Transformaciones Lineales

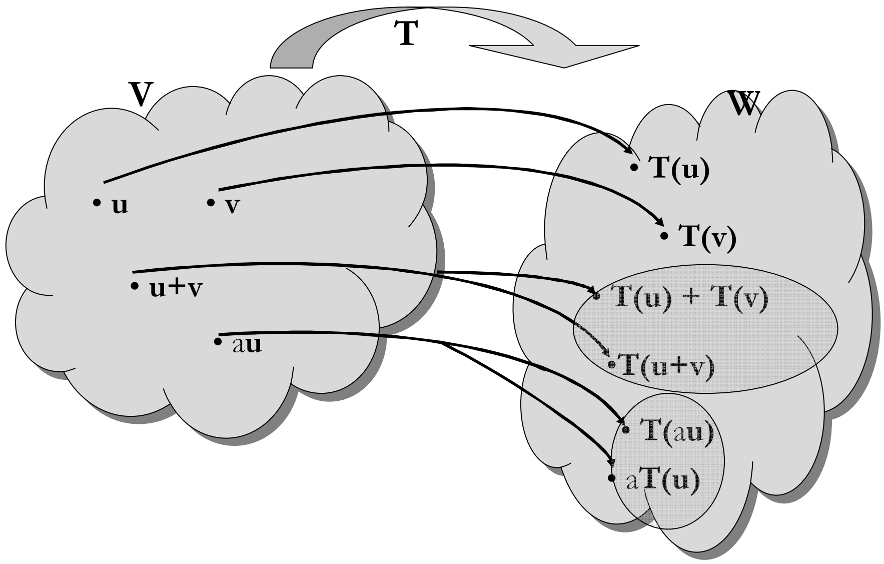
Transformaciones Lineales

• Las **transformaciones lineales** intervienen en muchas situaciones en Matemáticas y son algunas de las funciones más importantes.
En **Geometría** modelan las simetrías de un objeto, en **Algebra** se pueden usar para representar ecuaciones, en **Análisis** sirven para aproximar localmente funciones, por ejemplo.

• Sean V,W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K
Una función T de V en W transforma vectores de V en vectores de W.
Impondremos condiciones para que T *preserve* las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalar, esto es, que sea equivalente sumar y multiplicar por escalar las preimágenes en V como las imágenes en W.

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile



Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

<u>Definición</u>:

Sean V, W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K

$T: V \to W$ es una **transformación lineal** de V en W si:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \forall u, v \in V,\ T(u+v) = T(u) + T(v) \\ 2)\ \forall a \in K, \forall v \in V,\ T(av) = aT(v) \end{array}}$$

<u>Observaciones</u>:

1) Es usual denotar con los mismos símbolos $+$ y $\cdot$ (símbolo que se omite) la suma y el producto por escalar definidos sobre los espacios vectoriales V y W como se hizo en la definición, que pueden ser diferentes.

2) T también se llama **aplicación lineal.**

Transformaciones Lineales

3) T es transformación lineal $\Leftrightarrow \forall a,b \in K, \forall u,v \in V, T(au+bv) = aT(u)+bT(v)$

4) Transformaciones lineales preservan combinaciones lineales.

Esto es:

Sea $T: V \to W$ transformación lineal. Entonces, para $a_i \in K,\ v_i \in V,\ i = 1,2,\ldots,n$

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots + a_nT(v_n)$$

Se cumple que:

Si V,W son espacios vectoriales sobre un cuerpo K y $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

1) $T(0_V) = 0_W$

2) $T(-v) = -T(v), \quad \forall v \in V$

3) $T(v-w) = T(v) - T(w), \quad \forall v,w \in V$

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Algunas transformaciones lineales:

1) $T: V \to W,\ T(v) = 0_W,\ \forall v \in V$ **Transformación lineal Nula** .

2) $T: V \to V,\ T(v) = cv,\ \forall v \in V,$ con $c \in K,\ c$ fijo.

En particular, si $c = 1$:

$I_V: V \to V,\ I_V(v) = v,\ \forall v \in V$ **Transformación lineal Identidad** .

3) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Entonces $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ T(v) = Av$ es transformación lineal.

Transformación determinada por la matriz *A*

(El producto matricial Av está definido si los vectores se colocan como vectores columnas).

