m-1}x_0)=A^mx_0$.
Por lo tanto para conocer el estado del sistema en el periodo m, es necesario el cálculo de A^m. Tal cálculo es, en general, complicado, pero se simplifica notablemente si A es diagonalizable ya que $A=PDP^{-1}$, siendo D diagonal y $A^m=PD^mP^{-1}$

Ejemplo:
Se estudian los mercados de aceite de oliva y de aceite de semillas de un determinado país. Estos dos mercados estaban en equilibrio, pero una gran campaña publicitaria sobre los beneficios para la salud del consumo del aceite de oliva ha generado considerables distorsiones en los mismos. La distorsión en cualquiera de los mercados en el periodo t+1 es una función de la distorsión de los dos mercados en el periodo anterior, y más concretamente según las relaciones:

$$x_{t+1} = 0'4x_t + 0'5y_t$$
$$y_{t+1} = 0'2x_t + 0'1y_t$$

Siendo x e y las distorsiones en los mercados de aceite de oliva y de aceite de semillas respectivamente. ¿Desaparecerán estas distorsiones a largo plazo?

Se pueden plantear las distorsiones como $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0´4 & 0´5 \\ 0´2 & 0´1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$

Para que no hubiera distorsiones a largo plazo se debería verificar:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0´4 & 0´5 \\ 0´2 & 0´1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ siendo k el número de períodos que tienen que pasar desde el momento inicial, por lo tanto se requiere que $\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} 0´4 & 0´5 \\ 0´2 & 0´1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ lo que ocurrirá si los autovalores de esta matriz son menores que 1 en valor absoluto.

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 0´4-\lambda & 0´5 \\ 0´2 & 0´1-\lambda \end{vmatrix}$ =(0´4 - λ)(0´1 - λ)-0´1=λ^2 - 0´5λ-0´06=0 con lo que λ=0´6 o λ=0´1.

La matriz A es diagonalizable con lo que $A^k=PD^kP^{-1}=P\begin{pmatrix} 0´6^k & 0 \\ 0 & (-0´1)^k \end{pmatrix}P^{-1}$, si k tiende a infinito $(0´6)^k$ y $(-0´1)^k$ tienden a cero y por lo tanto las distorsiones tienden a anularse.