VALORES Y VECTORES PROPIOS

- En diversos campos de la ingeniería y las matemáticas surge el problema de calcular los **valores** escalares λ y los **vectores** $x \neq 0$ tales que para la matriz cuadrada A se cumple

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

- Algunos de estos **campos de aplicación** son:
  - Ecuaciones diferenciales
  - Estabilidad de sistemas lineales
  - Sistemas eléctricos (componentes simétricas)
  - Polos y ceros de funciones transferencia
  - Diagonalización de matrices

- Podemos averiguar si el problema planteado por (1) tiene solución si la reescribimos como sigue

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad (2)$$

- Así el problema se transforma en el ya conocido sistema lineal homogéneo $Bx=0$, el cual ya sabemos que tiene solución única $x=0$ cuando $\det(B) \neq 0$. Justamente este es el caso que no nos interesa.

- El número λ se dice **valor propio** de A (matriz cuadrada) si y sólo si

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (3)$$

  esta es la **ecuación característica** de la matriz A.

- El determinante que aparece en (3) resulta ser un polinomio en potencias de λ. Por ello a la expresión

$$a(\lambda)=\det(A - \lambda I) \qquad (4)$$

se le llama **polinomio característico** de la matriz A.

- **Observación**: El polinomio característico de una matriz de dimensión n×n es de grado n, por lo cual tendrá n posibles valores propios λ que satisfacen (3)

- Si λ es un valor propio de A y si x es el vector no nulo tal que Ax = λx entonces x se dice **vector propio** de A correspondiente al valor propio λ

Ejemplo: Calcular los valores y vectores propios para la matriz $A=\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Solución: La ecuación característica queda:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}=0$$

o sea:

$$(4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

factorizando:

$$(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

con lo cual obtenemos dos valores propios:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 2$$

buscamos ahora los correspondientes vectores propios:

para $\lambda_1 = -1$:

$$(a-\lambda_1 I)x=\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el sistema obtenido tiene una infinidad de soluciones de la forma $x=[x_1, x_1]^t$. Así, por ejemplo $x=[1\ 1]^t$ es un vector propio correspondiente a l_1 = *-1*.

para l_2 = *2:*

$$(a-\lambda_1 I)x=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nuevamente el sistema obtenido tiene una infinidad de soluciones de la forma $x=[x_1, 0.4x_1]^t$. Así, por ejemplo $x=[5\ 2]^t$ es un vector propio correspondiente a l_2 = *2*.

⌦ Como puede verse del ejemplo anterior, a un valor propio λ en general le corresponden una infinidad de vectores propios este conjunto infinito es un espacio vectorial y se denomina el **espacio propio** correspondiente a λ

⇨ Obsérvese además que para un λ_k dado, su espacio propio correspondiente es el espacio nulo de la matriz $(A-\lambda I)$.

en **Matlab**:

```
» % Introducimos la matriz del ejemplo
» A=[4 -5;2 -3];
» % Calculamos sus valores propios:
» eig(A)
ans =      2
          -1
» % Calculamos sus vectores propios unitarios:
» [V,D]=eig(A);
V =
    0.9285    0.7071
    0.3714    0.7071
D =
     2     0
     0    -1
```

Propiedades Básicas de los valores propios

- La suma de los n valores propios de la matriz A es igual a su **<u>traza</u>**: $l_1+l_2+\ldots+l_n = \textit{traza}(A)$

- El producto de los n valores propios de la matriz A es igual a su **determinante**: $l_1 l_2 \ldots l_n = \textit{det}(A)$

- Los valores propios de una **matriz triangular** (superior o inferior) son los valores de su diagonal.

- **Tarea**: Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcula sus valores propios, sus vectores propios unitarios correspondientes y verifica las dos primeras propiedades anteriores.