No son transformaciones lineales:

1) La función **determinante** $\det : M_n(K) \to K$ ya que:
$\det(A+B) \neq \det A + \det B,\quad \det(kA) = k^n \det A \neq k \det A,$
para $n > 1$

2) Si V es un espacio vectorial sobre K y $v_0 \in V,\ v_0 \neq 0_V$,
la función **traslación** por el vector v_0 definida por
$T(v) = v + v_0 \quad \forall v \in V$ ya que $T(0_V) = v_0 \neq 0_V$

KERNEL E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

Definición:

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo K, con $T : V \to W$
una transformación lineal

1) El **kernel de T** denotado $KerT$ es el conjunto

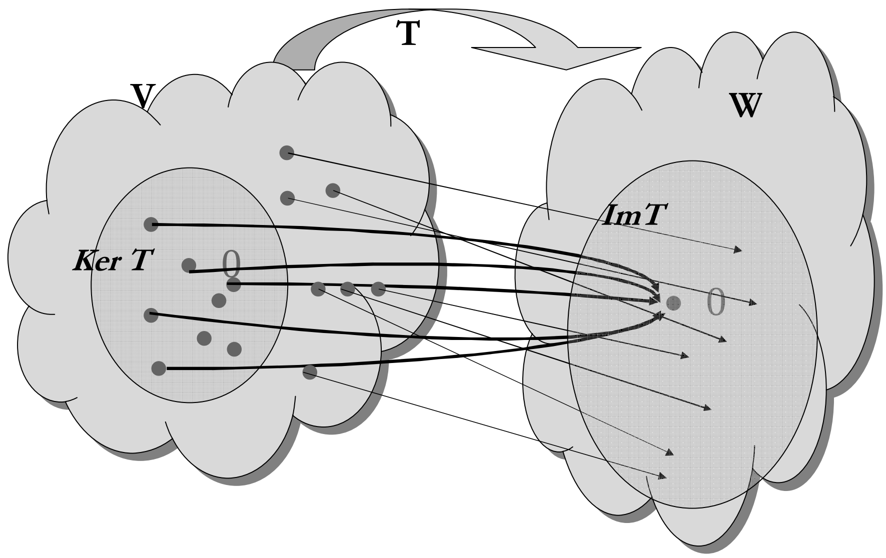
$$KerT = \{v \in V \,/\, T(v) = 0_W\}$$

(También se le llama núcleo y se anota ***Nu T***)

2) La **imagen** de denotada $\operatorname{Im} T$, es el conjunto:

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W \,/\, w = T(v),\ \text{para algun } v \in V\}$$

Transformaciones Lineales



Transformaciones Lineales

Se cumple:

1) $KerT$ es un subespacio vectorial de V.
La **nulidad** de T, es la dimensión del kernel de T. Se anota: $n(T)$

2) $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de W.
El **rango** de T es la dimensión de la imagen de T. Se anota: $r(T)$

3) Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo K con $\dim V < \infty$.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

$$\dim(KerT) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$$

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

TRANSFORMACIONES LINEALES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS Y BIYECTIVAS.

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo K,
y $T: V \to W$ una transformación lineal.

Entonces:

1) T es **inyectiva** $\Leftrightarrow$ $KerT = \{0_V\}$

2) T es **sobreyectiva** $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} T = W$

3) T es **biyectiva** $\Leftrightarrow$ $KerT = \{0_V\}$, $\operatorname{Im} T = W$

11

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo K,
con $\dim V = n$, $\dim W = m$

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

1) T es inyectiva $\Leftrightarrow$ $r(T) = n$

2) T es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $r(T) = m$

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo K, y $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a V $\Rightarrow$ $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ genera a $\operatorname{Im} T$.

O sea:

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\operatorname{Im} T = \langle \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\} \rangle$

12

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Sean V,W espacios vectoriales sobre un cuerpo K.

Sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subset W$ un conjunto de *n vectores arbitrarios*

Entonces existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$

tal que $T(v_i) = w_i, \; i = 1,2,\ldots,n$

O sea: **una transformación lineal queda completamente determinada por sus imágenes en una base del dominio.**

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

La **composición** de transformaciones lineales es transformación lineal. Esto es:

Si $T : U \rightarrow V, \; S : V \rightarrow W$ son dos transformaciones lineales entonces $S \circ T : U \rightarrow W$ es transformación lineal.

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, con V, W espacios vectoriales sobre K

1) T es invertible $\Leftrightarrow$ existe $T^{-1} : W \rightarrow V \;/\; T^{-1} \circ T = I_V, \; T \circ T^{-1} = I_W$

Si T es invertible se dice que es un **isomorfismo**

2) $T : V \rightarrow W$ transformación lineal invertible

$\Rightarrow \; T^{-1} : W \rightarrow V$ es transformación lineal.

3) $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$

Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, se dice que los dos espacios vectoriales V y W son **isomorfos** o que V es **isomorfo** a W y se anota

$$V \cong W.$$

Si dos espacios vectoriales son isomorfos no significa que sean iguales, pero toda propiedad relacionada con la estructura de espacio vectorial que posea uno de ellos se transfiere al otro a través del isomorfismo.

Se cumple que:

Dos espacios vectoriales finito dimensionales son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.

Esto es, V, W espacios vectoriales de dimensión finita:

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W$$

VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

INTRODUCCIÓN

Los conceptos de **valores propios** y de **vectores propios** de transformaciones lineales o de matrices que estudiaremos son de importancia en:

- **aplicaciones de matemáticas**, como :
  - diagonalización de matrices
  - rotación de ejes coordenados
  - soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

- **otras disciplinas**, como:
  - economía
  - biología
  - física
  - mecánica

En esta parte, las matrices serán cuadradas y las funciones serán **operadores lineales**, esto es, transformaciones lineales de un espacio vectorial en si mismo

Definición:

1) Sea $A \in M_n(K),\ K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$ se llama **valor propio** de A , si:

$\exists\ v \in \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n, v \neq 0$, tal que $Av = \lambda v.$

Cada vector $v,\ v \neq 0,$ que satisface $Av = \lambda v,$

se llama **vector propio** de $A,$ **asociado al valor propio** $\lambda.$

2) Sean V espacio vectorial sobre un cuerpo K y $T : V \to V$ una transformación lineal.

$\lambda \in K$ se llama **valor propio** de T , si:

$\exists\ v \in V, v \neq 0_V$, tal que $T(v) = \lambda v.$

Cada vector $v \in V,\ v \neq 0_V$ que satisface $T(v) = \lambda v,$

se llama **vector propio de** $T,$ **asociado al valor propio** $\lambda.$

Transformaciones Lineales

- Los valores propios también se denominan **valores característicos, autovalores o eigenvalores**

Los vectores propios también se denominan **vectores característicos, autovectores o eigenvectores.**

- Si λ es valor propio de una matriz A, el conjunto $W_\lambda = \{v \in K^n / Av = \lambda v\}$ es subespacio vectorial de K^n llamado **espacio propio de A asociado al valor propio** λ.

(Observar que $0 \in W_\lambda$, pero 0 no es vector propio de A)

Si λ es valor propio de una transformación lineal T, el conjunto $W_\lambda = \{v \in V / T(v) = \lambda v\}$ es subespacio vectorial de V llamado **espacio propio de T asociado al valor propio** λ.

(Observar que $0 \in W_\lambda$, pero 0 no es vector propio de T)

Transformaciones Lineales

- Sea $A \in M_n(K)$. Entonces:

λ es valor propio de $A \Leftrightarrow Av = \lambda v$, con $v \neq 0_{K^n}$

$\Leftrightarrow Av = (\lambda I_n)v$, con $v \neq 0_{K^n}$

(I_n identidad de orden n)

$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0_{K^n}, \quad v \neq 0_{K^n}$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{con } A = (a_{ij})$$

Los valores λ que satisfacen esta ecuación, son los valores propios de A.

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

- Sea $T:V\to V$ transformación lineal. Entonces:

$\lambda\in K$ es valor propio de $T \Leftrightarrow \exists\, v\in V, v\neq 0_V,\ T(v)=\lambda v$

$$\Leftrightarrow \exists\, v\in V, v\neq 0_V,\ \left(T-\lambda I_V\right)(v)=0_V$$

I_V identidad en V

$$\Leftrightarrow v\in Ker\left(T-\lambda I_V\right),\ v\neq 0_V$$

$$\Leftrightarrow Ker\left(T-\lambda I_V\right)\neq\left\{0_V\right\}$$

Así, los vectores propios de T asociados al valor propio λ, son los vectores no nulos del kernel de la transformación lineal T - λI_V.

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

POLINOMIO CARACTERISTICO.
ECUACION CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ

Definición:

Sea $A\in M_n(K)$

La **matriz característica** de A es la matriz $A-\lambda I_n$.

El **polinomio característico** de A es el polinomio $p_A(\lambda)=\det\left(A-\lambda I_n\right)$

La **ecuación característica** de A es la ecuación $p_A(\lambda)=\det\left(A-\lambda I_n\right)=0$

- Sean $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ y $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ el polinomio característico de A.