Diagonalización

- Dada una matriz cuadrada A, y una matriz invertible T. A la matriz $B=T^{-1}AT$ se le llama **<u>matriz similar</u>** a A y a la operación $T^{-1}AT$ se le llama **<u>transformación de similaridad</u>**

- **Propiedades básicas**: Una transformación de similaridad es una **<u>relación de equivalencia</u>** porque es:
  - **Reflexiva**: Una matriz es similar a sí misma.
  - **Simétrica**: Si A es similar a B, B es similar a A.

- **Transitiva**: Si A es similar a B y B es similar a C, entonces A es similar a C.

✍ **Tarea**: a) Demostrar las propiedades básicas. b) Dar otro ejemplo de una relación de equivalencia.

⌧ **Otras propiedades**:

- Las siguientes características de una matriz son invariantes (no se alteran) bajo una transformación de similaridad:
  - el determinante
  - la traza
  - los valores y vectores propios

✍ **Tarea**: Para las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. a) Calcula $B=T^{-1}AT$. b) Demuestra las propiedades anteriores para A, B.

⌧ Si la matriz A $n\times n$ tiene n **vectores propios LI**, y formamos una matriz T cuyas columnas sean estos vectores, entonces la transformación $D=T^{-1}AT$ produce una matriz diagonal D. Además, los elementos de D serán justamente los valores propios de A.

Ejemplo: Obtener la forma diagonal para la matriz del ejemplo anterior: $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Solución: Formamos la matriz T usando como sus columnas los vectores propios ya calculados:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Con lo cual $$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Calculando D: $$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

⇨ **Observaciones**:

1) No todas las matrices tienen forma diagonal.
2) Si una matriz tiene todos sus n valores propios distintos tiene n vectores propios LI y por lo tanto tiene forma diagonal.
3) Si una matriz tiene valores propios repetidos puede y no tener forma diagonal.
4) Toda matriz tiene una forma diagonal por bloques llamada **Forma de Jordan**.
5) Una **matriz simétrica** tiene **valores propios reales** y vectores propios ortogonales que siempre se pueden convertir en ortonormales para formar una matriz diagonalizante T tal que $T^{-1} = T^t$ (Una matriz que cumple esta propiedad se llama **matriz ortogonal**)
6) De acuerdo a lo anterior, una matriz simétrica A se puede diagonalizar mediante la transformación:

$$D = T^tAT$$

Aplicación a Ecuaciones de Estado

Consideremos el conjunto de n ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (sin entrada excitadora):

$$\dot{x} = Ax$$

Donde x es el vector de variables de estado de $n\times 1$. La solución se puede calcular por analogía al caso escalar como:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

El problema (que en el caso escalar es trivial) es: **¿Cómo calcular la matriz exponencial e^{At}** ?

Se puede resolver considerando por analogía al caso escalar la expansión en serie:

$$e^{At} = I + At + \tfrac{1}{2!}A^2t^2 + \tfrac{1}{3!}A^3t^3 + ...$$

y observando el comportamiento de una transformación de similaridad:

$$T^{-1}e^{At}T = e^{T^{-1}AT}$$

O bien,
$$e^{At} = T(e^{T^{-1}AT})T^{-1}$$

si elegimos T de manera que $D=T^{-1}AT$ sea una matriz diagonal:

$$e^{T^{-1}AT} = e^{D} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ ... & & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Esto nos permitirá hacer un cálculo directo de la matriz exponencial como $e^{At} = T(e^{D})T^{-1}$

Ejemplo: Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Con las condiciones iniciales $x(0)= x_0 = [1\ 2]^t$

Solución: Los valores propios de la matriz A del sistema son $\lambda_1= -3$, $\lambda_2=-1$ y los vectores propios correspondientes son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, si elegimos $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ tendremos $D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Y por lo tanto $e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

entonces

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

nos da:

$$e^{At} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-3t} + e^{-t} & -e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} & -e^{-3t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

finalmente $x(t) = e^{At}x_0 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{-3t} + 3e^{-t} \\ -3e^{-3t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}$

✍ **Tarea**: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = Ax$ para la matriz A de la tarea anterior con las condiciones iniciales x_0=[1 -1]^t