Entonces:

1) $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ es un polinomio de grado n.

$$p_A(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\ldots+c_{n-1}\lambda^{n-1}+c_n\lambda^n$$

2) Los valores propios de la matriz A son las raíces de la ecuación característica de A, esto es:

$\lambda\in K$ es un valor propio de A si y sólo si $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0$

3) Para determinar los valores propios de A, debemos encontrar las raíces de su ecuación característica $p_A(\lambda)=0$, ecuación de grado n que tiene n raíces reales y/o complejas, de manera que A tiene a lo más n valores propios.

Dada $A\in M_n(\mathbb{C})$, entonces A tiene exactamente n valores propios, no necesariamente distintos entre sí.

Una matriz real, esto es, todos sus elementos son reales, es tal que su ecuación característica podría no tener raíces reales sino complejas.

4) Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ todos los valores propios de la matriz A. Entonces:

- La suma de los valores propios de la matriz A es igual a su traza:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = trA, \quad \text{con } trA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

- El producto de los valores propios de la matriz A es igual al determinante de A:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n = \det A$$

5) A es matriz no invertible (singular) $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ es valor propio de A

Basta considerar:

$\lambda = 0$ es valor propio de A $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ es no invertible o singular

6) Algunos autores definen el polinomio característico de A en la forma:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Ambas definiciones difieren a lo más en el signo, pues

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \det(\lambda I_n - A)$$

La ecuación característica queda igual.

POLINOMIO CARACTERISTICO.
ECUACION CARACTERISTICA DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

- Sean V espacio vectorial de dimensión n y $T: V \to V$ una transformación lineal. Sean $A=[T]_B$, $A'=[T]_{B'}$ las matrices asociadas a T respecto de dos bases ordenadas distintas B, B' de V.

  Entonces: $\det(A-\lambda I_n)=\det(A'-\lambda I_n)$

  Así, el polinomio $\det(A-\lambda I_n)=\det([T]_B-\lambda I_n)$ depende sólo del operador lineal T y no depende de la base ordenada B.

- El hecho de que un cambio de base no afecta a este polinomio nos permite definir el polinomio característico de una transformación lineal.

Sean V un espacio vectorial de dimensión n, B una base ordenada de V y $T: V \to V$ una transformación lineal.

Se llama ***polinomio característico del operador lineal*** T, al polinomio:

$$p_T(\lambda)=\det([T]_B-\lambda I_n)$$

- Se tiene que: grado $p_T(\lambda)=n=\dim V$

  $\lambda \in K$ es valor propio de $T \Leftrightarrow \lambda$ es cero del polinomio característico de T.

- Los valores propios de la transformación lineal T dependen de T y no dependen de la base escogida para representarla.

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

- Sean: V espacio vectorial sobre un cuerpo K, $\dim V = n$,

  $T: V \to V$ transformación lineal y

  $A = [T]_B$, la matriz representativa de T

  relativa a alguna base B de V.

Entonces: $\lambda \in K$, λ es valor propio de $T \Leftrightarrow \lambda$ es valor propio de A.

- Se cumple que.

  1) Si A es matriz cuadrada, entonces $p_A(A) = O$

  donde $p_A(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$ si $p_A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

  2) Si $T: V \to V$ es transformación lineal, entonces $p_T(T) = 0$

  donde $p_T(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_n T^n$ si $p_T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

MATRICES SIMILARES

Definición:

Sean A, B matrices de orden n.

B se dice **similar (o semejante)** a A si existe matriz P de orden n, invertible, tal que: $B = P^{-1}AP$

1) La similaridad es una relación de equivalencia, en el conjunto $M_n(K)$, esto es:

- A es similar a A.
- Si B es similar a A, entonces A es similar a B.
- Si A es similar a B y B es similar a C, entonces A es similar a C (Por el segundo punto, podemos decir que A y B son *similares*).

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

2) Como: $B = P^{-1}AP \;\Leftrightarrow\; PB = AP,$ 1)entonces:

A y B son semejantes $\Leftrightarrow$ existe P matriz invertible de orden n tal que: $PB = AP.$

La ventaja de esta equivalencia es que sólo se requiere conocer que P es invertible y no calcularla.

3) Sean A, B matrices de orden $n,$ 1)similares entonces:
A y B tiene el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.

4) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K,$ de dimensión finita $n,$ y sean A, A' dos matrices $n \times n$ sobre $K.$ Entonces:
A, A' son similares si y solo si A, A' representan a la misma transformación lineal $T : V \to V$ relativo a bases diferentes de $V.$

31

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

DIAGONALIZACION

- Para A matriz cuadrada, nos interesa saber si existe una matriz similar a A, que sea diagonal.

- Si $T : V \to V$ es una transformación lineal, con V espacio vectorial, nos interesa saber si existe una base de V de modo que la matriz asociada a T en esa base sea matriz diagonal.

- Mostraremos que esto no siempre es posible y determinaremos condiciones para que lo sea.

32

Transformaciones Lineales

¿Pero, por qué interesa que estas matrices sean diagonales?

Recordemos que una **matriz diagonal** $D = (d_{ij})$ de orden n
es tal que todos los elementos de D fuera de la diagonal principal son ceros:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Se puede anotar: $D = diag(d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn})$

Cumple con lo siguiente:

1) Si $D' = diag(d'_{11}, d'_{22}, ..., d'_{nn})$ es otra matriz diagonal entonces
DD' también es matriz diagonal de orden n,
y el producto es: $DD' = diag(d_{11}d'_{11}, d_{22}d'_{22}, ..., d_{nn}d'_{nn})$

Transformaciones Lineales

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

2) $\det D = d_{11}d_{22}...d_{nn}$

$\det D^k = d_{11}^k d_{22}^k ... d_{nn}^k$, donde $D^k = diag(d_{11}^k, d_{22}^k, ..., d_{nn}^k)$

3) D es invertible si y solo si $d_{ii} \neq 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$
Más aún, en este caso:

$$D^{-1} = diag(1/d_{11}, 1/d_{22}, ..., 1/d_{nn})$$

4) Los valores propios de la matriz diagonal D son los elementos de la diagonal principal.

MATRIZ DIAGONALIZABLE

Definición:

Sea A matriz de orden n.
Se dice que A **diagonalizable** si es similar a una matriz diagonal.

1) Diagonalizar una matriz A consiste en encontrar una matriz diagonal similar a la matriz A. En tal caso, también se dice que A se puede *diagonalizar*.

2) Si A es diagonalizable, entonces existe D matriz diagonal de orden n tal que A y D son similares.

Esto es: existe matriz P de orden n invertible tal que $P^{-1}AP = D$
Se dice que P **diagonaliza** a la matriz A.

3) Si A es diagonalizable, entonces A es similar a una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal, son los valores propios de A.

Esto es consecuencia de que si A y D son similares, entonces tienen los mismos valores propios, y si D es matriz diagonal, entonces sus valores propios son sus elementos en la diagonal principal.

4) La mayoría de las matrices no son matrices diagonales, pero muchas de ellas se pueden diagonalizar.

No toda matriz es diagonalizable, esto es, puede no existir una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea matriz diagonal.

Transformaciones Lineales

La siguiente es una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable.

Sea $A \in M_n(K)$

A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ A tiene n vectores propios linealmente independientes.

En este caso:

A es similar a una matriz diagonal D, $D = P^{-1}AP$ donde D tiene en la diagonal principal los valores propios de A, y P es una matriz cuyas columnas son respectivamente n vectores propios L. I. de A. Esto es, la columna j de P es un vector propio de A, asociado al valor propio λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$

Transformaciones Lineales

- Vectores propios asociados a valores propios distintos, son L.I.

- Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

- El recíproco de lo anterior no es cierto.
  Una matriz puede ser diagonalizable y tener valores propios repetidos.

TRANFORMACIÓN LINEAL DIAGONALIZABLE

Sean: V un espacio vectorial de dimensión finita n

$T : V \to V$ una transformación lineal.

Sabemos que:

T se puede representar mediante muchas matrices diferentes de orden n, una por cada base ordenada en V.

En particular, si A_1 y A_2 son las representaciones matriciales de T respecto a bases B_1 y B_2 de V, respectivamente, entonces sabemos que $A_2 = P^{-1}A_1P$ con P matriz invertible, esto es, A_1 y A_2 son similares, y por tanto, tienen los mismos valores propios.
Usamos esto para la definición siguiente.

Definición:
Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, con V espacio vectorial de dimensión n. T se dice **diagonalizable** si existe alguna base B de V, de modo que la representación matricial de T en dicha base, es una matriz diagonal.

Se dice que la base B **diagonaliza** al operador T.

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim V = n$
Entonces:

T es diagonalizable si y solo si existe una base B de V de vectores propios de T.

Además, si D es la matriz diagonal, entonces los elementos de la diagonal principal de D son los valores propios de T.